

Universidad Nacional de San Luis (UNSL)

Facultad de Ciencias Físico Matemática y Naturales (FCFMyN)

Departamento de Matemática / Grupo de Teoría Algebraica de Grafos (TAG UNSL)

**Concurso de monografías SUMA 2019**

---

**Transformación de árboles y bosques con la misma  
secuencia de grados**

Una monografía presentada por: Victor Nicolás Schvöllner

---

# Índice general

<b>1. Introducción al Problema</b>	<b>3</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1. Notación y definiciones fundamentales . . . . .	6
2.2. Resultados necesarios . . . . .	11
2.3. 2-Switch y Primer Teorema de Transición . . . . .	15
<b>3. Resolución del Problema</b>	<b>24</b>
3.1. T-Switch y F-Switch . . . . .	24
3.2. El Teorema de Transición de árboles . . . . .	28
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>40</b>
4.1. Propiedad de Intervalo del número de matching . . . . .	40
4.2. Propiedad de Intervalo del número de dominancia . . . . .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>44</b>

# Capítulo 1

## Introducción al Problema

La Teoría de Grafos es la rama de la Combinatoria que estudia las propiedades de los *grafos*. Podemos postergar formalismos y detalles técnicos por ahora y tratar de decir en palabras sencillas que es un grafo. Para esto, pensemos en finitos vértices en el plano, conectados por aristas, de manera tal que hay a lo sumo una arista para cada par de vértices. Ese dibujo no es más que una representación geométrica de un grafo. Por comodidad, vamos provisionalmente a identificar el objeto abstracto con su representación. Con esa imagen en la mente, que como veremos no dista mucho de la realidad formal, vamos a introducir intuitivamente algunos conceptos más. Pero antes de hacer esto, cabe aclarar algo fundamental: la geometría (en el sentido euclidiano usual) del dibujo no es importante en este contexto. En otras palabras, solo importa saber si dos vértices están unidos o no por una arista.

Intuitivamente, un *camino* sobre un grafo  $G$  es una trayectoria continua en  $G$  que no pasa dos veces por el mismo vértice, que empieza en un vértice inicial  $a$  y termina en un vértice final  $b \neq a$ . Un *ciclo* en  $G$  es una trayectoria cerrada que empieza en el vértice  $a$  y termina en  $a$ , sin pasar dos veces por ningún otro vértice de  $G$ . Un grafo  $G$  se dice *conexo* si todo par de vértices distintos en  $G$  son extremos de algún camino. Un grafo sin ciclos se denomina *bosque*. Un *árbol* es un bosque conexo.

Focalicemos ahora nuestra atención sobre un vértice cualquiera de un grafo, y contemos cuantas aristas *inciden* (confluyen) sobre el mismo, es decir, cuantas aristas lo tienen como extremo. Esa cantidad se llama *grado* del vértice. Podemos ahora efectuar ese conteo en todos los vértices, luego de haberlos etiquetados con  $1, 2, 3, \dots, n$ , y sucesivamente ordenar los resultados en una  $n$ -upla, que llamamos *secuencia de grados*. La coordenada  $i$  de esta  $n$ -upla muestra el grado del vértice indexado con el número  $i$ . Claramente, un cierto etiquetamiento de los vértices produce una única secuencia de grados. Sin embargo una sucesión finita de enteros no-negativos puede tener asociado más de un grafo o incluso ninguno. Se dice que una sucesión finita  $s$  es *gráfica* si existe al menos un grafo que tenga a  $s$  como secuencia de grados. Dada una secuencia gráfica  $s$ , es razonable entonces hablar del conjunto  $\Gamma_s$  de todos los grafos (con vértices indexados por  $1, 2, \dots, n$ ) con una misma secuencia de grados  $s$ . Notar que, si  $s$  es una secuencia gráfica, entonces  $\Gamma_s \neq \emptyset$ .

Si  $a, b$  son dos vértices de un grafo conectados por una arista, podemos denotar con  $ab$  o  $ba$  dicha arista. Sean  $a, b, c, d$  vértices distintos en un grafo  $G$  tales que las aristas  $ab, cd$  están en  $G$ , pero  $ac, bd$  no. Al proceso de eliminar  $ab$  y  $cd$  desde  $G$  y remplazarlas por  $ac$  y  $bd$  se le llama *2-switch* en  $G$ . Es muy fácil ver que el 2-switch preserva la secuencia de grados.

En otras palabras, si  $G'$  es el grafo resultante de un 2-switch en  $G \in \Gamma_s$ , entonces  $G' \in \Gamma_s$  también. Unos de los resultados inspiradores de este trabajo es el que aquí llamamos Primer Teorema de Transición (PTT) ([1], Teorema 1.11), un resultado del 1973 que se debe a Claude Berge (1926-2002), matemático francés reconocido como uno de los fundadores modernos de la Combinatoria y Teoría de Grafos. Este teorema afirma que, dados dos grafos  $G_1, G_2 \in \Gamma_s$ , siempre es posible transformar uno en el otro mediante sucesivas (y finitas) aplicaciones de 2-switches. El objetivo principal de esta investigación es responder la siguiente pregunta: *¿dados dos árboles con la misma secuencia de grados, es posible transformar uno en el otro mediante 2-switches de manera tal que todos los grafos intermedios sean árboles?*

En el Capítulo 2 damos una definición rigurosa de todos los conceptos básicos de Teoría de Grafos que aparecen en este trabajo. También, enunciamos todos los resultados preliminares que necesitamos para el desarrollo de nuestro trabajo. Por último, re-definimos el 2-switch como función, dándole mucha más flexibilidad y generalidad, y mostramos sus propiedades elementales. Este desarrollo culmina finalmente en el PTT.

En el Capítulo 3 presentamos el t-switch y el f-switch, dos tipos de 2-switch que preservan respectivamente la estructura de árbol y de bosque, además de la secuencia de grados. En este capítulo demostramos que, dados dos bosques con la misma secuencia de grados, es posible transformar uno en el otro mediante una sucesión finita de f-switches. Mutatis mutandis para árboles. De hecho, damos un algoritmo que realiza dichas transformaciones. Los resultados de este capítulo son originales.

En el Capítulo 4 se estudian algunas aplicaciones de la teoría desarrollada en el Capítulo 3. Primero se relaciona el 2-switch con ciertos parámetros importantes de los grafos, estudiando la entidad de la perturbación provocada por la aplicación de un único 2-switch. Luego, se combina esta información con los teoremas de transición para conocer la distribución de esos parámetros en familias de grafos con una misma secuencia de grados. Los resultados de este capítulo son originales.

