

III Encuentro Conjunto

RSME-UMA 2025 Bariloche, AR



FotoGebra Discovery

Esta presentación explora la fusión de fotografía, matemáticas y tecnología.

Proponemos usar GeoGebra Discovery en el concurso FotoGebra.

Esto mejora la enseñanza STEAM y el razonamiento automático.



Karina A. Rizzo



Tomás Recio



$$\Delta f + 1 \left| \frac{4^n}{1^n - 14^n} \right. = 1^n - 14^n$$



Orígenes y Evolución de FotoGebra



1991

La profesora K. Rizzo inicia la práctica docente. Explora la relación entre matemáticas e imágenes.

1

2

2016

Nace FotoGebra, fusionando fotografía, matemáticas y GeoGebra.
Se convierte en un concurso internacional abierto al público.

Actualidad

FotoGebra fomenta el pensamiento matemático. Promueve la modelización y exploración visual.

3



GeoGebra Discovery: Geometría Dinámica y Razonamiento Automático



<https://autgeo.online/geogebra-discovery/>
<https://github.com/kovzol/geogebra/releases>

Descubrimiento de Propiedades



El comando Relación(h,i) (Relation) encuentra propiedades geométricas entre dos elementos..

<https://autgeo.online/ag/automated-geometer.html?offline=1>

Verificación de Propiedades



Comprueba (Prove) o DemuestraDetalles(ProveDetails) corroboran propiedades. Confirman si se verifican con generalidad. VerDemo (ShowProof) muestra la prueba y una medida de la dificultad.



Descubre teoremas

El comando EcuaciónLugar(LocusEquation) propone hipótesis complementarias para que sea cierta una tesis formulada por el usuario.



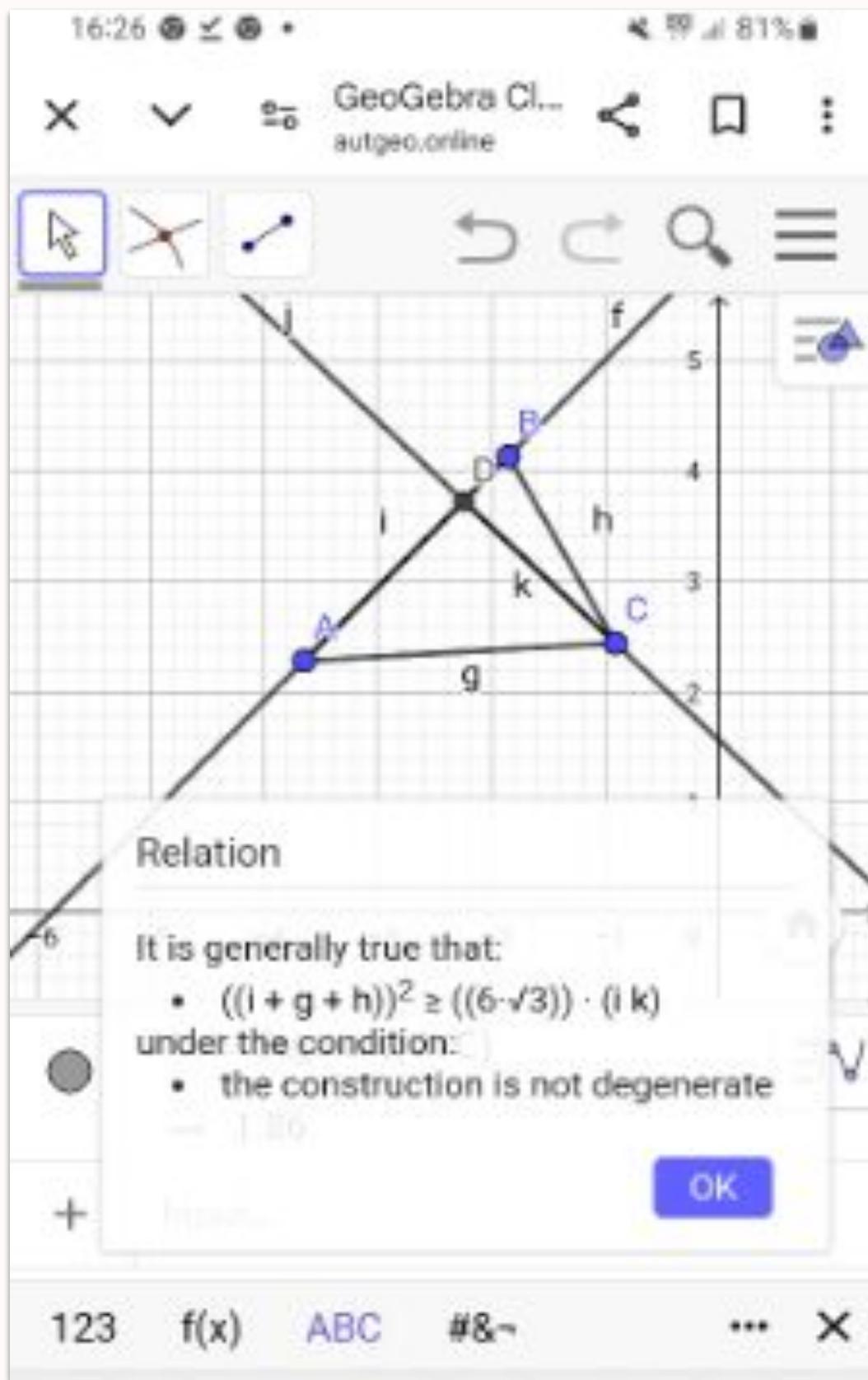
GeoGebra Discovery: Razonamiento Automático

