

III Encuentro Conjunto RSME-UMA 2025 Bariloche, AR



FotoGebra Discovery

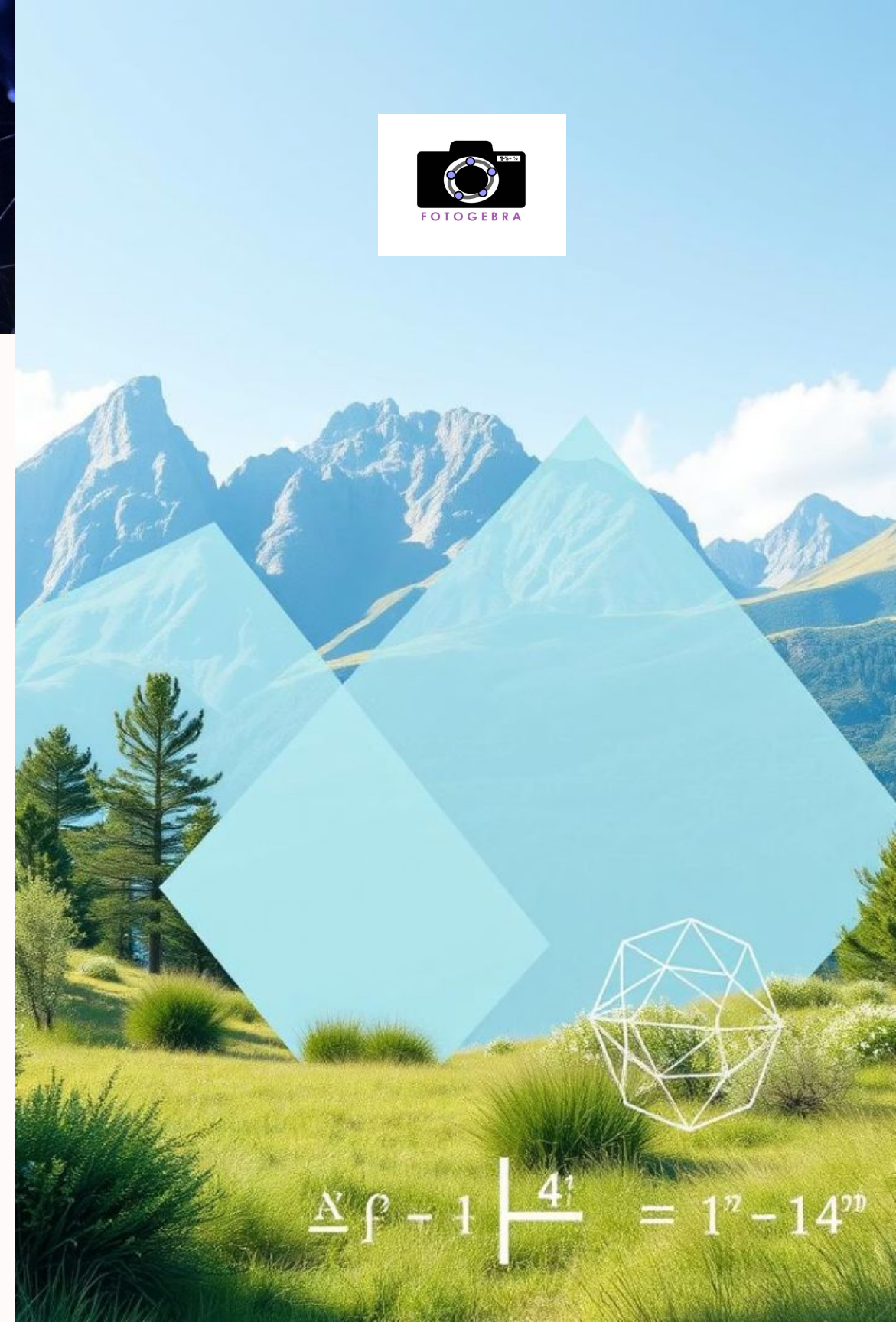
Esta presentación explora la fusión de fotografía, matemáticas y tecnología.
Proponemos usar GeoGebra Discovery en el concurso FotoGebra.
Esto mejora la enseñanza STEAM y el razonamiento automático.



Karina A. Rizzo



Tomás Recio





Orígenes y Evolución de FotoGebra



1991

La profesora K. Rizzo inicia la práctica docente. Explora la relación entre matemáticas e imágenes.

1

2

2016

Nace FotoGebra, fusionando fotografía, matemáticas y GeoGebra.
Se convierte en un concurso internacional abierto al público.

Actualidad

FotoGebra fomenta el pensamiento matemático. Promueve la modelización y exploración visual.

3



GeoGebra Discovery: Geometría Dinámica y Razonamiento Automático

Descubrimiento de Propiedades

- El comando Relación(h,i) (Relation) encuentra propiedades geométricas entre dos elementos..

<https://autgeo.online/ag/automated-geometer.html?offline=1>

Verificación de Propiedades

- Comprueba (Prove) o DemuestraDetalles(ProveDetails) corroboran propiedades. Confirman si se verifican con generalidad. VerDemo (ShowProof) muestra la prueba y una medida de la dificultad.

Descubre teoremas

- El comando EcuaciónLugar(LocusEquation) propone hipótesis complementarias para que sea cierta una tesis formulada por el usuario.