Finalmente, el quinto y último capítulo contiene un resumen de los principales resultados conseguidos a lo largo de esta investigación.

Es necesario hacer una advertencia muy importante antes de seguir. Todos los resultados incluidos en esta monografía son originales, excepto por los de las Secciones 2.1 y 2.2 y por los siguientes 4: Lema 2.3.8, Teoremas 2.3.6, 2.3.9 (PTT) y 2.3.10 (Havel-Hakami).

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo vamos a introducir las nociones básicas de Teoría de Grafos (Sección 2.1), enunciar los resultados previos necesarios para los Capítulos 3 y 4 (Sección 2.2) y describir las propiedades elementales del 2-switch (Sección 2.3)

La primer sección, entonces, se dedica a definir los objetos fundamentales con los cuales trabajaremos a lo largo de este texto. Acompañamos cada definición con oportunos ejemplos, comentarios y observaciones con el objetivo de ofrecer una mejor intuición sobre la misma. Comenzamos con la definición formal de grafo, junto con la de vértice y arista. A partir de esta, definimos orden, tamaño y complemento de un grafo, así como también el concepto de subgrafo y de igualdad entre grafos. Luego, mostramos como dibujar un grafo en el plano. Esto nos permite expresar muchos conceptos de forma más intuitiva. Es en este lenguaje que definimos conceptos como el de vecindad, grado de un vértice y secuencia de grados. Siguen a esto la definición de camino, la cual abre las puertas a muchas otras nociones estructurales como la de ciclo o conexidad. Del resto de los conceptos que se introducen, cabe destacar el de bosque, el de árbol y el de isomorfismo.

La Sección 2.2 es, en su primer mitad, más bien una colección de resultados elementales de naturaleza estructural, intercalados con advertencias de notación. Aquí por ejemplo caracterizamos la propiedad de ser árbol, con todas las usuales equivalencias. Cuando decimos “estructurales” nos referimos a que pertenecen estrictamente a la sub-área de la Teoría Estructural de Grafos, la cual estudia, en pocas palabras, todos esos aspectos de los grafos que de alguna manera se pueden “ver” directamente en su representación en el plano.

En la segunda mitad de la sección introducimos en cambio los conceptos de matching, independencia y dominancia, con respectivas nociones satélites y oportunos ejemplos. Incluso se habla de rango y nulidad de un grafo. Todo esto confluye en el final de la sección en un elegante resultado que relaciona los parámetros de número de matching, número de independencia, rango y nulidad en un bosque cualquiera. El lenguaje y la maquinaria introducidos aquí fundamentan por completo el Capítulo 4.

En la Sección 2.3 re-definimos el 2-switch como función y deducimos sus propiedades básicas en un marco sumamente general, pero sin perder de vista nunca el paralelo con la Teoría de Grafos. Este camino nos llevara sobre el final de la sección al Primer Teorema de Transición, un resultado fuerte que garantiza la posibilidad de transformar un grafo, mediante 2-switches, en cualquier otro con la misma secuencia de grados. Este teorema será fuente de inspiración para la mayoría de los resultados en los capítulos siguientes.

## 2.1. Notación y definiciones fundamentales

Como fue anunciado, empezamos esta sección definiendo que es un grafo. Sin duda, esta es la definición más importante del texto.

**Definición 2.1.1.** *Un **grafo** es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto y  $E \subseteq \binom{V}{2} = \{W \subseteq V : |W| = 2\}$ . Los elementos de  $V$  se llaman **vértices** y los de  $E$  se llaman **aristas**.*

En otras palabras, un grafo es un objeto determinado por un conjunto de vértices y por un conjunto de aristas, una colección de pares desordenados de vértices. La cantidad  $|V|$  de vértices y la cantidad  $|E|$  de aristas se llaman, respectivamente, **orden** y **tamaño** del grafo  $G$ . Dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  son **iguales** si y sólo si  $V = V'$  y  $E = E'$ . El **complemento** de un grafo  $G = (V, E)$ , es el grafo  $G^c := (V, E^c)$ , donde  $E^c = \binom{V}{2} - E$ . Si  $H = (V_H, E_H)$  es un grafo que cumple  $V_H \subseteq V$  y  $E_H \subseteq E$ , decimos que  $H$  es un **subgrafo** de  $G$  y denotamos esta relación con  $H \subseteq G$ . Si  $H \subseteq G$  y  $H \neq G$  entonces decimos que  $H$  es un subgrafo *propio* de  $G$  y denotamos esto con  $H \subset G$ . Usaremos esta misma notación para la contención propia entre conjuntos. Por ejemplo,  $G = (\{x, y, z, t\}, \{\{x, z\}, \{x, t\}\})$  es un grafo con 4 vértices y 2 aristas y  $H = (\{x, y, z\}, \{\{x, z\}\})$  es un subgrafo propio de  $G$ , de orden 3 y tamaño 1; el complemento de  $H$  es  $H^c = (\{x, y, z\}, \{\{x, y\}, \{y, z\}\})$ .

En este texto trabajaremos siempre con  $V = [n]$ , donde  $[n] = \{1, \dots, n\}$ , si  $n \geq 1$ , y  $[0] := \emptyset$ . Por lo tanto,  $n$  indicará siempre el orden de  $G$ . En este texto escribiremos los conjuntos de un solo elemento sin llaves, es decir,  $a := \{a\}$ . De la misma manera, escribiremos los conjuntos de dos elementos sin llaves ni coma, o sea,  $ab := \{a, b\}$ . El contexto evitará en todo caso eventuales ambigüedades de estas notaciones. Si  $ab \subset \mathbb{N}$ , podemos escribir  $a.b$  cuando alguno de los dos números tiene más de 1 dígito (por ejemplo:  $\{1, 23\} = 1.23$ ).