Matemáticamente riguroso

- Traduce en términos de ecuaciones polinomiales los pasos de la construcción y la tesis.
- Utiliza generalmente geometría algebraica compleja computacional (bases de Gröbner) para obtener o confirmar propiedades, salvo en el caso de desigualdades, donde usa algoritmos de geometría real, de eliminación de cuantificadores.
- Utiliza los sistemas de álgebra computacional Giac y/o Tarski incluidos en GeoGebra Discovery

Kovács, Z.; Recio, T.; Vélez, M.P.: "Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for?" In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. van Vaerenbergh (eds): Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning. Series: Mathematics Education in the Digital Era, Springer, 2022, pp. 23-44. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2





Relación obtenida por
GeoGebra Discovery,
versión
<https://autgeo.online>,
desde un móvil,
encontrando
automáticamente la
desigualdad existente entre
el perímetro ($i+g+h$) y el
área ($i*k/2$) de un triángulo



GeoGebra Discovery 5

Algebra

- A = (-1.04, 0.38)
- B = (5.26, 0.9)
- C₁ = Midpoint of A, B
- c = Circle through B with center C₁
- C = Point on c
- f = Segment C, A
- g = Segment C, B
- h = Segment B, A
- eq1 = LocusEquation(2g f \perp h², C)

Graphics

Input: eq1

GeoGebra Discovery, muestra (con EcuaciónLugar) los puntos (rojos) donde habría que colocar C para que se verifique el teorema: en un triángulo rectángulo en C, el doble del producto de los catetos es el cuadrado de la hipotenusa.

Conjetura: ¿ha de ser isósceles?



Ventajas de GeoGebra Discovery

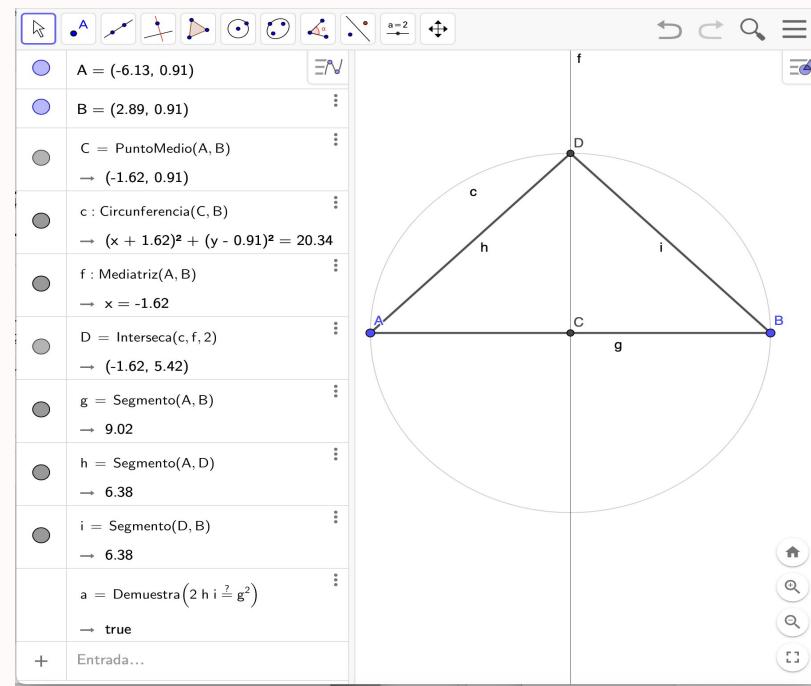
Facilita el Descubrimiento

Ayuda a encontrar propiedades geométricas inesperadas.