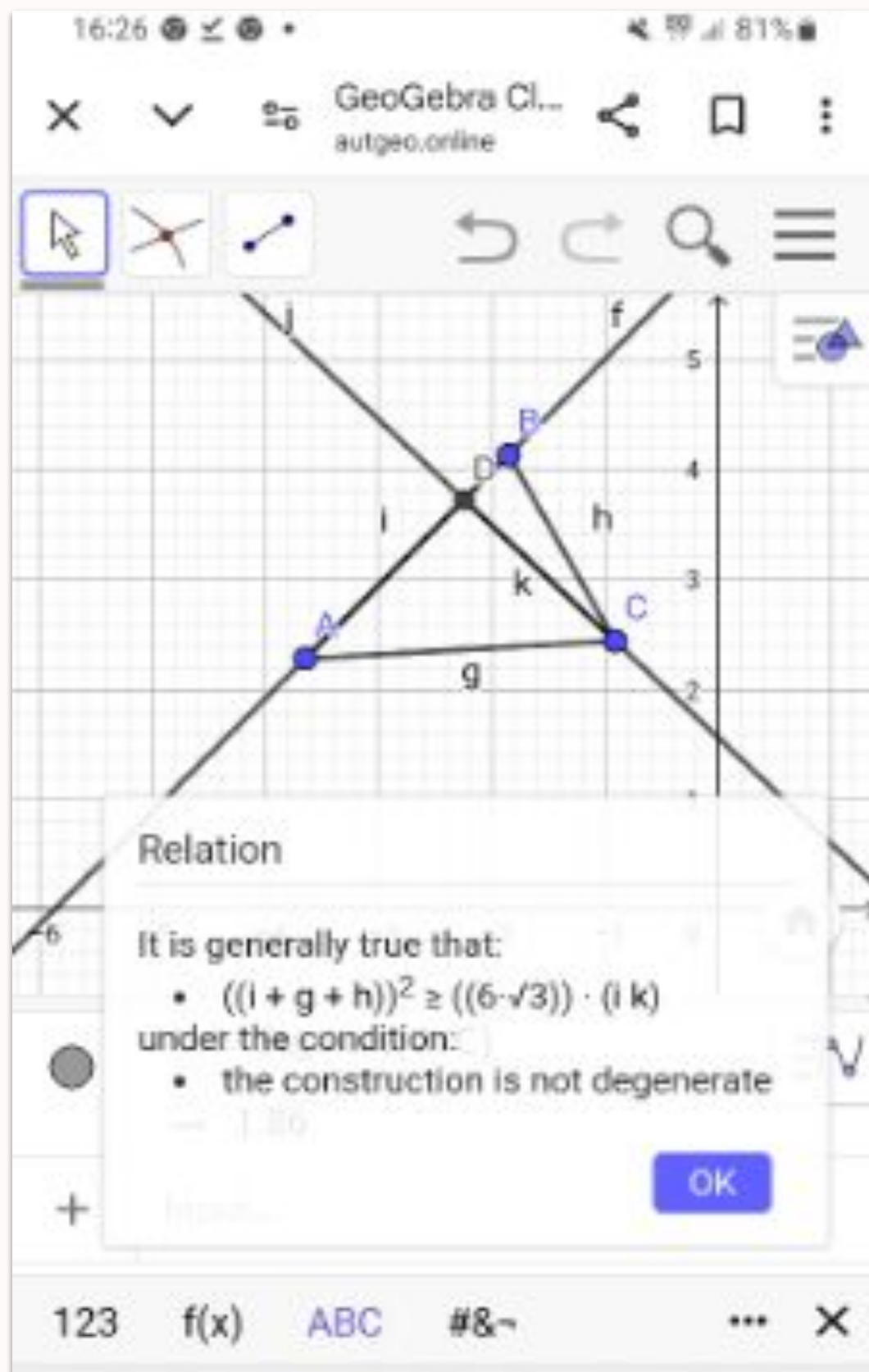
GeoGebra Discovery: Razonamiento Automático

Matemáticamente riguroso

- Traduce en términos de ecuaciones polinomiales los pasos de la construcción y la tesis.
- Utiliza generalmente geometría algebraica compleja computacional (bases de Gröbner) para obtener o confirmar propiedades, salvo en el caso de desigualdades, donde usa algoritmos de geometría real, de eliminación de cuantificadores.
- Utiliza los sistemas de álgebra computacional Giac y/o Tarski incluidos en GeoGebra Discovery

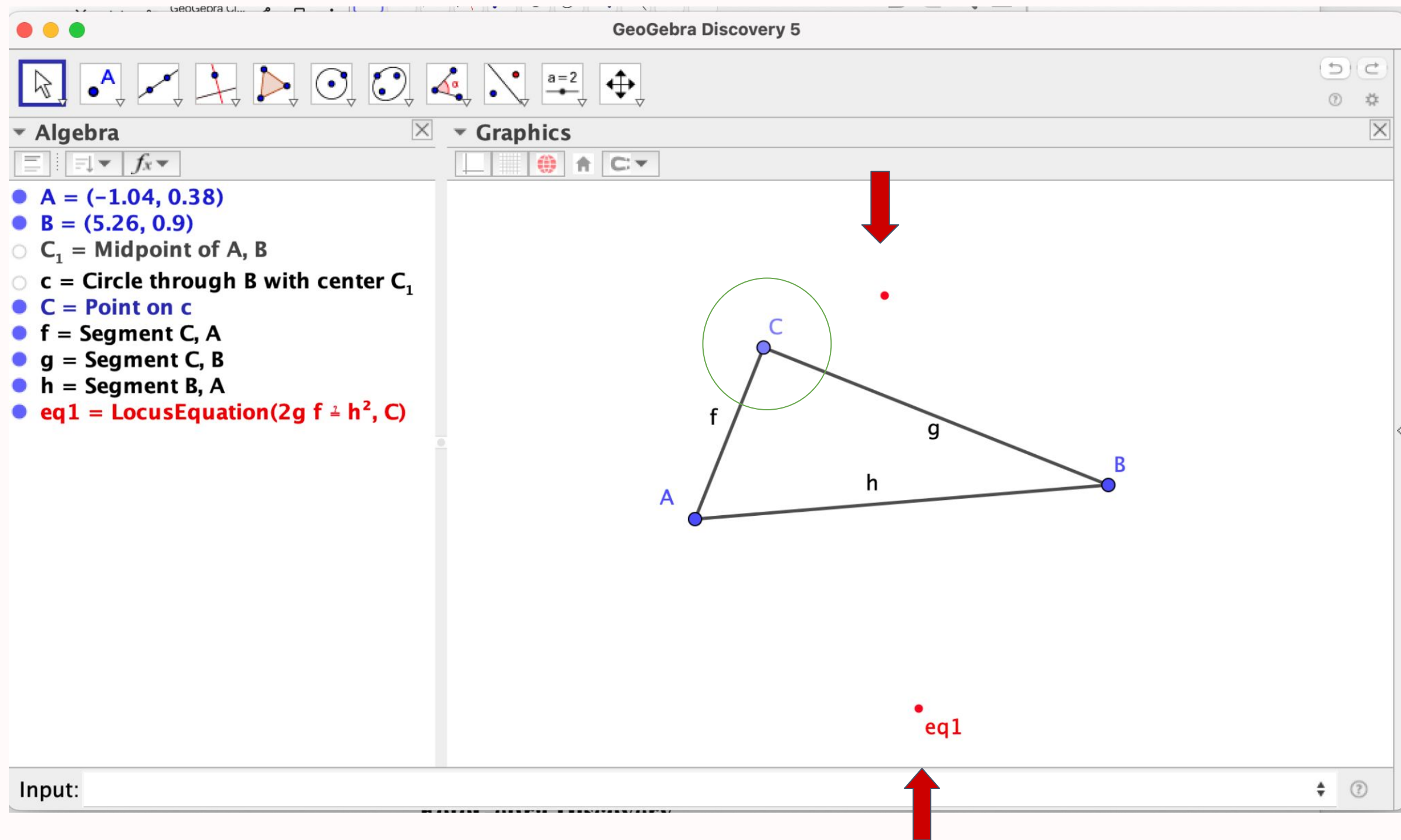
Kovács, Z.; Recio, T.; Vélez, M.P.: "Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for?" In: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. van Vaerenbergh (eds): Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning. Series: Mathematics Education in the Digital Era, Springer, 2022, pp. 23-44. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2





Relación obtenida por
GeoGebra Discovery,
versión
<https://autgeo.online>,
desde un móvil,
encontrando
automáticamente la
desigualdad existente entre
el perímetro $(i+g+h)$ y el
área $(i \cdot k/2)$ de un triángulo





GeoGebra Discovery,
muestra (con
EcuaciónLugar)
los **puntos (rojos)**
donde habría que
colocar C para que se
verifique el teorema:
en un triángulo
rectángulo en C, **el
doble del producto de
los catetos es el
cuadrado de la
hipotenusa.**

Conjetura: ¿ha de ser
isósceles?



