Sofismas y paradojas como herramientas de divulgación matemática

Fabricio Agustín Quinteros Wagner

RSME-UMA 2025

Trabajo en colaboración con Solange del Cielo Pitronaci y Roberto Ben

Historia

International Collaboration in Mathematical Analysis

Taller con participación mixta: UNGS + Cal Poly Pomona.

- 2do. semestre de 2024
- una hora a la semana
- inglés / castellano
- virtual / presencial
- intercambio cultural
- temas de análisis
- modalidad taller
- producción de pósters

Sofisma

Sofisma

- Viene del griego *sophisma*: “artificio” o “engaño”.
- Usado por los sofistas como Gorgias (427 a.C.) en discursos retóricos.
- Un **sofisma** es un argumento falso con apariencia de **verdad**.

Sofisma

- Viene del griego *sophisma*: “artificio” o “engaño”.
- Usado por los sofistas como Gorgias (427 a.C.) en discursos retóricos.
- Un **sofisma** es un argumento falso con apariencia de **verdad**.

Idea de los pósters: Presentar sofismas de Análisis Matemático para que el lector detecte el error.

Producción de póster

Sofismas y Resoluciones Erróneas

Luis Aguilar, Ariana Escalante, Ben Le, Fabricio Quinteros

Asesores: Fernando López-García, Roberto Ben

Mathematics and Statistics Department - California State Polytechnic University Pomona

Area de Matemática - Instituto del Desarrollo Humano - Universidad Nacional de Gral. Sarmiento

Introducción

Este trabajo surge de una experiencia de educación matemática multicultural en la que participaron en forma conjunta estudiantes de California State Polytechnic University, Pomona (CPP) y de la Universidad Nacional de General Sarmiento, a través de reuniones virtuales en las que se discutieron algunos conceptos vinculados al análisis matemático.

Trabajamos la temática "convergencia de sucesiones de números reales y de funciones (convergencia puntual y uniforme)" abordándola desde una perspectiva de intercambio y trabajo grupal en la que los y las estudiantes de ambas universidades tuvieron una participación activa a través de la resolución de problemas. Esta iniciativa tuvo por objetivos principales vincular y tender lazos entre los y las estudiantes participantes de Estados Unidos y Argentina, resignificar y revalorar los conocimientos del inglés y el castellano tanto desde un punto de vista netamente lingüístico como desde un punto de vista matemático, y visibilizar la diversidad y las diferencias culturales.

La experiencia transcurrió a lo largo de tres meses, en encuentros virtuales sincrónicos, con frecuencia semanal, de aproximadamente una hora cada uno.

Antecedentes y Objetivos

En matemáticas, existen diferentes tipos de convergencia relacionados con secuencias y series de funciones. Además, hay una variedad de formas de definir la convergencia de una secuencia de funciones, y diferentes definiciones que conducen a tipos de convergencia no equivalentes. En este póster, nos centramos en la convergencia puntual y la convergencia uniforme. La convergencia puntual define la convergencia de una secuencia de funciones en términos de la convergencia de la secuencia de valores en cada punto de su dominio, mientras que la convergencia uniforme es una noción más fuerte de convergencia de funciones. La principal diferencia entre estas dos es análoga a la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme.

Deseamos desarrollar un ejemplo útil que enfatice la idea de convergencia puntual y uniforme. Nuestro objetivo es que estos ejemplos fomenten la autorreflexión, el pensamiento crítico, la aceptación de errores y la argumentación en los estudiantes, así como provocar la discusión y la colaboración entre ellos. Esperamos que esto ayude a remediar el sesgo de conocimiento positivo y contribuya al desarrollo de una mejor comprensión de la convergencia puntual, la convergencia uniforme y el análisis real.