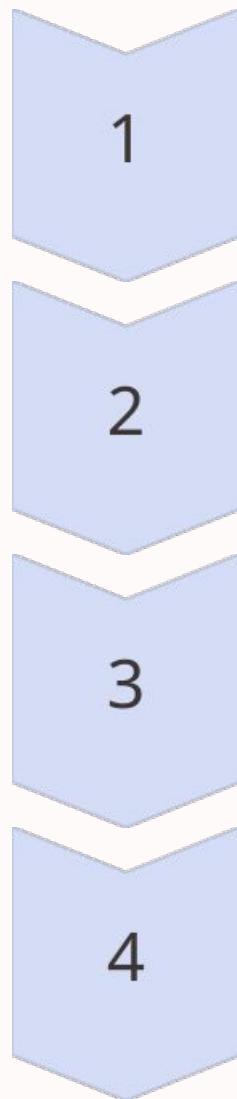
Anima a los usuarios a cuestionar el porqué.

Potencia la mirada

Enriquece la visión del usuario con una "realidad aumentada". No elimina, sino que incrementa el conocimiento (info extra)



Aplicación en FotoGebra



Captura de Imagen

Los participantes fotografían el entorno.

Modeliza

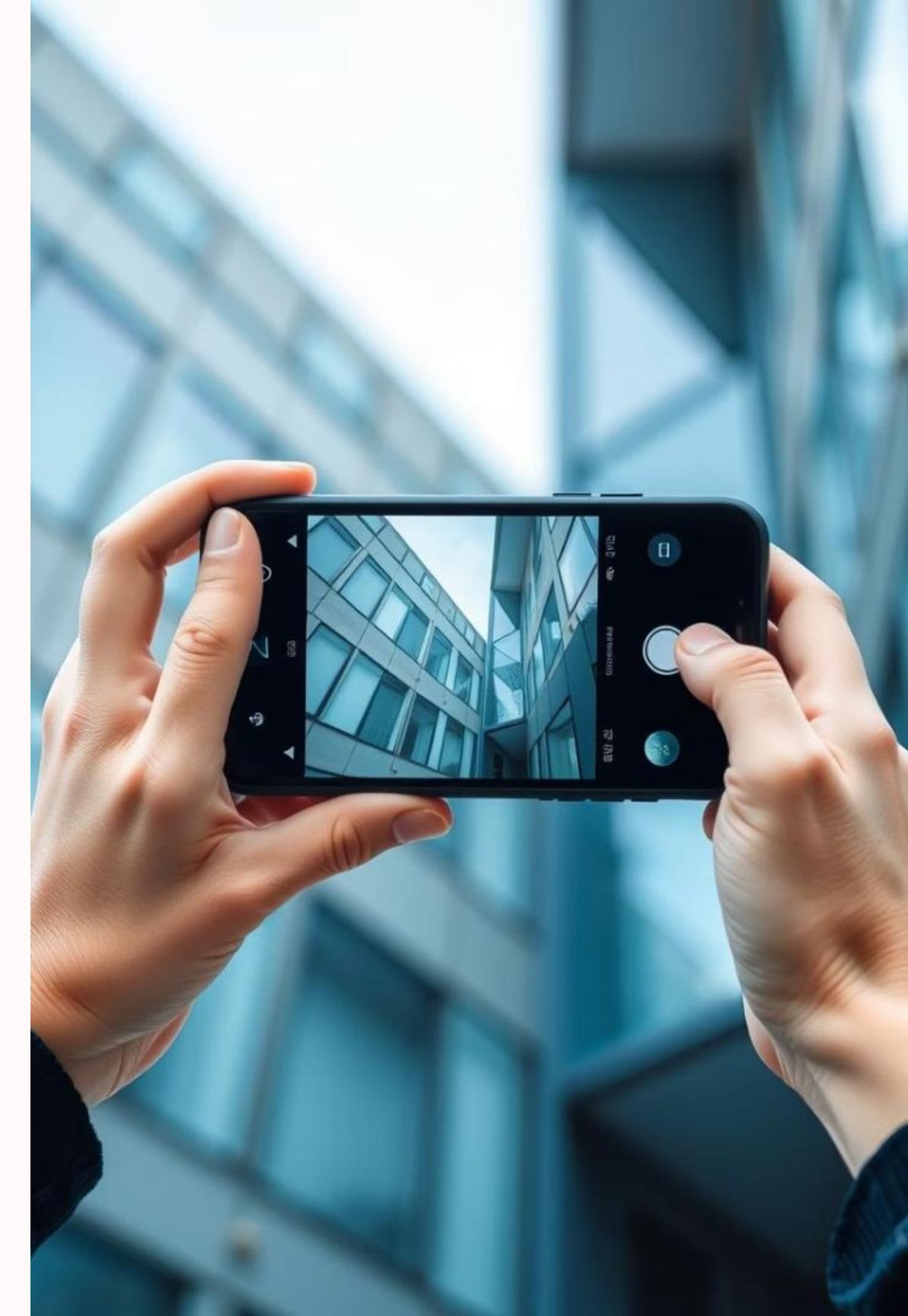
Ajustan una construcción a la imagen.