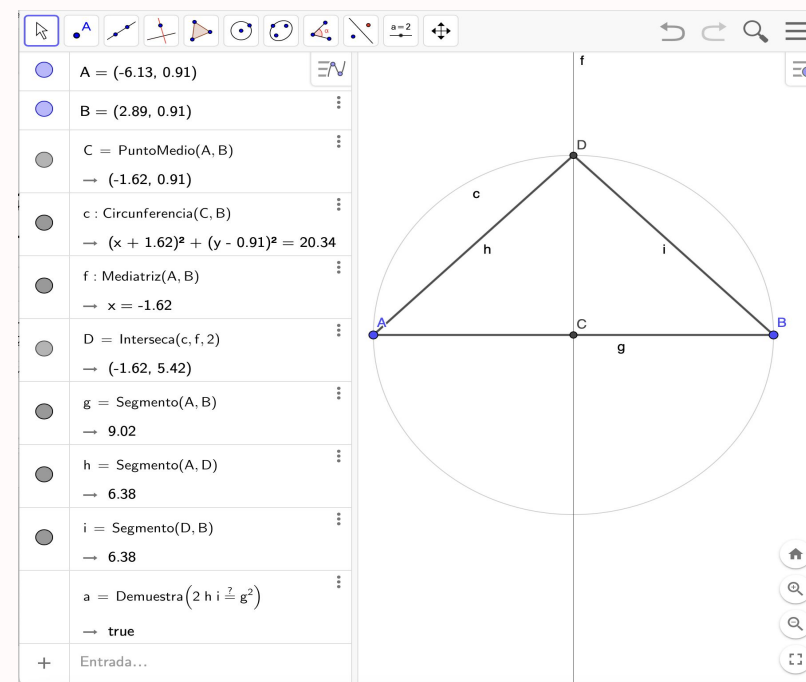
Ventajas de GeoGebra Discovery

Facilita el Descubrimiento

Ayuda a encontrar propiedades geométricas inesperadas.
Anima a los usuarios a cuestionar el porqué.

Potencia la mirada

Enriquece la visión del usuario con una "realidad aumentada". No elimina, sino que incrementa el conocimiento (info extra)



Aplicación en FotoGebra

1

Captura de Imagen

Los participantes fotografían el entorno.

2

Modeliza

Ajustan una construcción a la imagen.

3

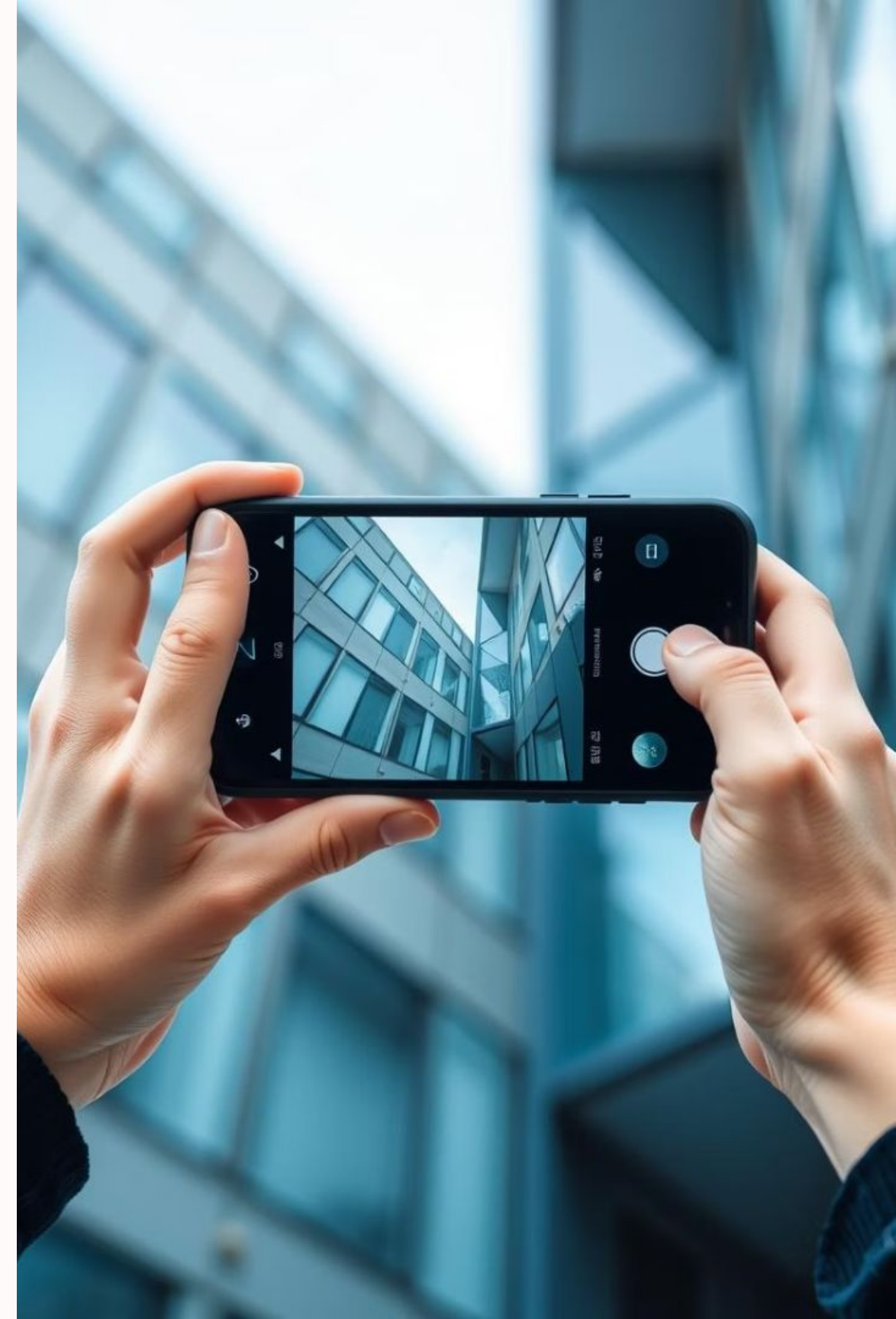
Uso de Discovery

Preguntan a GeoGebra Discovery por propiedades.