Un grafo tiene una representación visual natural que consiste en pensar a los vértices como puntos distintos y etiquetados en el plano (es decir, a todo  $v \in [n]$  le corresponde un punto en el plano etiquetado con el número  $v$ ). A un par cualquiera  $a, b$  de estos puntos se los une luego con un arco si y sólo si  $ab \in E$ . Al dibujo que resulta de este procedimiento se lo suele llamar **grafo etiquetado**. El mismo dibujo, pero privado de las etiquetas en los vértices, es en cambio un **grafo no-etiquetado**. Dos vértices (puntos)  $a, b$  unidos por una arista (arco)  $ab$  se dicen **vecinos** (o *adyacentes*) y  $ab$  se dice **incidente** en  $a$  y  $b$ . El conjunto de todos los vecinos de un vértice  $v$  en un grafo  $G$  se denomina **vecindad** de  $v$  en  $G$  y se denota con  $N_G(v)$ . Dos aristas  $ab, cd$  que no inciden en un mismo vértice se dicen **disjuntas** ( $ab \cap cd = \emptyset$ ). La cantidad de aristas que inciden sobre un vértice  $v$  se denomina **grado** y se denota con  $d_v$  o  $\deg(v)$ . Si  $d_v = 0$ , decimos que  $v$  es **aislado** y si  $d_v = 1$  decimos que  $v$  es una **hoja**. Los grados de los vértices en  $G$  pueden disponerse en una  $n$ -upla  $(d_1, \dots, d_n)$  y formar lo que se llama **secuencia de grados**, que indicaremos con  $s(G)$  o simplemente  $s$ , si el contexto no da lugar a ambigüedades.

Por ejemplo, si  $E = \{12, 23\}$  y  $n = 4$ , entonces  $s = (1, 2, 1, 0)$ . En la Figura 2.1 tenemos representado el grafo  $G = ([12], \{12, 15, 19, 25, 23, 34, 45, 46, 47, 78, 10, 11\})$ . Su secuencia de grados es  $s(G) = (3, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 0)$ .  $G$  tiene 5 hojas (los vértices 6, 8, 9, 10, 11) y un vértice aislado (el 12).

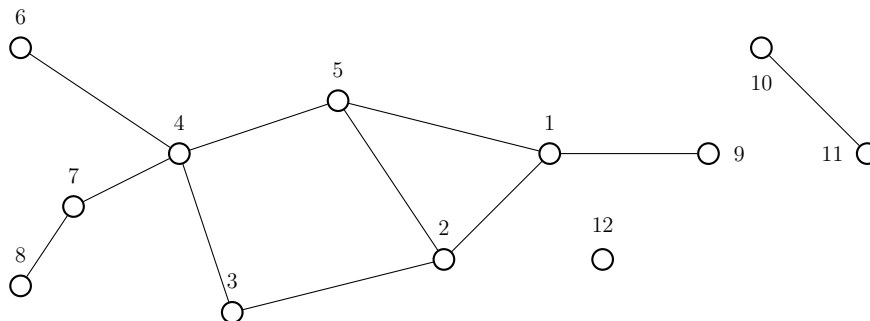


Figura 2.1: Representación en el plano de un grafo.

Los ejemplos sugieren que la formalidad de definir un grafo  $G$  como un par  $(V, E)$  es necesaria, al menos, para su correcta representación. En efecto, el conjunto de aristas  $E$  no es suficiente para determinarlo completamente. Tomando  $E = \{12\}$  por ejemplo, solo podría decirse que en  $G$  hay *al menos* dos vértices y que son hojas, pero no podría decirse nada de la cantidad de vértices aislados porque justamente no se ha especificado el orden  $n$  (recordemos que estamos tomando  $V = [n]$ ). Sin embargo, como en las familias de grafos que vamos a estudiar  $n$  va a ser fijo (aunque arbitrario, obviamente), la indeterminación recién planteada desaparece. Por lo tanto, a menos que sea estrictamente necesario comparar o representar dos grafos de orden distinto, nos permitimos relajar la tediosa notación  $G = (V, E)$ , identificando un grafo con su conjunto de aristas:  $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ . Remarcamos por lo tanto que el símbolo  $|G|$  indicará siempre el tamaño del grafo  $G$  y no su orden. Esta manera de ver los grafos (como conjunto de pares desordenados) es muy común en la literatura matemática, sobre todo en Teoría de Matroides.

**Definición 2.1.2.** Sea  $G$  un grafo. Un **camino** en  $G$  es una sucesión  $(e_i) = (e_1 e_2 \dots e_N)$  ( $N \geq 1$ ) de aristas distintas de  $G$  tales que,  $\forall i \neq j \in [N]$ :

1.  $|e_i \cap e_j| = 1$ , si  $|i - j| = 1$ ;
2.  $e_i \cap e_j = \emptyset$ , en otro caso.

Si  $e_1 = v_0 v_1$  y  $e_N = v_{N-1} v_N$ , llamamos  $v_0$  vértice *inicial* del camino y  $v_N$  vértice *final*, y denotamos con  $v_0 P v_N$  el camino que conecta el vértice  $v_0$  con el vértice  $v_N$ . será más cómodo, en general, escribir un camino como sucesión de vértices, sin separarlos con una coma, y ordenados de manera consistente con la sucesión de aristas que lo define. Esto significa que, si  $e_i = v_{i-1} v_i$ , entonces  $v_0 P v_N = (v_0 v_1 \dots v_{N-1} v_N)$ . La *longitud* de un camino es la cantidad de aristas que lo compone (o sea,  $N$ ).

Decimos que  $G$  es **conexo** si para todo par de vértices en  $G$  existe un camino que los conecta; de lo contrario, decimos que  $G$  es **disconexo** (o que  $G$  no es conexo). Asumimos conexo todo grafo de orden 1 (**grafo trivial**). Una **componente conexa** (o componente) de  $G$  es un subgrafo conexo maximal de  $G$ , es decir, un subgrafo conexo que no está propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de  $G$ . En su representación visual,  $G$  se ve partido en al menos dos “piezas” disjuntas cuando es desconexo.

En la Figura 2.2 se muestra el camino  $7P9 = (745219)$ , de longitud 5, en un grafo conexo de orden 10. En la Figura 2.3, en cambio, podemos ver el camino  $2P1 = (21)$ , de longitud 1, en un grafo desconexo de 3 componentes.

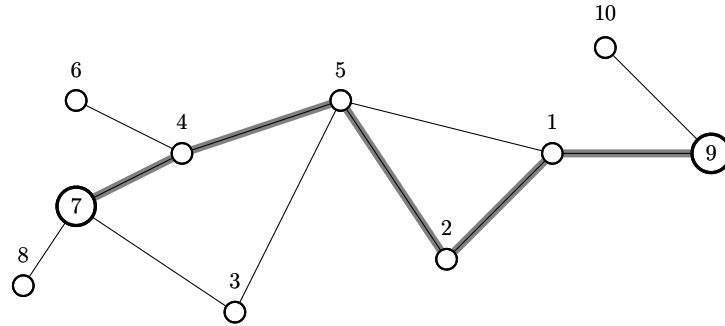


Figura 2.2: Un camino de longitud 5 en un grafo conexo.