Resultados y Conclusión

Aunque no hemos llevado a cabo una implementación formal de nuestro trabajo, hemos recibido comentarios positivos cuando se ha utilizado en un entorno informal. Después de completar nuestro ejemplo relacionado con el área de la circunferencia con el polígono en un lado, pudimos observar que el límite cuando n tiende a infinito, nuestro $\sin(\pi/n)/(\pi/n)$ termina siendo igual a $\pi = \pi$. Esto, últimamente lleva al límite cuando n tiende a infinito, que es $\cos(\pi/n) = 1$. Después de colaborar en grupo, logramos obtener una comprensión más clara de nuestros ejemplos. Con la guía de nuestros profesores, pudimos demostrar y graficar nuestras afirmaciones. La implementación informal parece prometedora, pero no está claro hasta que se realicen pruebas formales.

Hemos desarrollado un recurso para la lógica mediante sofismas. Hemos elaborado una variedad de ejemplos utilizando la aplicación de la convergencia puntual y uniforme para ayudarnos a demostrar nuestras afirmaciones sobre el área de el polígono. Como se mencionó anteriormente, en este sofisma presentamos errores lógicos y conceptuales, y están destinados a fomentar la colaboración, el pensamiento crítico y la autorreflexión en los demás. En general, abordar el teorema de convergencia uniforme y puntual nos permite pensar críticamente, debatir y colaborar entre nosotros. Esperamos implementar nuestros ejemplos en un entorno formal de pruebas en el futuro para obtener resultados claros y, posteriormente, crear ejemplos más abstractos que mejoren nuestra comprensión del material.

Convergencia de Secuencias de Funciones

Primero introducimos dos conceptos de convergencia de una secuencia de funciones.

Convergencia Puntual

Definición: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n una función definida en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. La secuencia de funciones (f_n) converge puntualmente en A a una función $f : A \to \mathbb{R}$ si, para todo $x \in A$, la secuencia de números reales $f_n(x)$ converge a $f(x)$.
Es decir, para todo $x \in A$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Convergencia Uniforme

Definición: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n una función definida en un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. La secuencia (f_n) de funciones converge uniformemente en A a una función $f : A \to \mathbb{R}$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. siempre que para todo $n \geq N$ and $x \in A$.

En este caso, escribimos $f_n \to f$ uniformemente en A.

Ejemplo

En la Antigua Grecia el matemático Arquímedes buscaba calcular el área de una circunferencia unitaria a partir del área de polígonos inscriptos en ella. En la actualidad, con las herramientas conocidas de trigonometría, es relativamente sencillo probar que el área de un polígono de lado n es determinado por la función

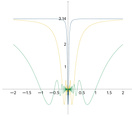
$$A(n) = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Notar que cuando n tiende a ∞, se tiene que

- $\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \quad \pi = \pi.$
- $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1.$

Finalmente, se tiene que $A(n)$ tiene a π cuando n tiende a ∞. Por tanto, el área de una cicunferencia de radio 1 es igual a π. ¿Será que siempre se puede usar una estrategia similar? ¿Se podrá usar convergencia de límites para probar el valor de un área dada? Para esto veamos el siguiente ejemplo.

Nuestro objetivo es investigar gráficamente cómo la secuencia de funciones $f_n(x)$ converge, y si es así, a qué función límite $f(x)$. Consideremos la secuencia de funciones $f_n(x) = nx \sin\left(\frac{\pi}{nx}\right) \cos\left(\frac{\pi}{nx}\right)$ sobre $\mathbb{R}$. Podemos ver que a medida que n tiende a infinito, la función límite es f(x) = π.



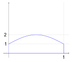
Sofismas

Desarrollamos este ejemplo utilizando errores en la comprensión lógica o conceptual. El propósito del ejemplo es promover la discusión, fomentar la autorreflexión y alentar el pensamiento crítico y la colaboración. Procedemos presentando una pregunta simple basada en el tema del área.

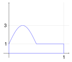
¿Cuál es el área de un cuadrado con lados que miden 1 unidad cada uno?

Generamos el área del cuadrado utilizando la siguiente función a trozos.