4

Interpretación

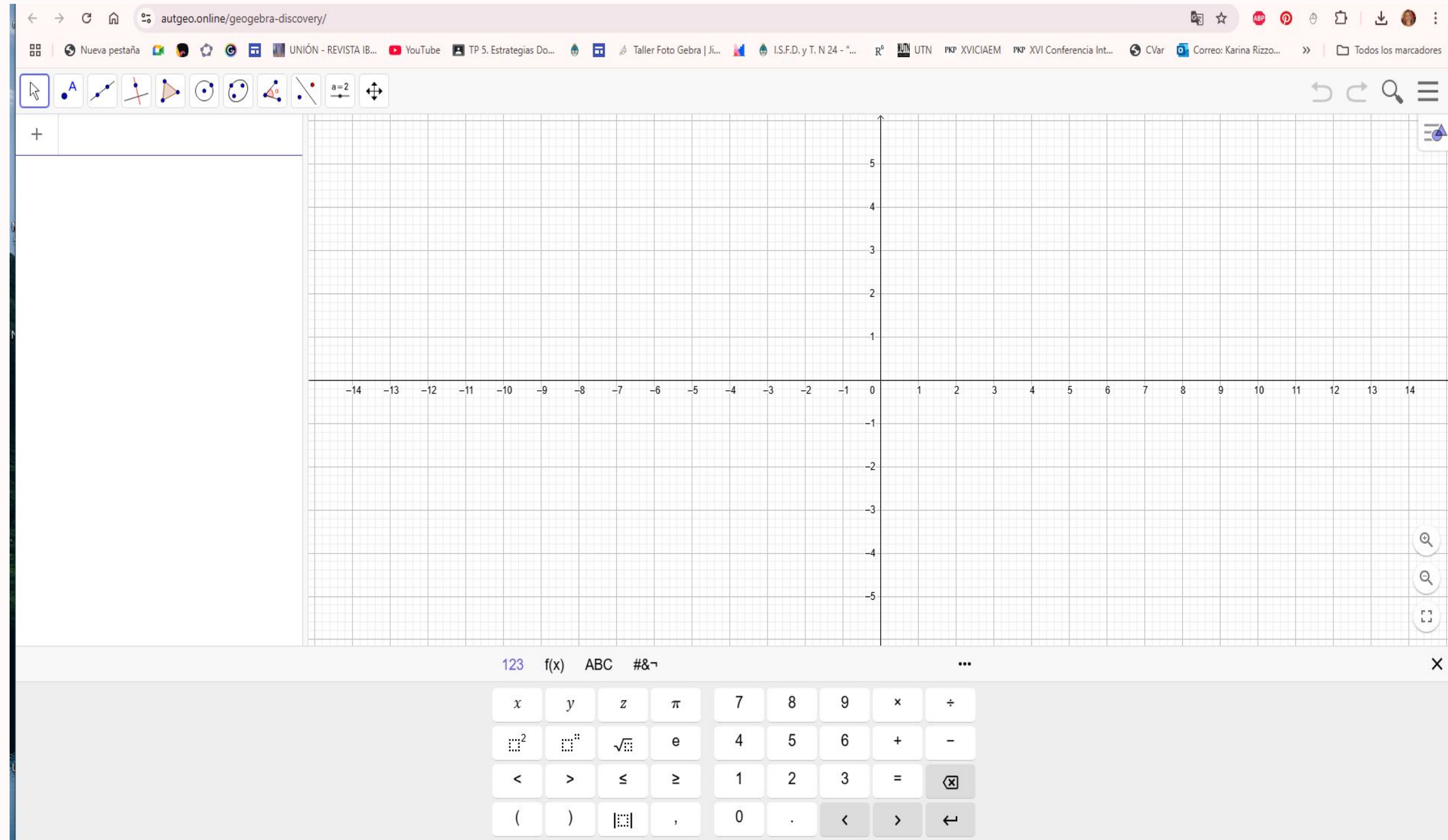
Analizan los resultados obtenidos.



Ejemplo Práctico

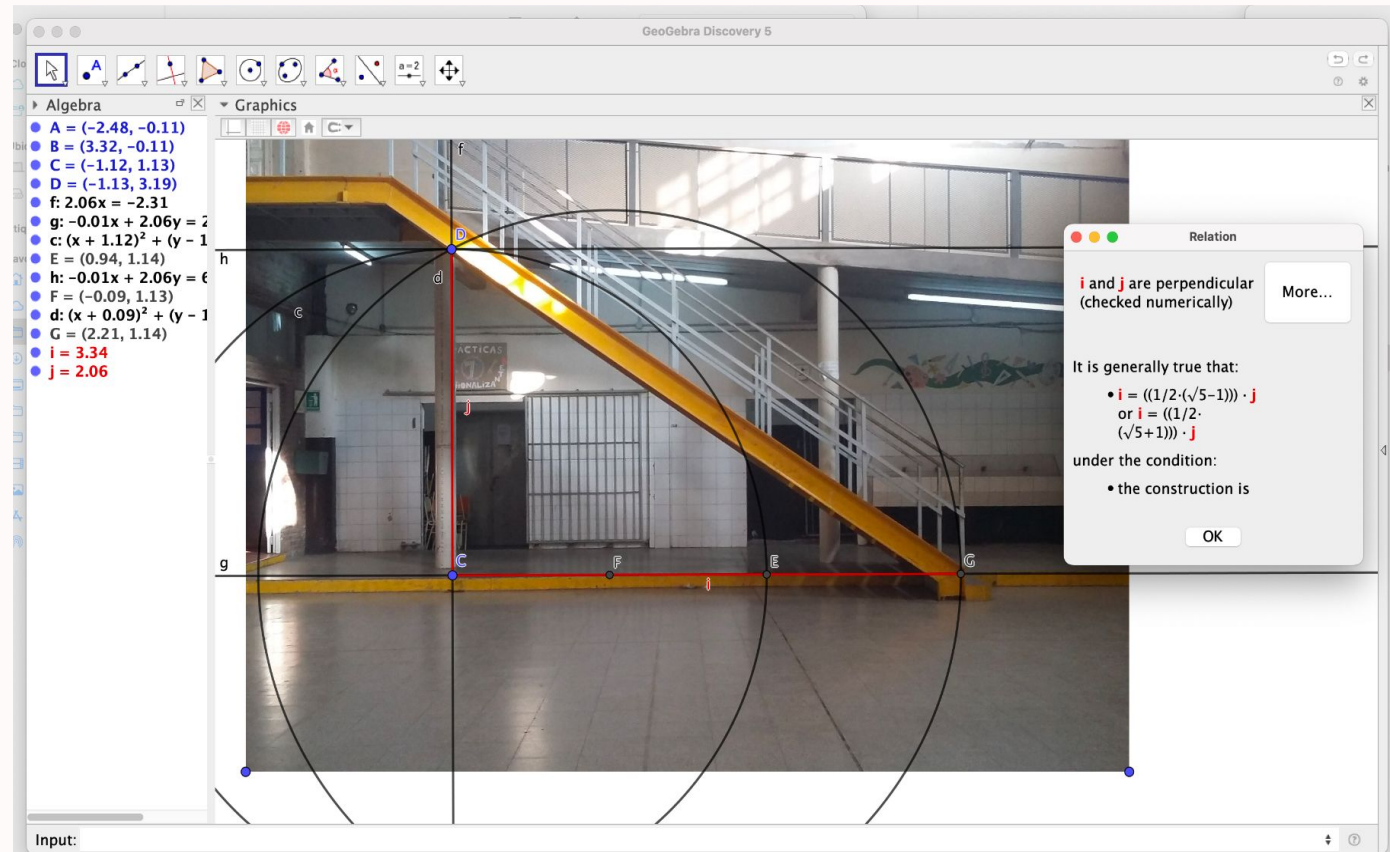
<https://autgeo.online/geogebra-discovery/>