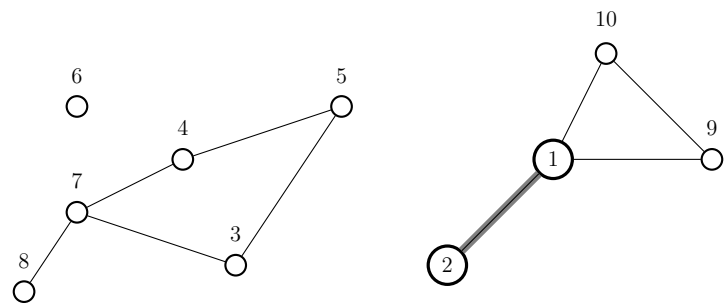


Figura 2.3: Un camino de longitud 1 en un grafo desconexo.

**Definición 2.1.3.** Sea  $G$  un grafo. Un **ciclo** en  $G$  es una sucesión  $(e_i) = (e_1 e_2 \dots e_N)$  de aristas distintas de  $G$  tales que:

1.  $(e_1 \dots e_{N-1}) = v_0 P v_{N-1}$ ;
2.  $e_N = v_{N-1} v_0$ ;

En otras palabras, un ciclo es esencialmente un camino en  $G$  al cual se le pega una arista extra entre el vértice inicial y el vértice final para cerrarlo. Por eso se suele denotarlos como  $vCv$ , pues cualquier vértice  $v$  del ciclo es al mismo tiempo un vértice inicial y final. será más cómodo, en general, escribir un ciclo como sucesión de vértices, sin separarlos con una coma, y ordenados de manera consistente con la sucesión de aristas que lo define. La *longitud* de un ciclo es la cantidad de aristas que lo compone (o sea,  $N$ ). Dado  $v_0 C v_0 = (v_0 v_1 \dots v_{N-1} v_0)$ , se consideran iguales a  $v_0 C v_0$  todos los ciclos que se obtienen a partir de este por permutación cíclica o reflexión de la  $N$ -upla  $(v_0, v_1, \dots, v_{N-1}, v_N)$ . Por ejemplo, los ciclos  $(2312)$ ,  $(3123)$ ,  $(1321)$ ,  $(3213)$  y  $(2131)$ , de longitud 3, son todos iguales a  $1C1 = (1231)$  ya que se obtienen permutando cíclicamente o reflejando la 3-upla  $(1,2,3)$ . Los grafos que contienen un solo ciclo son llamados **unicíclicos**. Obsérvese que la misma definición que dimos de grafo prohíbe la existencia de ciclos de longitud 1 y 2 en  $G$ . Estos se denominan *loops* y aristas *paralelas*, respectivamente. A lo largo de la literatura matemática, definiciones más generales de grafo pueden permitir este tipo de situaciones y por lo tanto se suele distinguir con el atributo de **simple** a un grafo que no tenga loops ni aristas paralelas; por ende, remarcamos que “grafo”



es sinónimo de “grafo simple” desde nuestro punto de vista. En la Figura 2.4 se muestran 3 ejemplos de *multigrafos*, o sea, grafos que no son simples.

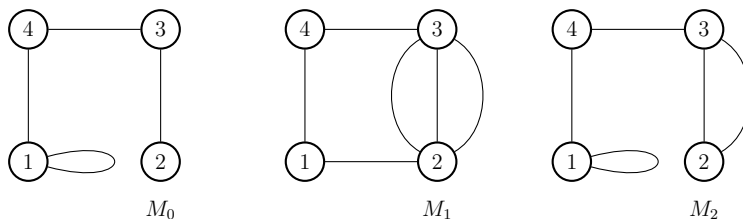


Figura 2.4:  $M_0$ ,  $M_1$  y  $M_2$  no son grafos simples.

En la Figura 2.5 tenemos el ciclo  $1C_1 = (123451)$ , de longitud 5, en un grafo conexo  $G$  de orden 11. Obsérvese que  $G$  contiene también ciclos de longitud 3, 4 y 6. Remarcamos además que la sucesión de aristas  $(e_i) = (12, 23, 35, 51, 19, 9.10, 10.1)$ , por ejemplo, no es un ciclo pues  $(12, 23, 35, 51, 19, 9.10)$  no es un camino. En efecto:  $|12 \cap 51| = 1$ , pero 12 y 51 no son consecutivas (en otras palabras,  $(e_i)$  es una “trayectoria cerrada” sobre el grafo, pero se autointerseca).

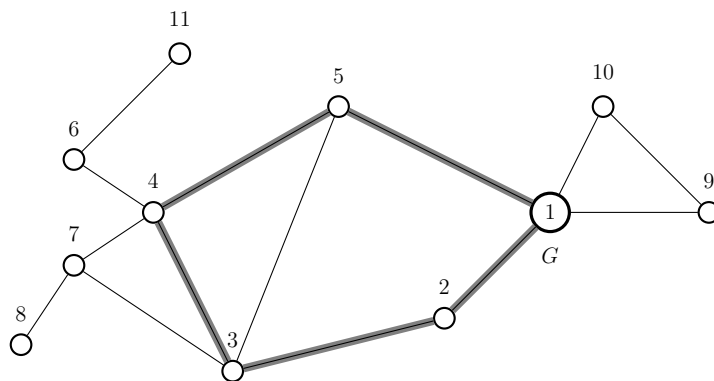


Figura 2.5: El ciclo  $1C_1$ , de longitud 5, en el grafo  $G$ .

Los términos camino y ciclo también se usan frecuentemente para referirse a grafos que tienen esa misma estructura. Más precisamente, decimos que  $G$  es un camino (ciclo) si existe un camino (ciclo) en  $G$  que use todas sus aristas. Claramente, los caminos (ciclos) son grafos conexos y todos los caminos (ciclos) en un grafo pueden verse como subgrafos conexos del mismo. Denotamos con  $P_n$  a los caminos de orden  $n \geq 2$  (y tamaño  $n - 1$ ) y con  $C_n$  a los ciclos de orden (y tamaño)  $n \geq 3$ . Obviamente,  $C_n$  es unicíclico.