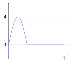
$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(n * \pi x), 0 \leq x \leq 1/n \\ 1, 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$



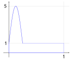
$f_1(x) = \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1.$



$$f_2(x) = \begin{cases} 2\sin(2 * \pi x), 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1, 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

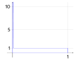


$$f_3(x) = \begin{cases} 3\sin(3 * \pi x), 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1, 1/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



$$f_4(x) = \begin{cases} 4\sin(4 * \pi x), 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1, 1/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vemos que a medida que $n \to \infty$, las funciones tienden al cuadrado del área 1:



El área de este cuadrado también se puede calcular mediante:

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} n \sin(n\pi x)\, dx + \int_{1/n}^1 1\, dx$$

Evaluamos la primera integral utilizando sustitución.

$$\int_0^{1/n} n\sin(n\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi}$$

A continuación, es fácil ver que

$$\int_{1/n}^1 1\, dx = 1 - \frac{1}{n}$$

Así que, al tomar el límite cuando n → ∞ :

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} + 1 - \frac{1}{n} = \frac{2}{\pi} + 1.$$

Así que el área de un cuadrado con lados de longitud 1 es igual a

$$\frac{2}{\pi} + 1$$

Análisis

Debe ser evidente que un cuadrado con lados de longitud igual a 1 tiene un área igual a 1. Sin embargo, acabamos de demostrar que este no es el caso. ¿Cómo puede ser esto? Comenzamos nuestra explicación con la intercambiabilidad de las operaciones de límite e integral.

Límite de la Integral vs Integral del Límite

De nuestra evaluación anterior, afirmamos que:

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{2}{\pi} + 1.$$

Sin embargo, ¿y si en su lugar usamos la siguiente ecuación?

$$A = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Evaluando,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Tenemos que en el intervalo, $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Como $n \to \infty$, vemos que el intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ converge al punto en x = 0,

$$\lim_{n\to 0} n\sin(n\pi x) = 0 sin(0\pi x) = 0$$

Por lo tanto,

$$A = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

¿Por qué entonces es que,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$$

Discusión

Para encontrar el área de nuestra función límite propuesta, el cuadrado de lados de longitud uno, utilizamos la idea de la integral que calcula el área debajo de la curva. La función límite de nuestra secuencia de funciones es el cuadrado de lados de longitud uno, por eso, cuando tomamos la integral, encontramos que el área es igual a 1. Pasar el límite fuera de la integral y luego calcularlo parece que daría una respuesta equivalente. Sin embargo, según el teorema discutido en la referencia (Murthy Gavosto, 2023, p. 141), solo cuando nuestra secuencia de funciones converge uniformemente, en un intervalo [a,b], a la función límite es que obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)$$

Con nuestra función, vemos que no converge uniformemente en $\mathbb{R}$ ya que podemos observar en la parte inicial del gráfico que nuestra función se dispara a valores grandes, lo que hace que no existan valores pequeños de ϵ que mantengan nuestra secuencia de funciones extremadamente cerca de la función límite. Nuestra función sí converge puntualmente, sin embargo, esto no es una condición tan fuerte como la convergencia uniforme y, por lo tanto, no nos da la intercambiabilidad de las operaciones de límite e integral. Así que podemos concluir de manera segura una vez más que el área de un cuadrado con lados de longitud uno tiene efectivamente un área de 1.

References

- Murthy, S., Gavosto, E. (2023). Three classical theorems on interchanging limits with integrals in calculus. Undergraduate Research Journal, 6(15), 137–151. University of California, Riverside.

Producción de póster

Sophisms and Erroneous Resolutions

Adriana Enriquez, Alexandra Castelazo, Ooi Yiwen Fayre-Ella,
Yohali Silva Hernández, Solange Pitronaci and Luciana Sagari
Advisors: Fernando López-García and Roberto Ben
Mathematics and Statistics Department - California State Polytechnic University Pomona
Area de Matemática - Instituto del Desarrollo Humano - Universidad Nacional de Gral. Sarmiento

Introduction

Este trabajo surge de una experiencia de educación matemática multicultural en la que participaron en forma conjunta estudiantes de California State Polytechnic University, Pomona (CPP) y de la Universidad Nacional de General Sarmiento, a través de reuniones virtuales en las que se discutieron algunos conceptos vinculados al análisis matemático.