Uso de Discovery

Preguntan a GeoGebra Discovery por propiedades.

Interpretación

Analizan los resultados obtenidos.



Ejemplo Práctico

<https://autgeo.online/geogebra-discovery/>

- Tomar una hoja de papel
- Hacer una fotografía
- Insertar en autgeo (INPUT + IMAGE)
- Realizar una construcción
- Descubrir propiedades



A screenshot of the Geogebra web application interface. The top navigation bar shows the URL "autgeo.online/geogebra-discovery/". Below the toolbar, there is a grid-based workspace with a coordinate system ranging from -14 to 14 on both the x and y axes. The bottom of the screen features a numeric keypad and function keys for inputting mathematical expressions and numbers.

A GeoGebra construction showing a vertical line h and a horizontal line i intersecting at point F . A red line segment k is perpendicular to line i at point F . A shaded gray rectangle is defined by vertices C, D, G, H . Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ are marked. A URL <https://es.wikipedia.org/wiki/Formatounderscoredeunderscorepapel> is displayed.

Relation:

k and l are perpendicular (checked numerically)

It is generally true that:

- $\bullet k = (1/2 \cdot \sqrt{2}) \cdot l$

under the condition:

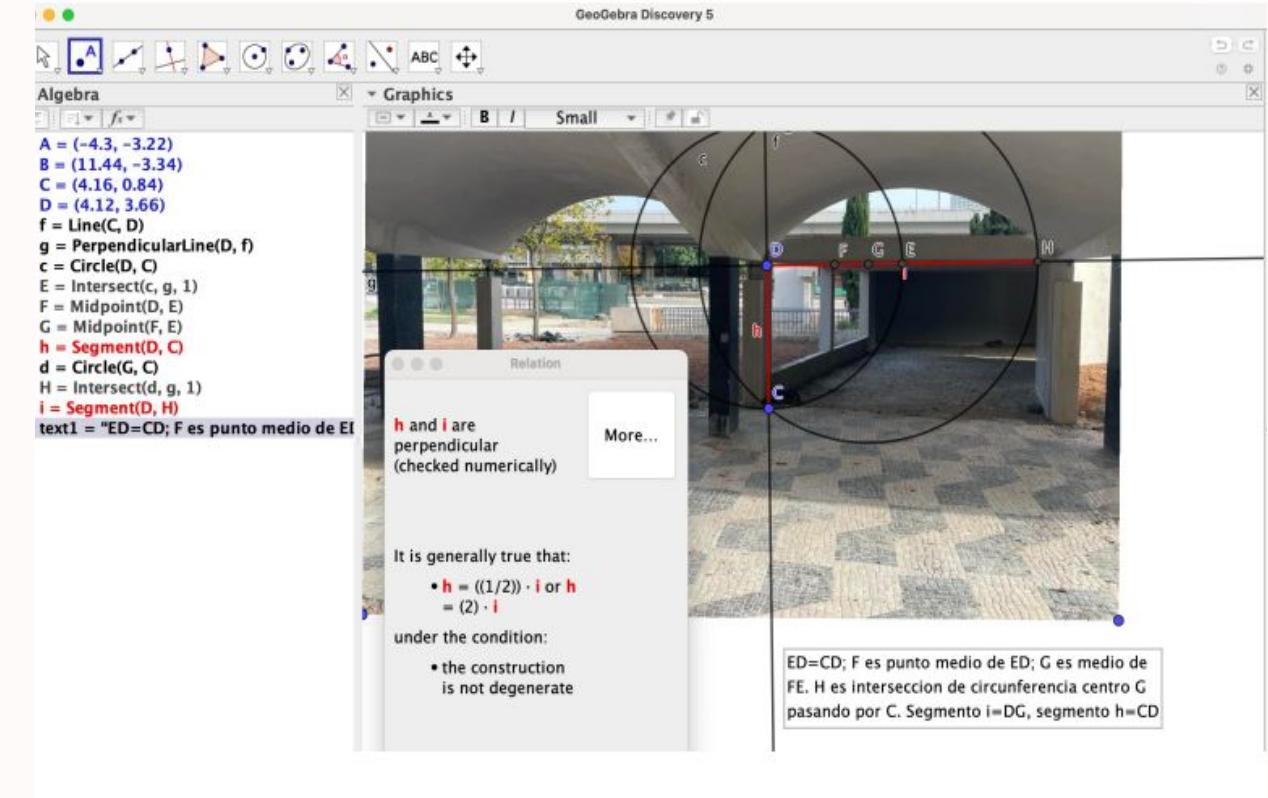
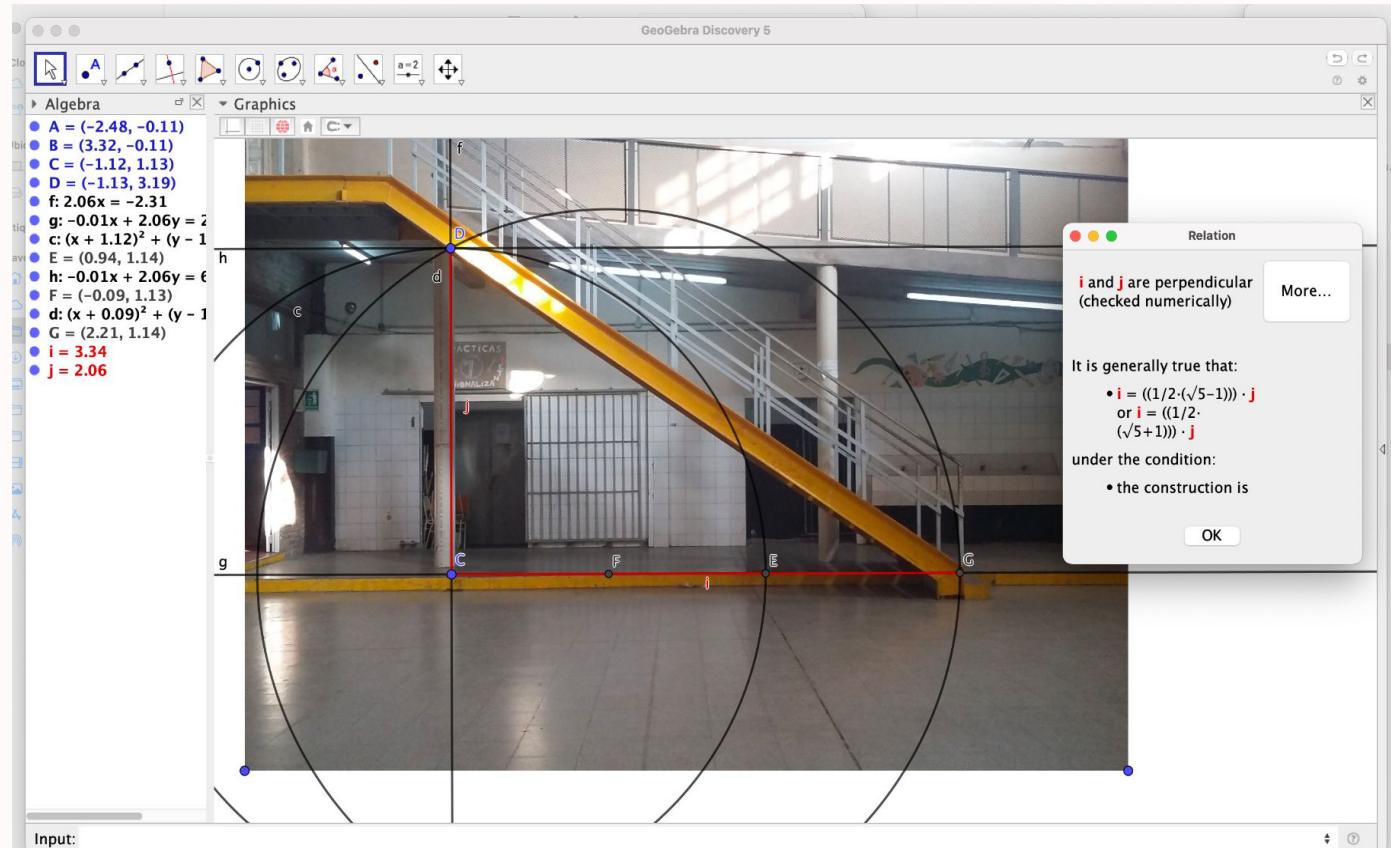
- \bullet the construction is not degenerate

OK X

<https://autgeo.online/geogebra-discovery/>



Ejemplos Prácticos



Descubre la relación entre los catetos de este triángulo, formado por una columna, base y escalera.

GeoGebra Discovery expresa la ratio existente entre el largo y el alto del rectángulo entre columnas.