- Tomar una hoja de papel
- Hacer una fotografía
- Insertar en autgeo (INPUT + IMAGE)
- Realizar una construcción
- Descubrir propiedades

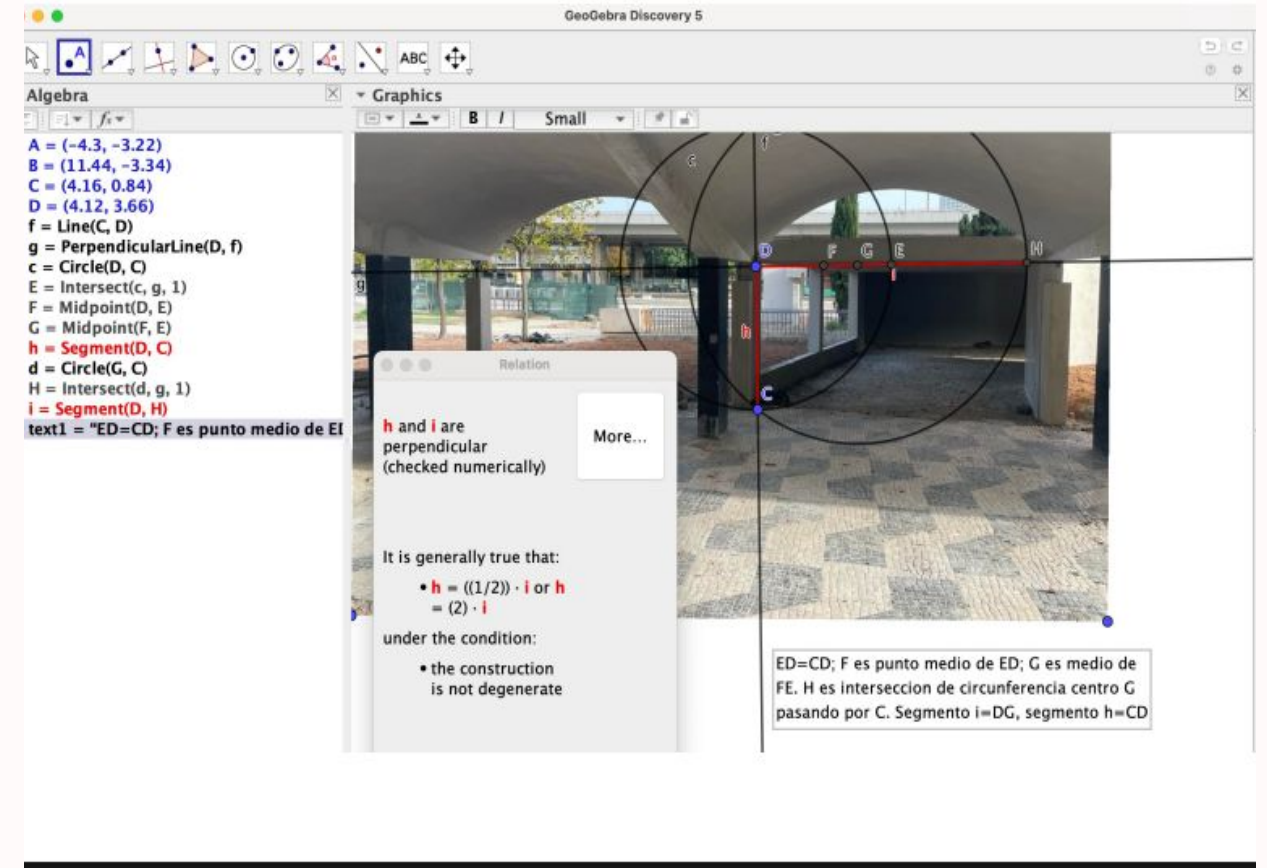




Ejemplos Prácticos



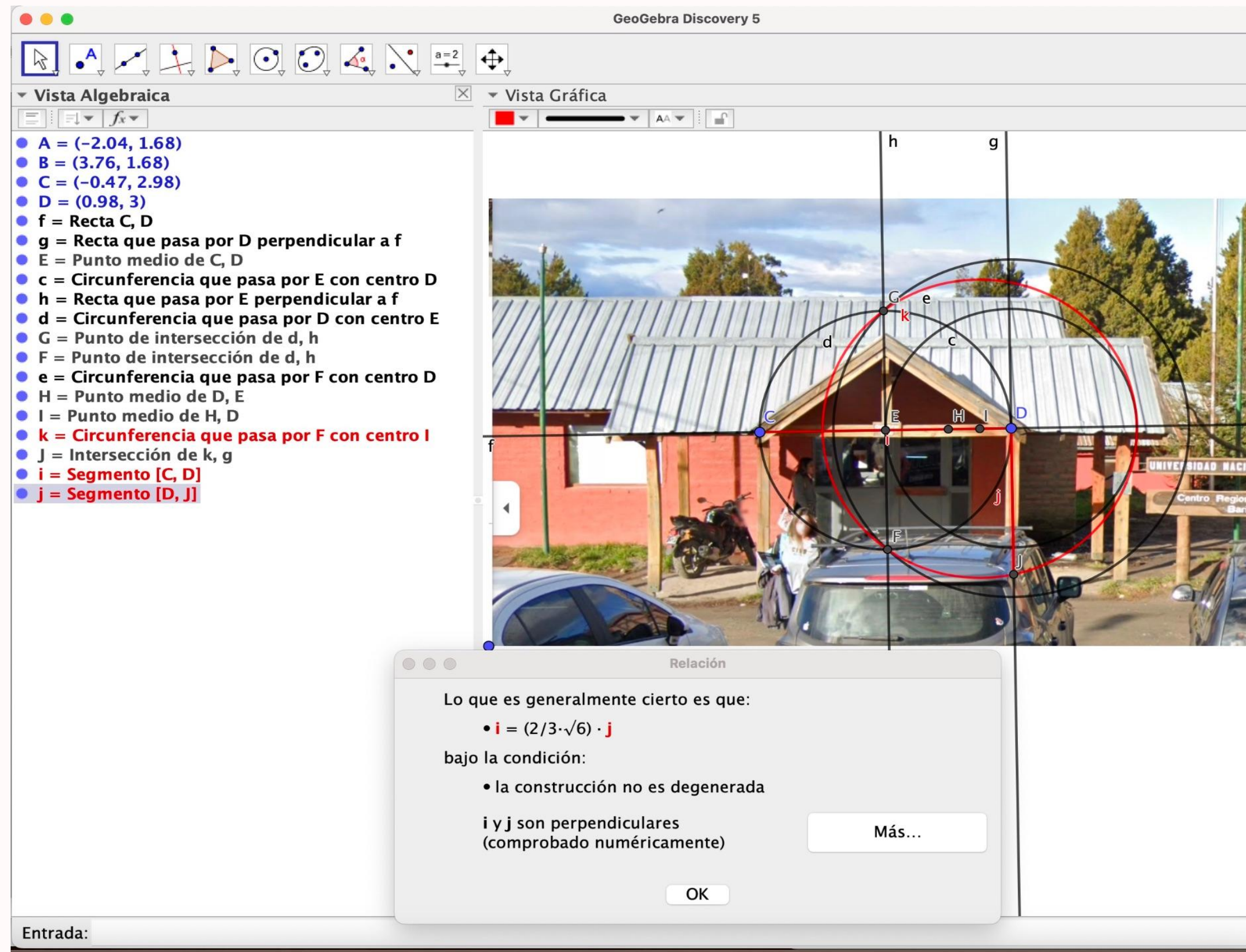
Descubre la relación entre los catetos de este triángulo, formado por una columna, base y escalera.