Trabajamos la temática "convergencia de sucesiones de números reales y de funciones (convergencia puntual y uniforme)" abordándola desde una perspectiva de intercambio y trabajo grupal en la que los y las estudiantes de ambas universidades tuvieron una participación activa a través de la resolución de problemas. Esta iniciativa tuvo por objetivos principales vincular y tender lazos entre los y las estudiantes participantes de Estados Unidos y Argentina, resignificar y revalorar los conocimientos del inglés y el castellano tanto desde un punto de vista netamente lingüístico como desde un punto de vista matemático, y visibilizar la diversidad y las diferencias culturales.

La experiencia transcurrió a lo largo de tres meses, en encuentros virtuales sincrónicos, con frecuencia semanal, de aproximadamente una hora cada uno.

Background and Goals

The Global Classroom between Cal Poly Pomona and UNGS was created to provoke discussion and collaboration among students. Current methods for education in math emphasize correctly worked examples, while disregarding, and sometimes punishing, mistakes. *This is known as positive knowledge. Negative knowledge*, the opposite, is the use of mistakes to educate. With the use of Negative knowledge, we think critically about common sophisms and erroneous resolutions in mathematics, which present common errors while developing self-reflection and collaboration. We hope this may help to remedy the positive knowledge bias and aid in development of a well-rounded curriculum.

Results and Conclusion

- Develop and discuss popular sophisms and erroneous resolutions in mathematics.
- Encourage collaboration, critical thinking, and self-reflection within our global classroom through the analysis of the sophisms presented in this poster.
- Discuss and think critically about the truth that the presented sophisms fail to convey, flowing in the same manner as a proof.
- Self-reflect and provide feedback on the global classroom setting through use of student testimonies.

Student Testimonies / Testimonios de Estudiantes

Adriana Enriquez:

Mi experiencia en esta colaboración en análisis ha sido una de las mejores en mis cuatro años en CPP. Aunque hablo los dos idiomas, los términos matemáticos fueron difíciles de entender, pero estoy agradecida de aprender nuevos términos en español. Trabajando en análisis con mis compañeros me ha ayudado a entender más matemática y cómo se puede comunicar alrededor del mundo.

Alexandra Castelazo:

Despite the language barrier, the communication between us CPP students and the UNGS students solidified my understanding of the topics we covered because our discussions were detailed and well thought-out.

Solange Pitronaci:

Haber realizado este taller me demostró que la matemática es, verdaderamente, un lenguaje universal: a pesar de hablar diferentes idiomas y provenir de culturas distintas, logramos entendernos, colaborar y construir este afiche juntos.

Ooi Yiwen Fayre-Ella:

I had a wonderful time learning and discussing analysis and connecting with another culture through mathematics with my classmates from CPP and UNGS. The language barrier along with the mathematical discussions posed an even bigger challenge since we would be discussing concepts that were new to us. With the help of our professor and each other, we managed to understand the concepts and start applying the concepts we learned to the sophisms.

Yohali Silva Hernández:

My experience in this course was wonderful. There were a few obstacles I faced during my time in this course however it was a wonderful learning experience for me nonetheless.

Luciana Sagari:

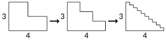
La experiencia ha sido muy linda y enriquecedora. Compartir un aula de trabajo con distintas culturas es un desafío. Se requiere conocimiento del área, conocimiento en el idioma y en recursos tecnológicos que ayuden a acortar las distancias y simplificar el trabajo.

Sophisms

We develop these sophisms using errors in logical or conceptual understanding. The purpose of these sophisms is to promote discussion, foster self-reflection, and encourage critical thinking and collaboration.

Un sofisma: $5 = 7$

El argumento engañoso de este sofisma es el siguiente: considere una forma de escalera donde la base es de 4 unidades y la altura es de 3 unidades. Como se puede observar, en todos los estadios la suma de las bases de los escalones suma 4 y la suma de las alturas de los escalones suma 3. Esto nos da un total de 7 unidades para la longitud de la escalera, con un límite de igual magnitud.



Por otro lado, a medida que aumenta el número de pasos, la gráfica converge a la de un triángulo con una hipotenusa que mide 5; demostrando así que 7 es igual a 5.