Ejemplos

U.N.
Comahue /
Instituto
Balseiro

GeoGebra Discovery 5

Vista Algebraica

- A = (-2.04, 1.68)
- B = (3.76, 1.68)
- C = (-0.47, 2.98)
- D = (0.98, 3)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por D perpendicular a f
- E = Punto medio de C, D
- c = Circunferencia que pasa por E con centro D
- h = Recta que pasa por E perpendicular a f
- d = Circunferencia que pasa por D con centro E
- G = Punto de intersección de d, h
- F = Punto de intersección de d, h
- e = Circunferencia que pasa por F con centro I
- H = Punto medio de D, E
- I = Punto medio de H, D
- k = Circunferencia que pasa por F con centro I
- J = Intersección de k, g
- i = Segmento [C, D]
- j = Segmento [D, J]

Vista Gráfica

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

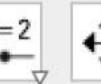
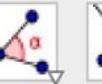
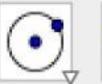
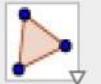
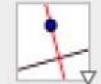
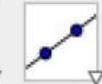
- $i = (2/3 \cdot \sqrt{6}) \cdot j$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

i y j son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más... OK Entrada:



Vista Algebraica



- A = (-1.4, -0.27)
- B = (4.4, -0.27)
- C = (-0.21, 2.73)
- D = (-0.22, 1.33)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por C perpendicular a f
- c = Circunferencia que pasa por D con centro C
- E = Intersección de c, g
- C' = Simétrico de C por E
- F = Punto medio de E, C'
- h = Recta que pasa por D paralela a g
- F' = Simétrico de F por C'
- i = Segmento [C, D]
- j = Segmento [C, F']



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $i = (2/5) \cdot j$

bajo la condición:

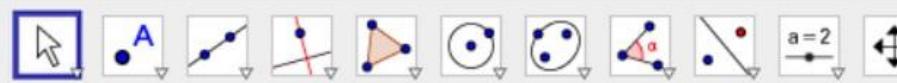
- la construcción no es degenerada

i y **j** son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

Vista Gráfica





Vista Algebraica

- A = (-1.4, -0.27)
- B = (4.4, -0.27)
- C = (-0.83, 4.25)
- D = (0.68, 4.19)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por C perpendicular a f
- c = Circunferencia que pasa por D con centro C
- E = Intersección de c, g
- C' = Simétrico de C por E
- d = Circunferencia que pasa por C' con centro D
- h = Recta que pasa por D paralela a f
- i = Recta que pasa por D paralela a g
- H = Intersección de d, i
- j = Segmento [C, D]
- k = Segmento [D, H]

Vista Gráfica



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $j = (1/5 \cdot \sqrt{5}) \cdot k$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

j y **k** son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK

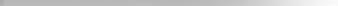
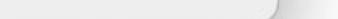
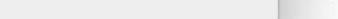
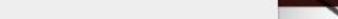
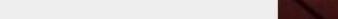
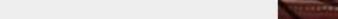
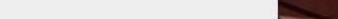
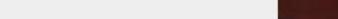
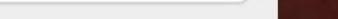
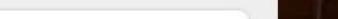
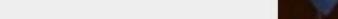
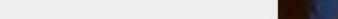
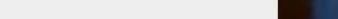
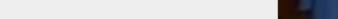
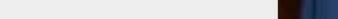
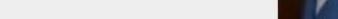
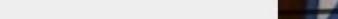
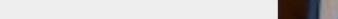
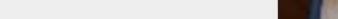
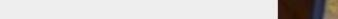
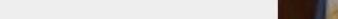
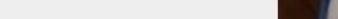
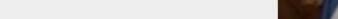
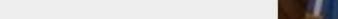
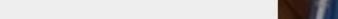
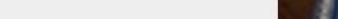
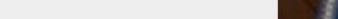
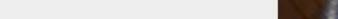
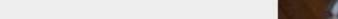
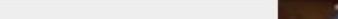
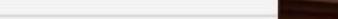
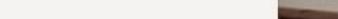
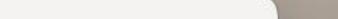
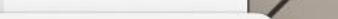
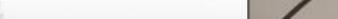
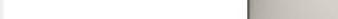


Vista Algebraica



- A = (-0.69, -0.9)
- B = (5.11, -0.9)
- C = (0.79, 0.65)
- D = (0.74, 2.57)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por C perpendicular a f
- c = Circunferencia que pasa por D con centro C
- E = Intersección de c, g
- F = Punto medio de C, E
- F' = Simétrico de F por E
- d = Circunferencia que pasa por F' con centro D
- h = Recta que pasa por D perpendicular a f
- G = Intersección de d, h
- i = Segmento [D, C]
- j = Segmento [D, G]