GeoGebra Discovery expresa la ratio existente entre el largo y el alto del rectángulo entre columnas.

Ejemplos

U.N. Comahue / Instituto Balseiro





Vista Algebraica



- $A = (-1.4, -0.27)$
- $B = (4.4, -0.27)$
- $C = (-0.21, 2.73)$
- $D = (-0.22, 1.33)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } C \text{ perpendicular a } f$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } D \text{ con centro } C$
- $E = \text{Intersección de } c, g$
- $C' = \text{Simétrico de } C \text{ por } E$
- $F = \text{Punto medio de } E, C'$
- $h = \text{Recta que pasa por } D \text{ paralela a } g$
- $F' = \text{Simétrico de } F \text{ por } C'$
- $i = \text{Segmento } [C, D]$
- $j = \text{Segmento } [C, F']$

Vista Gráfica



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $i = (2/5) \cdot j$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

i y j son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

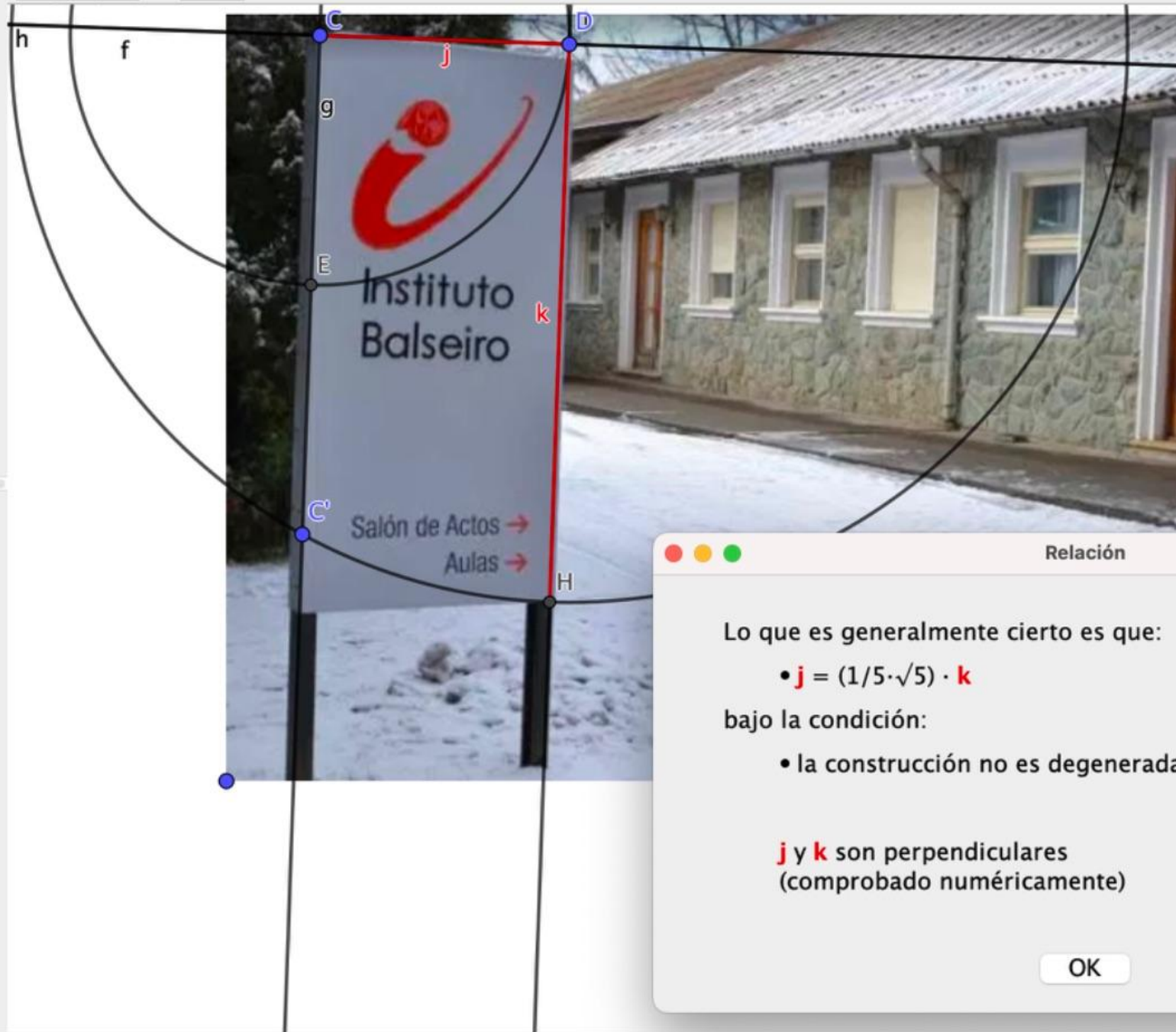


Vista Algebraica



- $A = (-1.4, -0.27)$
- $B = (4.4, -0.27)$
- $C = (-0.83, 4.25)$
- $D = (0.68, 4.19)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } C \text{ perpendicular a } f$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } D \text{ con centro } C$
- $E = \text{Intersección de } c, g$
- $C' = \text{Simétrico de } C \text{ por } E$
- $d = \text{Circunferencia que pasa por } C' \text{ con centro } D$
- $h = \text{Recta que pasa por } D \text{ paralela a } f$
- $i = \text{Recta que pasa por } D \text{ paralela a } g$
- $H = \text{Intersección de } d, i$
- $j = \text{Segmento } [C, D]$
- $k = \text{Segmento } [D, H]$