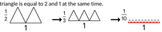
¿Puede encontrar el error en el argumento utilizado en el primer sofisma?

En el siguiente código QR va a encontrar un video que presenta el sofisma descripto arriba:

Another sophism: $2 = 1$

For the deceiving argument in this case, consider an equilateral triangle where the length of each side equals 1.

Then, create a sequence of zig-zag curves as it is shown in the picture and the QR code below. Notice that the length of each zig-zag curve is 2. Thus, the length of its limit is also 2. Therefore, the base of the triangle is equal to 2 and 1 at the same time.



What is the problem with this argument? Are these two sophisms related?

This sophism was taken from the second reference, page 30.

Arc-Length vs Limit

Indeed, as you might have seen, the previous sophisms relate arc-length with pointwise and uniform convergence of sequences of functions. Both sophisms have the same erroneous argument since both assume that the limit of the arc-length is the arc length of the limit. To formalize this observation, given a sequence of functions $(f_n)_{n\geq 1}$, each one with arc length L_n, that converges pointwise to f, we cannot conclude that L_n converges to the arc length of f.

Now, is it possible to require a stronger notion of convergence on the sequence of functions $(f_n)_{n\geq 1}$ that implies that the sequence of arc-length L_n converges to the arc-length L of the function f?

Arc-Length Formula

Let us review the formula to calculate the arc-length of a smooth enough function $g(x)$ on the interval $[a, b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Strong Convergency & Preservation of Arc-Length

The sophisms assume that the limit of a sequence of functions preserves the arc length, and this assumption is **false**. Now, using the formula to calculate the arc-length of smooth enough functions, and assuming that $f_n'(x)$ are continuous on $[a; b]$ and that the sequence converge uniformly to $f'(x)$, we can conclude that

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt{1 + \left(f_n'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = L.$$

References

1. Abbott, S. (2015) *Understanding Analysis*
2. Klymchuk, S. Staples, S. (2013). *Paradoxes and Sophisms in Calculus.* Mathematical Association of America, Inc.

Pictures and Acknowledgements

We thank Prof. Greisy Winicki-Landman and the Math Education group for supporting this project. Also, we thank graduate student Edgar Rojas for his collaboration in the classroom discussions.

13^{ra} conferencia anual estudiantil Research, Scholarship & Creative Activities

Presentación de pósters en Cal Poly-Pomona en Marzo

Sofismas en el Día Pi en la UNGS

Día Pi en la UNGS

Celebración anual del Día Internacional de la Matemática

- Fines de marzo, desde 2023.
- Asisten más de mil estudiantes de secundaria.

Taller en el Día Pi en la UNGS

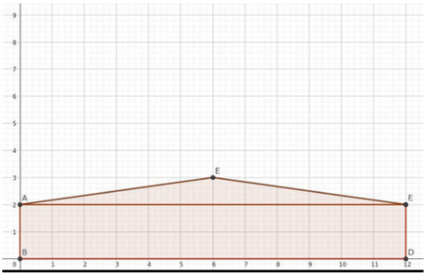
Un viaje al infinito

- Talleristas:
  Solange Pitronaci, Luciana Sagari y Fabricio Quinteros.
- Coordinación: Roberto Ben.

Un viaje al infinito

- Duración: una hora.
- 40 estudiantes de 5° y 6° año del colegio Monseñor Terrero de San Miguel.
- Resolución de actividades.
- Relato del taller internacional.

Un viaje al infinito - Sofisma de la casa

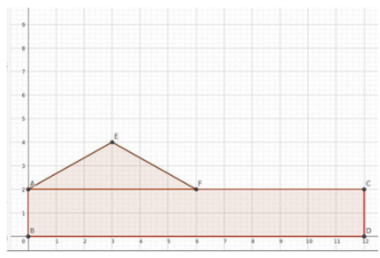
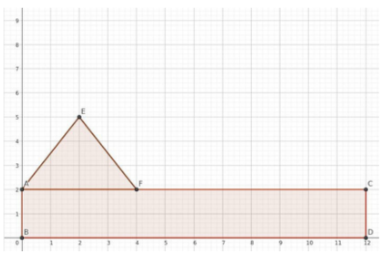