Vista Gráfica



Vista Algebraica

- A = (-0.83, 2.46)
- B = (4.97, 2.46)
- C = (2.48, 3.28)
- D = (2.48, 3.8)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por D perpendicular a f
- E = Punto medio de C, D
- c = Circunferencia que pasa por E con centro D
- F = Intersección de c, g
- h = Recta que pasa por E paralela a g
- i = Recta que pasa por F perpendicular a g
- G = Intersección de h, i
- d = Circunferencia que pasa por G con centro D
- H = Intersección de d, g
- j = Segmento [D, H]
- k = Segmento [D, C]
- I = (1.29, 3.83)
- J = (1.29, 4.05)
- l = Recta J, I
- m = Recta que pasa por I perpendicular a l
- n = Recta que pasa por l perpendicular a m
- e = Circunferencia que pasa por J con centro I
- K = Intersección de e, m
- L = Punto medio de I, K
- p = Circunferencia que pasa por J con centro L
- M = Intersección de p, m
- q = Segmento [J, I]
- r = Segmento [I, M]

Vista Gráfica

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $q = ((1/2 \cdot (\sqrt{5}-1)) \cdot r) \text{ o } q = ((1/2 \cdot (\sqrt{5}+1)) \cdot r)$

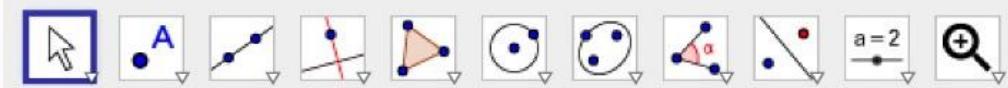
bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

q y **r** son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK



Vista Algebraica



- A = (-0.84, 2.46)
- B = (4.96, 2.46)
- C = (2.48, 3.28)
- D = (2.48, 3.8)
- f = Recta C, D
- g = Recta que pasa por D perpendicular a f
- E = Punto medio de C, D
- c = Circunferencia que pasa por E con centro D
- F = Intersección de c, g
- h = Recta que pasa por E paralela a g
- i = Recta que pasa por F perpendicular a g
- G = Intersección de h, i
- d = Circunferencia que pasa por G con centro D
- H = Intersección de d, g
- j = Segmento [D, H]
- k = Segmento [D, C]

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $j = (1/2 \cdot \sqrt{2}) \cdot k$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

j y **k** son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK

Vista Gráfica



f

i



Imagen imagen1



Vista Algebraica

f_x

- $A = (-1.4, -0.27)$
- $B = (4.4, -0.27)$
- $C = (2.35, 2.47)$
- $D = (2.33, 1.71)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } D \text{ perpendicular a } f$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } C \text{ con centro}$
- $E = \text{Intersección de } c, g$
- $D' = \text{Simétrico de } D \text{ por } E$
- $E' = \text{Simétrico de } E \text{ por } D'$
- $D'' = \text{Simétrico de } D' \text{ por } E'$
- $h = \text{Recta } D'', C$
- $i = \text{Segmento } [C, D]$
- $j = \text{Segmento } [C, D'']$
- $F = \text{Intersección de } g, h$
- $k = \text{Segmento } [D'', D]$
- $G = \text{Punto sobre } k$
- $l = \text{Segmento } [G, C]$