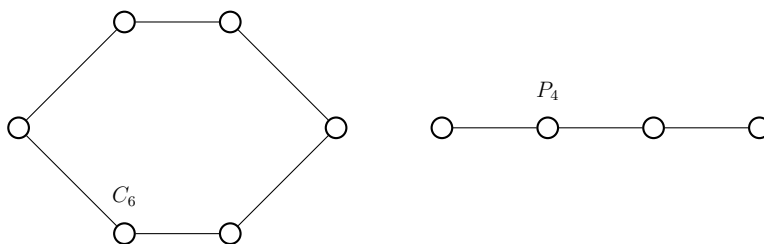


Figura 2.6: Un  $C_6$  (a la izquierda) y un  $P_4$  (a la derecha).

En la Figura 2.6 no se han etiquetado a propósito los vértices de  $C_6$  y  $P_4$ , ya que, para cualquier etiquetamiento de los mismos, los dos grafos siguen siendo respectivamente un ciclo de orden 6 y un camino de orden 4.

**Definición 2.1.4.** Un **bosque** es un grafo que no contiene ciclos (acíclico). Un **árbol** es un bosque conexo.

En particular,  $P_n$  es un árbol y  $C_n$  no es un bosque. Otra familia importante de árboles son las **estrellas**  $S_n$  de orden  $n \geq 3$ . Estas son árboles cuya cantidad de hojas es  $n - 1$ .

En la Figura 2.7, tenemos un bosque de orden 12 y de 4 componentes. Cada componente es un árbol y la que contiene el vértice 10 es una  $S_4$ .

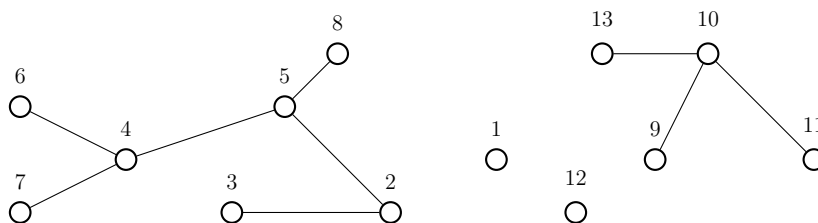


Figura 2.7: Un bosque de orden 12 y 4 componentes.

Es fácil ver que, salvo re-etiquetamiento de los vértices, hay esencialmente un único  $P_n$ ,  $C_n$  o  $S_n$  para cada  $n$ . Esta noción intuitiva de “igualdad” entre grafos vistos como estructuras sin etiquetas, encuentra su formalización en el concepto de isomorfismo. Para no perder generalidad, retomamos para la siguiente definición la notación  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto cualquiera.

**Definición 2.1.5.** Dos grafos  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  se dicen **isomorfos** si existe una función biyectiva  $\varphi : V \rightarrow V'$  que preserve las relaciones de vecindad entre los vértices. Más precisamente:  $a, b$  son vecinos en  $G$  si y sólo si  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  son vecinos en  $G'$ ,  $\forall a, b \in V$ . De lo contrario, decimos que  $G$  y  $G'$  no son isomorfos.

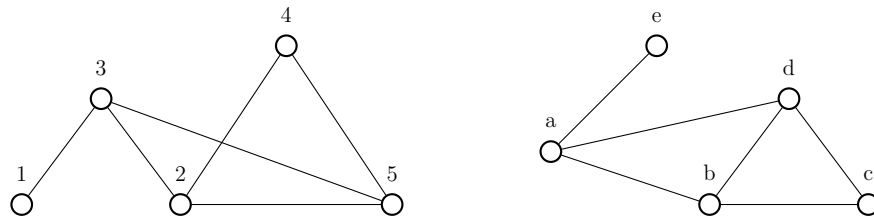


Figura 2.8: Dos grafos isomorfos.

Los dos grafos en la Figura 2.8 son isomorfos. Siendo  $V = [5]$  y  $V' = \{a, b, c, d, e\}$  definimos  $\varphi : V \rightarrow V'$  como:  $\varphi(1) = e, \varphi(2) = b, \varphi(3) = a, \varphi(4) = c$  y  $\varphi(5) = d$ . Es fácil verificar ahora que  $\varphi$  es biyectiva y preserva las relaciones de vecindad.

La relación de isomorfismo se denota con  $G \approx G'$  y no es difícil verificar que es una relación de equivalencia. Consecuentemente, la relación  $\approx$  particiona el conjunto de todos los grafos etiquetados de  $n$  vértices en clases disjuntas llamadas **clases de isomorfismo** (o sea, todos los posibles grafos no-etiquetados de orden  $n$ ). Intuitivamente, dos grafos isomorfos son *esencialmente* iguales en todas esas características estructurales que no dependen de las etiquetas que se le dan a los vértices. Es claro de la definición que hay condiciones necesarias básicas para que dos grafos sean isomorfos. Algunas de estas son: mismo orden y tamaño, misma cantidad de vértices de un cierto grado, misma cantidad de ciclos y de componentes conexas. Sin embargo, como muestra el ejemplo a continuación, ni siquiera el cumplimiento de todas ellas juntas es en general suficiente. De hecho, para grafos de orden alto, es muy difícil en general decidir si son o no isomorfos.

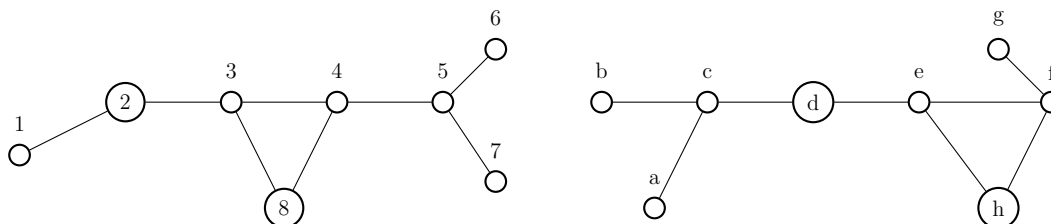


Figura 2.9: Dos grafos no isomorfos.

Los dos unicíclicos en la Figura 2.9 no son isomorfos. Para convencerse de esto, alcanza con mirar las vecindades de los vértices de grado 2. El vértice 2 en el grafo izquierdo es vecino de una hoja, pero en el grafo derecho ni  $d$  ni  $h$  tiene esta característica.