Un viaje al infinito

TARJETA 1

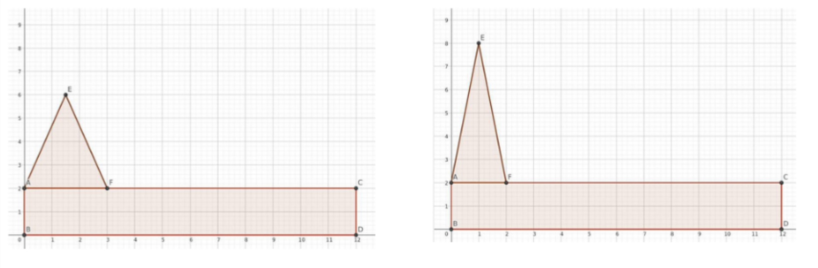
La figura de la izquierda está compuesta por un triángulo, AEF, y un rectángulo, ABDE, que comparten solo un lado, AE. Por lo que el área de esta figura es igual a la suma de las áreas del triángulo y el rectángulo.

- Triángulo de base 12 y altura 1

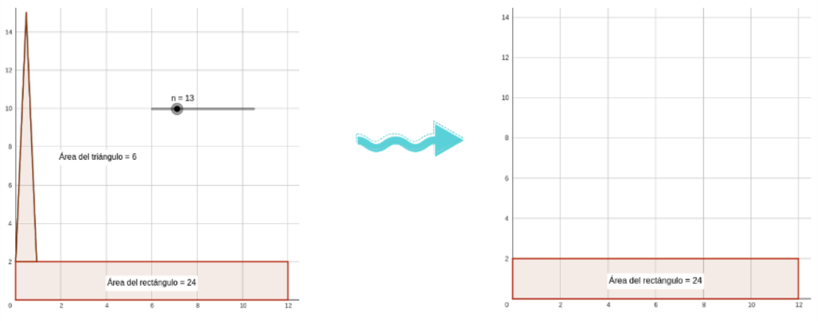
- Triángulo de base 12 y altura 1
- Triángulo de base 6 y altura 2
- Triángulo de base 4 y altura 3

Un viaje al infinito - Sofisma de la casa

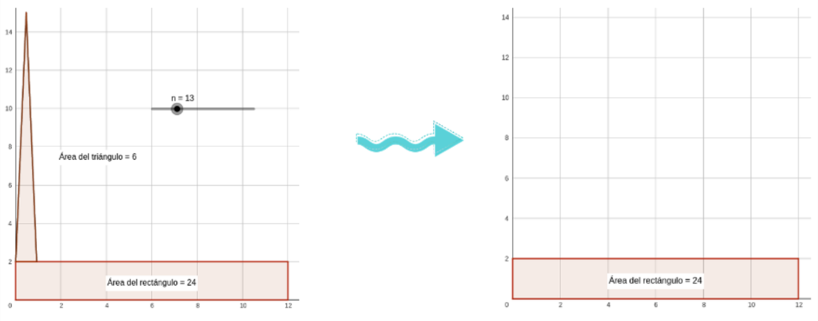


- Triángulo de base 12 y altura 1
- Triángulo de base 6 y altura 2
- Triángulo de base 4 y altura 3
- Triángulo de base 3 y altura 4
- Triángulo de base 2 y altura 6

Un viaje al infinito - Sofisma de la casa

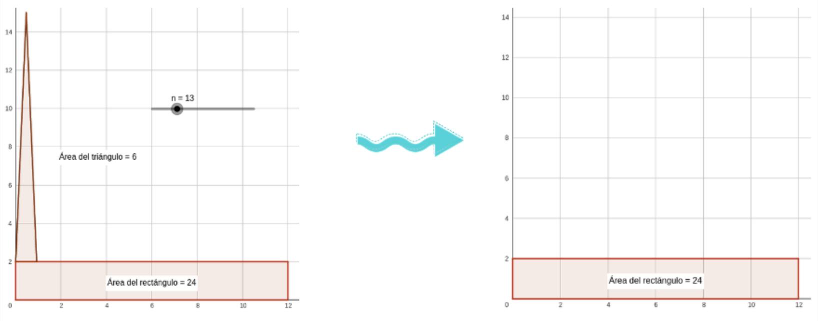


- ¿Qué pasa en el infinito?