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

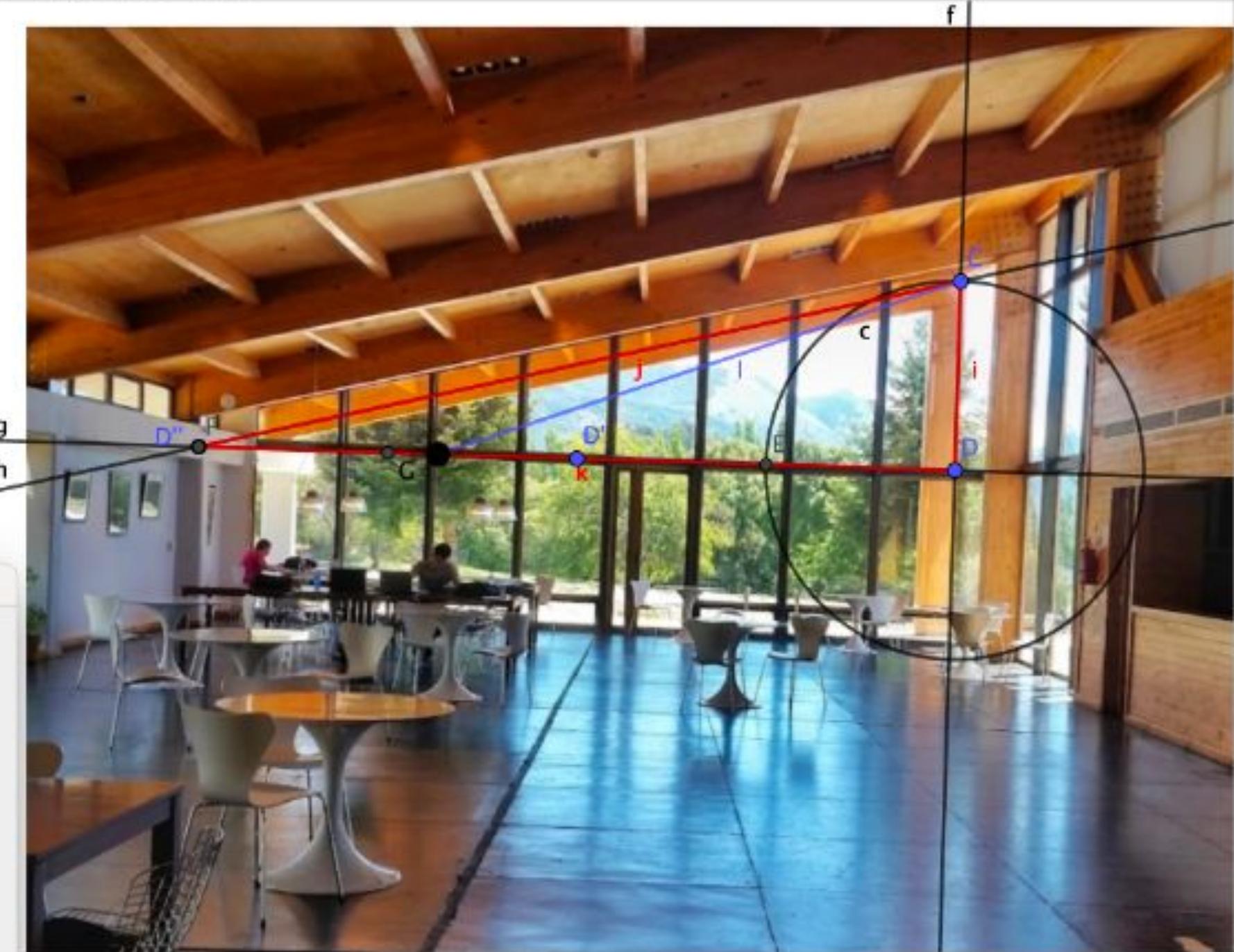
- $\bullet i \leq l \leq ((\sqrt{17}) \cdot i)$

bajo la condición:

- \bullet la construcción no es degenerada

OK

Vista Gráfica



Impacto en la divulgación: paseos matemáticos con FotoGebra Discovery y MathCityMap

<https://mathcitymap.eu/es/>

Utilización de las herramientas de razonamiento automático de GeoGebra Discovery para realizar sobre fotografías tomadas por los paseantes, tareas matemáticas propuestas a lo largo de paseos matemáticos desarrollados y efectuados con el celular, vía MathCityMap



Ariño-Morera, B.; Martínez-Zarzuelo, A.; Lázaro del Pozo, C.; Recio, T. (2024): "Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta." Boletín de la Soc. Puig Adam de Profesores de Matemáticas, 117, abril 2024, pp. 19-38.
<https://www.ucm.es/sociedadpuigadam/file/boletin-117-de-soc-puig-adam>



Impacto en la Divulgación Enseñanza STEAM



Enfoque Interdisciplinario

Conecta matemáticas con arte, arquitectura, física e ingeniería. Fomenta una visión integral.

Pensamiento Crítico

Motiva a justificar propiedades geométricas. Incrementa la construcción de conocimiento.

Inteligencia Artificial

Utiliza IA simbólica y exacta. Facilita el descubrimiento de propiedades.



Conclusiones

Próximos Pasos



Innovación

FotoGebra Discovery puede revolucionar la divulgación/enseñanza de la matemática. Integra tecnología y creatividad.



Participación

Invitar a estudiantes y público en general a explorar la realidad matemáticamente. Fomentar la observación matemática del mundo.

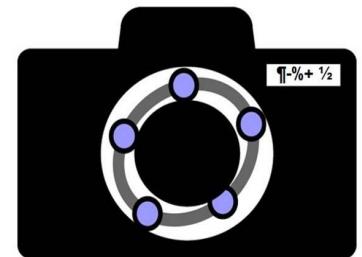


Crecimiento

Esperamos expandir el uso de estas herramientas. Promover la divulgación matemática.



III Encuentro Conjunto RSME-UMA 2025 Bariloche, AR



karinarizzo71@gmail.com



trecio@nebrija.es

<https://www.geogebra.org/m/fasamgae>