Vista Gráfica



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $j = (1/5 \cdot \sqrt{5}) \cdot k$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

j y k son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK

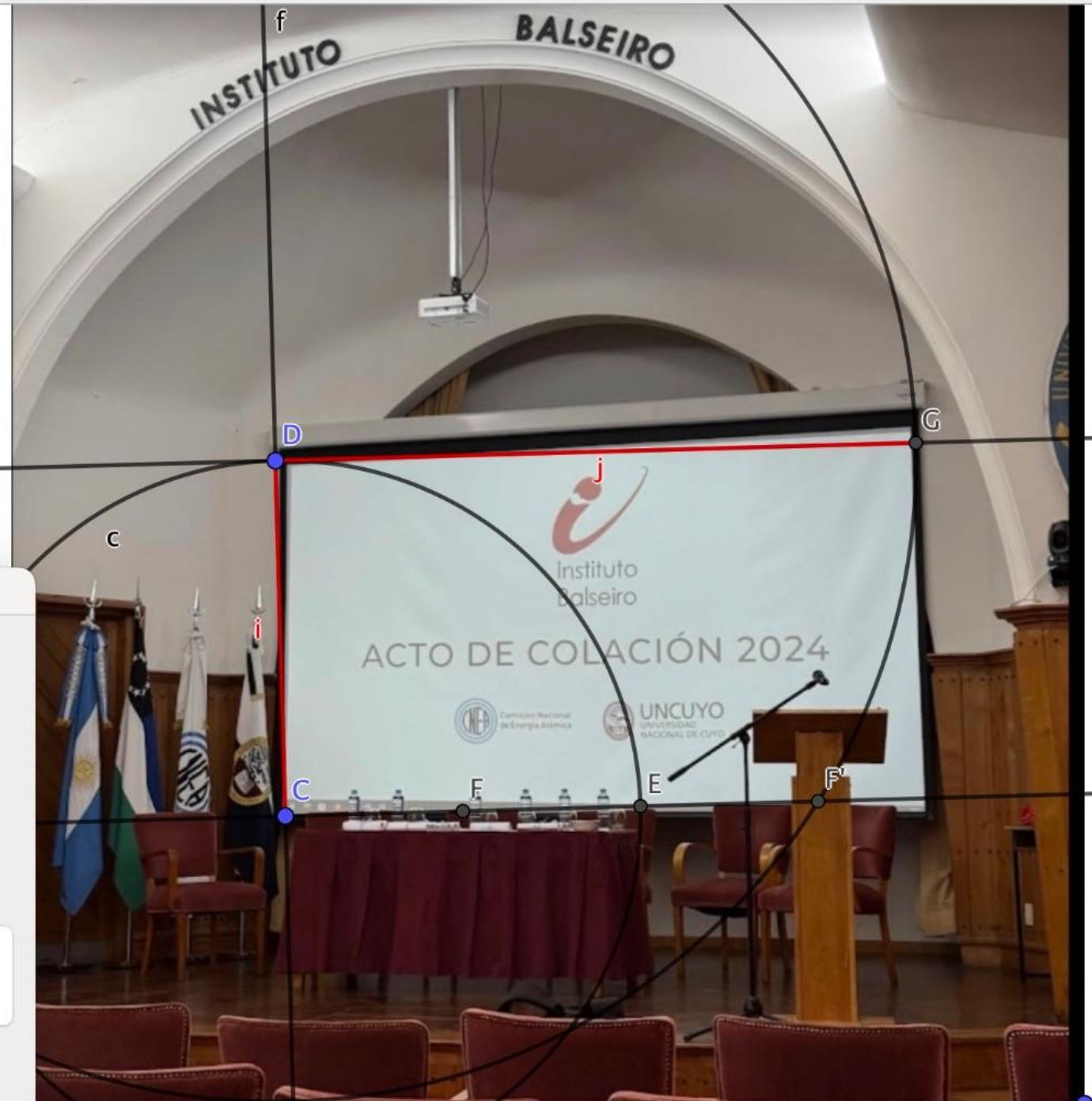


Vista Algebraica



- $A = (-0.69, -0.9)$
- $B = (5.11, -0.9)$
- $C = (0.79, 0.65)$
- $D = (0.74, 2.57)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } C \text{ perpendicular a } f$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } D \text{ con centro } C$
- $E = \text{Intersección de } c, g$
- $F = \text{Punto medio de } C, E$
- $F' = \text{Simétrico de } F \text{ por } E$
- $d = \text{Circunferencia que pasa por } F' \text{ con centro } D$
- $h = \text{Recta que pasa por } D \text{ perpendicular a } f$
- $G = \text{Intersección de } d, h$
- $i = \text{Segmento } [D, C]$
- $j = \text{Segmento } [D, G]$

Vista Gráfica



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $i = (2/13 \cdot \sqrt{13}) \cdot j$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

i y j son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK



Vista Algebraica



- $A = (-0.83, 2.46)$
- $B = (4.97, 2.46)$
- $C = (2.48, 3.28)$
- $D = (2.48, 3.8)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } D \text{ perpendicular a } f$
- $E = \text{Punto medio de } C, D$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } E \text{ con centro } D$
- $F = \text{Intersección de } c, g$
- $h = \text{Recta que pasa por } E \text{ paralela a } g$
- $i = \text{Recta que pasa por } F \text{ perpendicular a } g$
- $G = \text{Intersección de } h, i$
- $d = \text{Circunferencia que pasa por } G \text{ con centro } D$
- $H = \text{Intersección de } d, g$
- $j = \text{Segmento } [D, H]$
- $k = \text{Segmento } [D, C]$
- $I = (1.29, 3.83)$
- $J = (1.29, 4.05)$
- $l = \text{Recta } J, I$
- $m = \text{Recta que pasa por } I \text{ perpendicular a } l$
- $n = \text{Recta que pasa por } I \text{ perpendicular a } m$
- $e = \text{Circunferencia que pasa por } J \text{ con centro } I$
- $K = \text{Intersección de } e, m$
- $L = \text{Punto medio de } I, K$
- $p = \text{Circunferencia que pasa por } J \text{ con centro } L$
- $M = \text{Intersección de } p, m$
- $q = \text{Segmento } [J, I]$
- $r = \text{Segmento } [I, M]$

Vista Gráfica



Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $q = ((1/2 \cdot (\sqrt{5}-1))) \cdot r$ o $q = ((1/2 \cdot (\sqrt{5}+1))) \cdot r$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

q y r son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK



Vista Algebraica



- $A = (-0.84, 2.46)$
- $B = (4.96, 2.46)$
- $C = (2.48, 3.28)$
- $D = (2.48, 3.8)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } D \text{ perpendicular a } f$
- $E = \text{Punto medio de } C, D$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } E \text{ con centro } D$
- $F = \text{Intersección de } c, g$
- $h = \text{Recta que pasa por } E \text{ paralela a } g$
- $i = \text{Recta que pasa por } F \text{ perpendicular a } g$
- $G = \text{Intersección de } h, i$
- $d = \text{Circunferencia que pasa por } G \text{ con centro } D$
- $H = \text{Intersección de } d, g$
- $j = \text{Segmento } [D, H]$
- $k = \text{Segmento } [D, C]$

Vista Gráfica



Imagen imagen1

Relación

Lo que es generalmente cierto es que:

- $j = (1/2 \cdot \sqrt{2}) \cdot k$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

j y k son perpendiculares
(comprobado numéricamente)

Más...