- ¿Qué pasa en el infinito?
- El área de la "figura límite" no es igual al límite de las áreas de la sucesión de figuras.

Un viaje al infinito - Sofisma de la casa

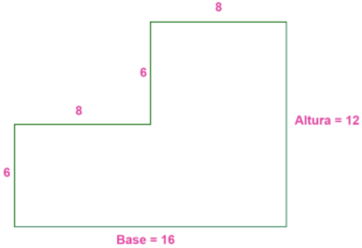


- ¿Qué pasa en el infinito?
- El área de la "figura límite" no es igual al límite de las áreas de la sucesión de figuras.
- El límite de esta sucesión de funciones no preserva el área:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{12} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{12} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

La última igualdad vale si la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente.

Un viaje al infinito - Sofisma de la escalera



Suma de los anchos de los escalones

$8 + 8 = 16$

Suma de los altos de los escalones

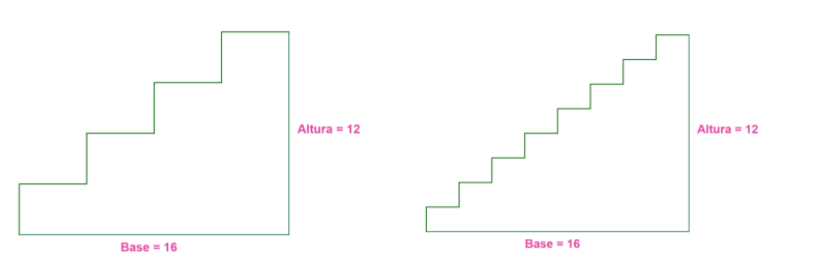
$6 + 6 = 12$

Suma de las longitudes de los escalones: *16 + 12 = 28*

La suma de las longitudes de los escalones coincide con la suma de la base **(16)** y la altura **(12)**

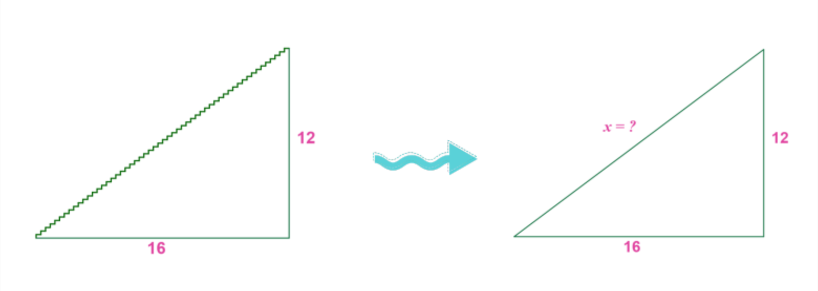
- Escalera de 2 escalones

Un viaje al infinito - Sofisma de la escalera



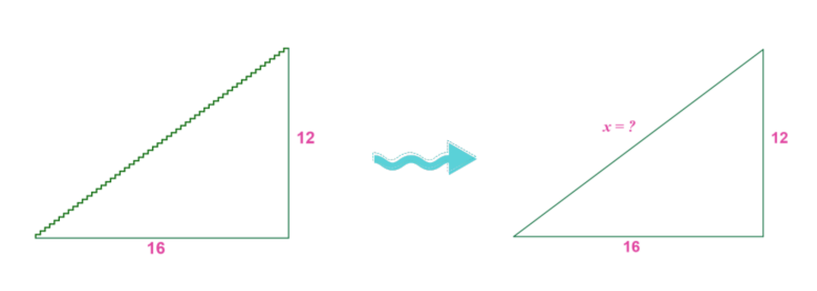
- Escalera de 2 escalones
- Escalera de 4 y 8 escalones