Concluimos esta sección con una advertencia muy importante. *Todos los desarrollos y resultados que siguen en este texto tendrán que ver con GRAFOS ETIQUETADOS.*

## 2.2. Resultados necesarios

Esta sección es, en su primer mitad, más bien una colección de resultados elementales de naturaleza estructural, intercalados con advertencias de notación. En la segunda mitad,

en cambio, introducimos los conceptos de matching, independencia y dominancia, con respectivas nociones satélites y oportunos ejemplos. Incluso se habla de rango y nulidad de un grafo. Todo esto confluye en el final de la sección en un elegante resultado que relaciona los parámetros de número de matching, número de independencia, rango y nulidad en un bosque cualquiera. El lenguaje y la maquinaria introducidos aquí fundamentan por completo el Capítulo 4. Para las demostraciones de los resultados en esta sección referimos el lector a [1], a menos que se diga lo contrario.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $G$  un grafo y sea  $(d_1, \dots, d_n)$  su secuencia de grados.*

*Entonces:  $\sum_{i=1}^n d_i = 2|G|$ .*

En otras palabras, la suma de los grados de los vértices de un grafo equivale al doble de su tamaño.

Si  $G$  es un grafo con  $k$  componentes conexas  $G_i$  tales que  $G_i \approx H \approx G_j \forall i, j \in [k]$ , entonces usamos la notación  $G \approx kH$  para decir que  $G$  es isomorfo a  $k$  copias de  $H$ .

**Teorema 2.2.2.**  *$s(G) = (1, \dots, 1)$  si y sólo si  $G \approx kP_2$ .*

En particular, una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 es que, si  $G$  tiene orden  $n$  y secuencia de grados  $s = (1, \dots, 1)$ , entonces  $n = 2|G|$ .

Antes de seguir enunciando otros resultados, es necesario aclarar una cuestión de notación. Sean  $G$  y  $H$  dos grafos de orden  $n$ . Puesto que hemos identificado cada grafo con su conjunto de arista, o sea  $G = E_G$  y  $H = E_H$ , remarcamos que las operaciones básicas de conjuntos entre dos grafos están bien definidas:  $G \cup H = E_G \cup E_H$ ,  $G \cap H = E_G \cap E_H$  y  $G - H = E_G - E_H$  siguen por lo tanto siendo grafos de orden  $n$ . En particular, si  $H = e = ab$  ( $ab \subseteq [n]$ ), no hay ningún abuso de notación en las operaciones (muy usadas) de agregar ( $G \cup e$ ) o eliminar ( $G - e$ ) una arista  $e$ . Este no es el caso si reemplazamos  $e$  por  $v$ , donde  $v \in [n]$  es un vértice de  $G$ . Algo muy usual en Teoría de Grafos es eliminar un vértice del grafo junto con todas las aristas incidentes en él. Esto se suele denotar con  $G - v$ , lo cual es claramente un abuso de notación, sea que veamos  $G$  como par  $(V_G, E_G)$ , sea que lo identifiquemos con  $E_G$ . Lo mismo pasa con la notación  $v \in G$  ( $e \in G$ , en cambio, está bien definido cuando  $G = E_G$ ). Con estas advertencias en mente, podemos relajarnos del rigor y usar tranquilamente todas esas notaciones: el contexto evitará oportunamente cualquier ambigüedad. Atención: la operación  $G \cup v$  no tiene significado para nosotros.

A continuación, enunciamos cuatro importantes resultados que tienen que ver con árboles y bosques.

**Teorema 2.2.3** (Caracterización de árboles). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo  $T$  de orden  $n$ :*

1.  $T$  es un árbol;
2. Dos vértices cualesquiera en  $T$  están conectados por un único camino en  $T$ ;
3.  $T - e$  es desconexo para cada arista  $e \in T$ ;

4.  $T \cup ab$  es unicíclico para todo par de vértices  $a, b$  no vecinos en  $T$ ;
5.  $T$  es conexo y  $|T| = n - 1$ .

**Teorema 2.2.4.** *Todo árbol de orden  $n > 1$  tiene al menos dos hojas.*

**Teorema 2.2.5** (Tamaño de un Bosque). *Sea  $F$  un bosque de orden  $n$  y sea  $k$  la cantidad de componentes conexas en  $F$ . Entonces  $|F| = n - k$ .*

**Teorema 2.2.6.** *Sean:  $T$  y  $T'$  dos componentes conexas de un bosque,  $a$  un vértice en  $T$  y  $b$  un vértice en  $T'$ . Entonces  $T \cup ab \cup T'$  es un árbol.*

En la Figura 2.10 vemos como un bosque de orden 13 y de 2 componentes se convierte en árbol al agregar una arista (la 12, en línea de trazo) entre los vértices 1 y 2 que se encuentran en distintas componentes.

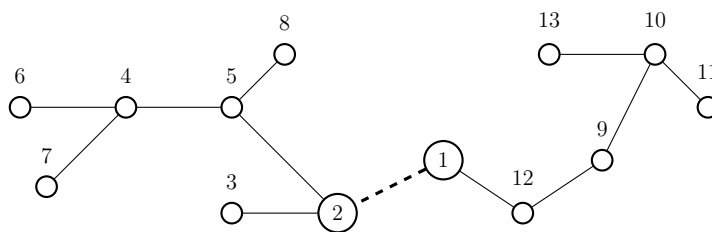


Figura 2.10: Un aplicación del Teorema 2.2.6.

En lo que queda de la sección, introducimos los parámetros relacionados a grafos que serán estudiados en el Capítulo 4.

**Definición 2.2.7.** *Un **matching** en un grafo  $G$  es un subconjunto de aristas de  $G$  disjuntas de a pares. Alternativamente: un **matching** en  $G$  es un subgrafo de  $G$  isomorfo a  $kP_2$ .*

Sea  $M$  un matching en  $G$ . Un vértice  $a$  en  $G$  se dice **saturado** por  $M$  si  $ab \in M$  para algún  $b$ . De lo contrario, decimos que  $a$  es *no-saturado* por  $M$ . Un **matching máximo** en  $G$  es un matching cuyo tamaño es el máximo posible para  $G$ . El **número de matching** de  $G$ , denotado por  $\mu(G)$ , es el tamaño de un matching máximo en  $G$ .