OK



Vista Algebraica

Vista Gráfica

- $A = (-1.4, -0.27)$
- $B = (4.4, -0.27)$
- $C = (2.35, 2.47)$
- $D = (2.33, 1.71)$
- $f = \text{Recta } C, D$
- $g = \text{Recta que pasa por } D \text{ perpendicular a } f$
- $c = \text{Circunferencia que pasa por } C \text{ con centro}$
- $E = \text{Intersección de } c, g$
- $D' = \text{Simétrico de } D \text{ por } E$
- $E' = \text{Simétrico de } E \text{ por } D'$
- $D'' = \text{Simétrico de } D' \text{ por } E'$
- $h = \text{Recta } D'', C$
- $i = \text{Segmento } [C, D]$
- $j = \text{Segmento } [C, D'']$
- $F = \text{Intersección de } g, h$
- $k = \text{Segmento } [D'', D]$
- $G = \text{Punto sobre } k$
- $l = \text{Segmento } [G, C]$



Relación

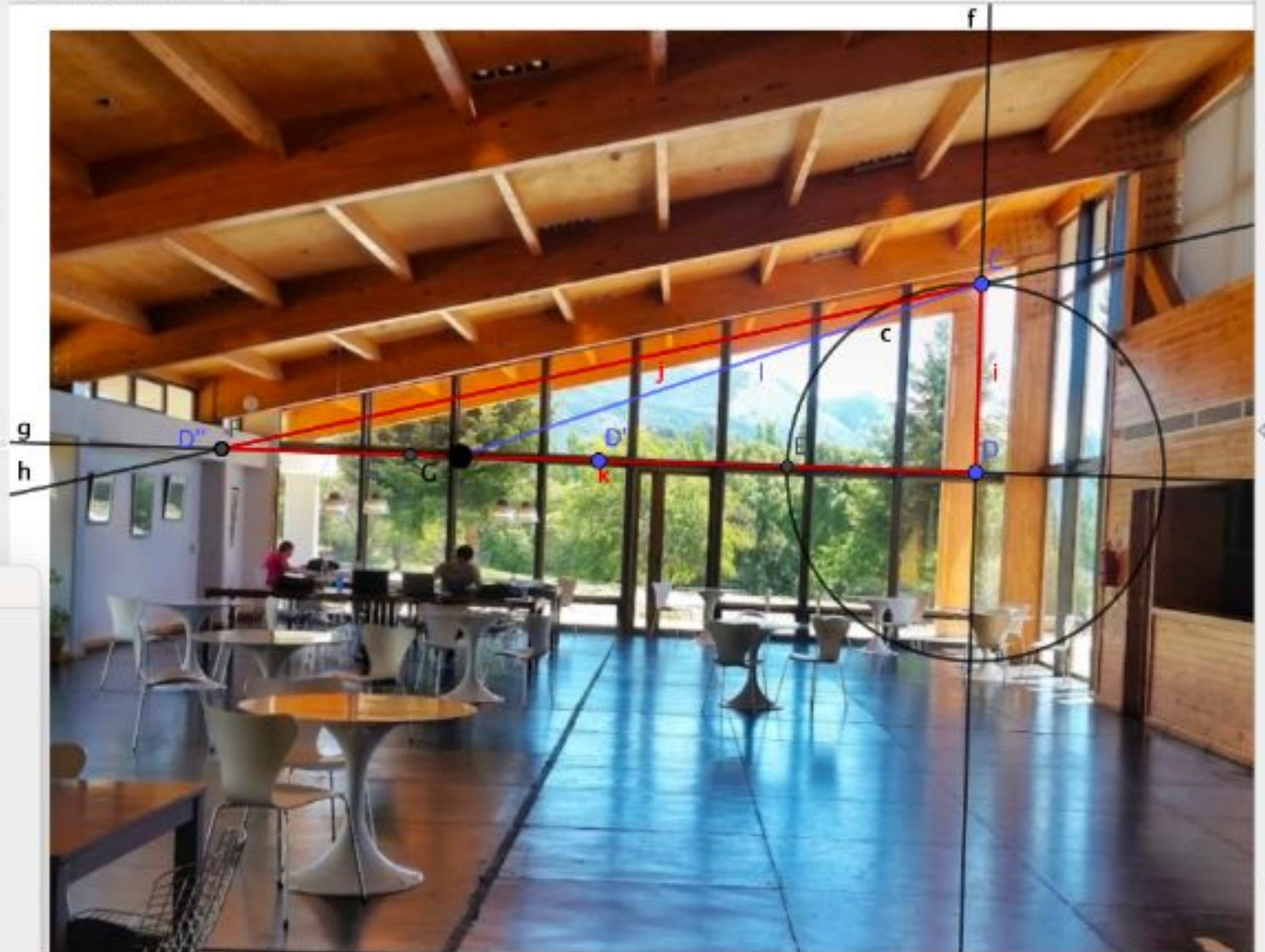
Lo que es generalmente cierto es que:

$$i \leq l \leq ((\sqrt{17}) \cdot i)$$

bajo la condición:

- la construcción no es degenerada

OK





Impacto en la divulgación: paseos matemáticos con FotoGebra Discovery y MathCityMap <https://mathcitymap.eu/es/>

Utilización de las herramientas de razonamiento automático de GeoGebra Discovery para realizar sobre fotografías tomadas por los paseantes, tareas matemáticas propuestas a lo largo de paseos matemáticos desarrollados y efectuados con el celular, vía MathCityMap

Ariño-Morera, B.; Martínez-Zarzuelo, A.; Lázaro del Pozo, C.; Recio, T. (2024): "Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta." Boletín de la Soc. Puig Adam de Profesores de Matemáticas, 117, abril 2024, pp. 19-38.

<https://www.ucm.es/sociedadpuigadam/file/boletin-117-de-soc-puig-adam>



Impacto en la Divulgación Enseñanza STEAM



Enfoque

Interdisciplinario

Conecta matemáticas con arte, arquitectura, física e ingeniería. Fomenta una visión integral.

Pensamiento Crítico

Motiva a justificar propiedades geométricas. Incrementa la construcción de conocimiento.

Inteligencia Artificial

Utiliza IA simbólica y exacta. Facilita el descubrimiento de propiedades.

Conclusiones

Próximos Pasos



Innovación

FotoGebra Discovery puede revolucionar la divulgación/enseñanza de la matemática. Integra tecnología y creatividad.



Participación

Invitar a estudiantes y público en general a explorar la realidad matemáticamente. Fomentar la observación matemática del mundo.

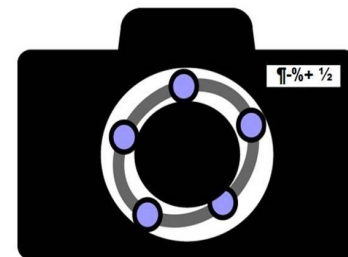


Crecimiento

Esperamos expandir el uso de estas herramientas. Promover la divulgación matemática.



III Encuentro Conjunto RSME-UMA 2025 Bariloche, AR



karinarizzo71@gmail.com



trecio@nebrija.es

<https://www.geogebra.org/m/fasamgae>