Un viaje al infinito - Sofisma de la escalera



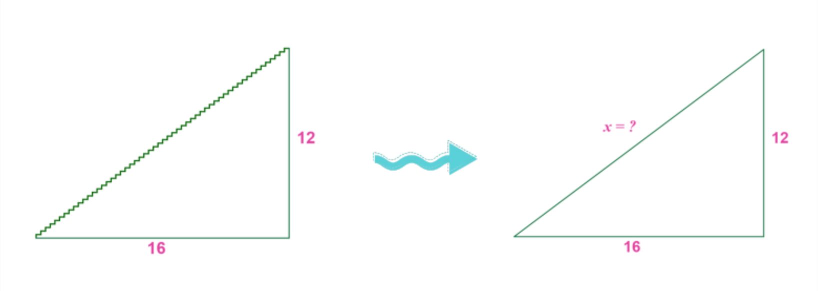
- ¿qué pasa en el infinito? (Teorepma de Pitágoras)

Un viaje al infinito - Sofisma de la escalera



- ¿qué pasa en el infinito? (Teorepma de Pitágoras)
- La longitud de la “escalera límite” no es igual al límite de las longitudes de la sucesión de escalera.

Un viaje al infinito - Sofisma de la escalera



- ¿qué pasa en el infinito? (Teorepma de Pitágoras)
- La longitud de la "escalera límite" no es igual al límite de las longitudes de la sucesión de escalera.
- El límite de esta sucesión de curvas no preserva la longitud de arco:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt{1+(f_n{}'(x))^2}dx \neq \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

La última igualdad vale si la sucesión $f_n{}'(x)$ converge uniformemente a $f'(x)$.

Algunas resoluciones

Respondan:

i. ¿Se sigue cumpliendo la igualdad en todos los casos? Si

ii. ¿Qué creen que ocurrirá si seguimos agregando más escalones?

Las escaleras se harán infinitas cumpliendo con la igualdad

i) Cada vez se parecerá más a un triángulo

Tarjeta 3

i) Si, vale lo mismo porque los valores son los mismos

ii) Debería medir 20

iii) El error está en asumir que los valores siempre serán iguales.

Conclusiones

Conclusiones

- Adaptar ideas avanzadas del análisis para transmitirlas a estudiantes de secundaria es posible.
- Los sofismas y las paradojas son un recurso didáctico valioso [3].
- Son herramientas esenciales del pensamiento matemático [1, 2, 4].
- Además son adaptables para divulagación y despiertan la curiosidad [3].

Participantes

Estudiantes UNGS

- Solange Pitronaci
- Luciana Sagari
- Fabricio Quinteros

Docentes

- Roberto Ben (UNGS)
- Fernando López García (CPP)

Estudiantes Cal Poly Pomona

- Adriana Enriquez
- Alexandra Castelazo
- Ooi Yiwen Fayre-Ella
- Yohali Silva Hernández
- Luis Aguilar
- Ariana Escalante
- Ben Le

Referencias

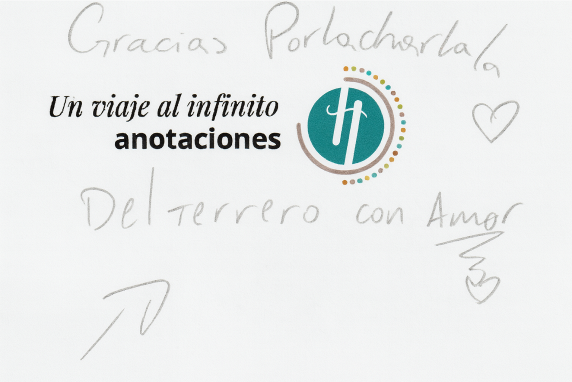
- W. Byers. *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*. Princeton University Press, 2007.
- I. Kleiner and N. Movshovitz-Hadar. The Role of Paradoxes in the Evolution of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 101(10):963–974, 1994.
- S. Klymchuk and S. Staples. *Paradoxes and Sophisms in Calculus*. Mathematical Association of America, Classroom Resource Materials, 2013.
- I. Lakatos. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, 1976.

Recursos en GeoGebra

Sofisma de la casa

Sofisma de la escalera

¡Muchas Gracias!



Contacto: fabricio.quinteros4@gmail.com