En la Figura 2.11 podemos ver el matching  $M = \{57, 23\}$  (evidenciado en gris), de tamaño 2, en el árbol  $G = \{12, 14, 15, 23, 36, 57\}$ . Los vértices 2, 3, 5 y 7 están saturados por  $M$ , mientras que los vértices 1, 4 y 6 están no-saturados por  $M$ . Claramente,  $M$  no es máximo ya que, por ejemplo, el conjunto  $\{57, 12, 36\}$  también es un matching y es de tamaño 3. Con respecto al grafo  $H = \{12, 13, 14, 25, 36, 64\}$  (Figura 2.11), no es difícil verificar por inspección que  $M' = \{64, 31, 25\}$  (evidenciado en gris) es un matching máximo en  $H$ , con lo cual  $\mu(H) = 3$ . De la misma manera puede corroborarse que  $\{25, 14, 63\}$  también es un matching máximo en  $H$ . Esto muestra que en general no hay un único matching máximo sobre un grafo dado.

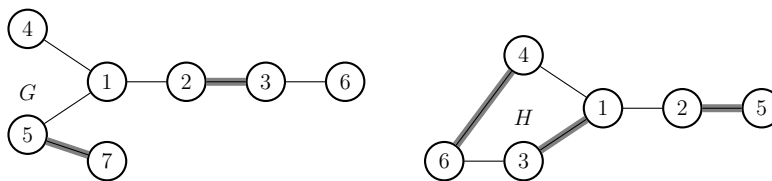


Figura 2.11: Ejemplo de matching en los grafos  $G$  y  $H$ .

**Definición 2.2.8.** Un conjunto **independiente** en un grafo  $G$  es un subconjunto de vértices de  $G$  tales que dos cualesquiera de ellos no son vecinos en  $G$ .

Un conjunto **independiente máximo** en  $G$  es un (conjunto) independiente cuyo tamaño es el máximo posible para  $G$ . El **número de independencia** de  $G$ , denotado por  $\alpha(G)$ , es el tamaño de un independiente máximo en  $G$ .

**Definición 2.2.9.** Un conjunto **dominante** en un grafo  $G$  es un subconjunto  $D$  de vértices de  $G$  tal que todo vértice de  $G$  no perteneciente a  $D$ , tiene un vecino en  $D$ .

Los vértices en  $D$  se llaman vértices *dominantes*; los que no están en  $D$  se llaman vértices *dominados* (o cubiertos). Un conjunto **dominante mínimo** en  $G$  es un (conjunto) dominante cuyo tamaño es el mínimo posible para  $G$ . El **número de dominancia** de  $G$ , denotado por  $\gamma(G)$ , es el tamaño de un dominante mínimo en  $G$ .

En la Figura 2.12 tenemos de nuevo el árbol  $G$  de la Figura 2.11. Están marcados en gris los vértices 2, 4, 5 y 6, los cuales forman un independiente máximo en  $G$ ; y en negro los vértices 1, 5 y 6, los cuales forman un dominante mínimo en  $G$  (no es difícil verificar todo esto por inspección). Por lo tanto:  $\alpha(G) = 4$  y  $\gamma(G) = 3$ . Los vértices 5, 4 y 2, por ejemplo, están dominados (cubiertos) por el 1.  $\{2,3,4,7\}$  es el conjunto de vértices dominados. El conjunto  $\{1,3,7\}$  es independiente;  $\{2,4,6,7\}$  es otro independiente máximo. El conjunto  $\{1,4,6,7\}$  es dominante;  $\{1,3,7\}$  es otro dominante mínimo.

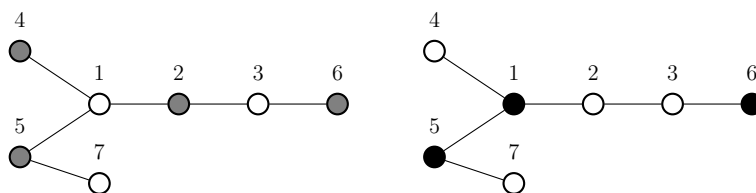


Figura 2.12: Un independiente máximo (en gris) y un dominante mínimo (en negro) en  $G$ .

**Definición 2.2.10.** La matriz de adyacencia de un grafo  $G$  de orden  $n$  es una matriz  $A_{n \times n}$  cuya entrada  $(A_{ij}) = 1$ , si el vértice  $i$  es vecino del vértice  $j$  en  $G$ , y  $(A_{ij}) = 0$  en otro caso.

La matriz de adyacencia asociada a un grafo  $G$  se suele denotar con  $A(G)$ . El **rango** y la **nulidad** de un grafo  $G$  son respectivamente el rango (cantidad de columnas linealmente independientes) y la nulidad (dimensión del espacio nulo) de su matriz de adyacencia. Recordemos lo que afirma el Teorema de Rango-Nulidad (o Teorema Fundamental del Álgebra Lineal): la suma del rango con la nulidad de una matriz es igual a la cantidad de columnas de la misma. Estos parámetros se denotan respectivamente por  $\text{rank}(G)$  y  $\text{null}(G)$ .

**Teorema 2.2.11** ([3], Bevis, 1995). *Si  $F$  es un bosque, entonces  $\text{rank}(F) = 2\mu(F)$ .*

Sea  $G$  un grafo de orden  $n$  y sea  $[n] = A \dot{\cup} B$  una partición de los vértices de  $G$  con la siguiente propiedad: si  $ab$  es una arista de  $G$ , entonces  $a \in A$  y  $b \in B$ . Bajo estas condiciones, decimos que  $G$  es **bipartito**. Una famosa caracterización afirma que  $G$  es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar. En particular, todo bosque es bipartito por ser acíclico.

**Teorema 2.2.12** ([4], König, 1931). *Si  $G$  es un grafo bipartito de orden  $n$ , entonces  $\mu(G) + \alpha(G) = n$ .*

Combinando los Teoremas 2.2.11 y 2.2.12 con el Teorema de Rango-Nulidad, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.13.** *Si  $F$  es un bosque, entonces  $\alpha(F) = \text{null}(F) + \mu(F)$ .*

Podemos agrupar los últimos 3 resultados en un solo gran teorema para bosques.

**Teorema 2.2.14.** *Sea  $F$  un bosque de orden  $n$ . Entonces:*

1.  $\text{rank}(F) = 2\mu(F)$ ;
2.  $\mu(F) + \alpha(F) = n$ ;
3.  $\alpha(F) = \text{null}(F) + \mu(F)$ .

Las siguientes son las matrices de adyacencia de los grafos  $G$  y  $H$  en la Figura 2.11. Para  $G$  tenemos que  $\text{rank}(G) = 6$  y por ende  $\text{null}(G) = n - \text{rank}(G) = 7 - 6 = 1$ . Puesto que  $G$  es un árbol, podemos verificar para el mismo las ecuaciones del Teorema 2.2.14 usando además que  $\mu(G) = 3$  y  $\alpha(G) = 4$ .

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Respecto a  $H$  en cambio, no nos esperamos que 2.2.14 aplique ya que este grafo no es un bosque. Sin hacer ningún cálculo podemos ya decir que la ecuación (1) de 2.2.14 no puede ser cierta. En efecto, si lo fuera, tendríamos por un lado que  $\text{rank}(H) = 6$ , pues  $\mu(H) = 3$ . Pero por otro lado, obsérvese que  $A(H)$  tiene dos columnas iguales (la 3 y la 4), con lo cual debe ser  $\text{rank}(H) \leq 5$ .

## 2.3. 2-Switch y Primer Teorema de Transición

Estamos por presentar formalmente el objeto fundamental de este texto: el 2-switch. En la literatura matemática se lo suele definir de la siguiente manera ([1], pag.23). *Sea  $G$  un grafo que contiene cuatro vértices distintos  $a, b, c, d$  tales que  $ab, cd \in G$  y  $ac, bd \notin G$ . Un*

2-switch en  $G$  es un proceso que elimina las aristas  $ab$  y  $cd$  desde  $G$  y agrega las aristas  $ac$  y  $bd$ . En esta sección nos inspiramos en esa definición para dar otra más general y más formal, que incluye a la que acabamos de citar como caso particular. La novedad más interesante es que vamos a definir el 2-switch como función, desde el conjunto  $\mathcal{G}_n$  en si mismo, donde  $\mathcal{G}_n$  es el conjunto de partes de  $\binom{[n]}{2}$ . Puesto que hemos decidido identificar un grafo con su conjunto de aristas, tenemos que  $\mathcal{G}_n$  representa esencialmente la familia de todos los grafos de orden  $n$ . Como  $|\binom{[n]}{2}| = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$ , se sigue que  $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$ .

Deduciremos luego las propiedades básicas del 2-switch en el marco sumamente general de Teoría de Conjuntos y de Funciones, pero sin perder de vista nunca el paralelo con la Teoría de Grafos. Este camino nos llevará sobre el final de la sección al Primer Teorema de Transición (PTT), un resultado fuerte que garantiza la posibilidad de transformar un grafo, mediante 2-switches, en cualquier otro con la misma secuencia de grados. Este teorema será fuente de inspiración para la mayoría de los resultados en los capítulos siguientes.

Recordamos algo que ya dijimos en el Capítulo 1. Todos los resultados y definiciones de este capítulo son originales, excepto por los siguientes: Lema 2.3.8, Teoremas 2.3.6, 2.3.9 (PTT) y 2.3.10 (Havel-Hakami).

Para definir el 2-switch como función es necesario primero introducir el concepto de conjunto intercambiable.

**Definición 2.3.1.** Decimos que  $(a,b)(c,d) := \{(a,b), (c,d)\}$  es **intercambiable** en  $G \in \mathcal{G}_n$  si satisface simultáneamente las siguientes 3 condiciones:

1.  $\{ab, cd\} \subseteq G$ ;
2.  $ab \cap cd = \emptyset$ ;
3.  $\{ac, bd\} \subseteq G^c$ .

De lo contrario, decimos que  $(a,b)(c,d)$  es **estable** en  $G$ .

**Definición 2.3.2.** Sea  $G \in \mathcal{G}_n$ . Un **2-switch** es una función  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathcal{G}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$  tal que:

1.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} G = \tau(G) = (G - \{ab, cd\}) \cup \{ac, bd\}$ , si  $(a,b)(c,d)$  es intercambiable en  $G$ ;
2.  $\tau(G) = G$ , si  $(a,b)(c,d)$  es estable en  $G$ .

En este segundo caso decimos que  $\tau$  es **nulo** en  $G$ , o, equivalentemente, que  $G$  es un punto fijo para  $\tau$ . El objeto  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  se denomina **matriz de acción** de  $\tau$ .

Es del todo normal preguntarse en este punto: ¿Por qué se ha usado el artificio de los pares ordenados en las dos definiciones anteriores? Es decir: ¿por qué  $(a,b)(c,d)$  y no  $\{ab, cd\}$ ? Esto seguramente no es lo que uno esperaría como natural, pero es necesario. La razón no es tan obvia, sin embargo, se clarifica por suerte mediante un simple contraejemplo.

Tómese  $G = (1234) \approx P_4$  e imaginemos remplazar  $(a,b)(c,d)$  por  $\{ab, cd\}$  en las Definiciones 2.3.1 y 2.3.2. Queremos aplicar ahora  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  a  $G$ . Para esto, hay que verificar si  $\{12, 43\}$  es o no intercambiable en  $G$ . La condición (3) de 2.3.1 requiere  $\{14, 23\} \subseteq G^c$  pero



vemos que falla, pues  $23 \in G$ . Luego,  $\{12, 43\}$  es estable en  $G$ . Por otro lado es de rápida verificación el hecho de que  $\{12, 34\}$  es intercambiable en  $G$ . ¡Pero  $\{12, 43\} = \{12, 34\}$ ! Absurdo. Esto nos convence que la noción de intercambiabilidad necesita de *pares ordenados* para una definición consistente y para un correcto funcionamiento del 2-switch.

De las definiciones de intercambiable y de 2-switch se siguen estas propiedades:

1.  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $G$  si y sólo si lo es  $(c, d)(a, b)$ ; lo mismo vale si reemplazamos este último por  $(d, c)(b, a)$  o  $(b, a)(d, c)$ ;
2.  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$  (las 4 matrices de acción que se obtienen permutando filas o columnas de una matriz  $2 \times 2$  dada, representan todas el mismo 2-switch);
3. en general:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$  (contraejemplo:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  en  $G = (1234) \approx P_4$ );
4. combinando las 3 afirmaciones anteriores deducimos que también  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es distinto en general de cualquiera de los otros tres 2-switches equivalentes a  $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ .

Veamos rápidamente la prueba de un par de estas propiedades; las otras pueden verificarse fácilmente de la misma manera. El hecho de que  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $G$  si y sólo si  $(d, c)(b, a)$  es intercambiable en  $G$ , se basa en las siguientes identidades triviales: 1)  $\{ab, cd\} = \{dc, ba\}$ ; 2)  $ab \cap cd = dc \cap ba$ ; 3)  $\{ac, bd\} = \{db, ca\}$ . Estas implican inmediatamente que uno de los dos es intercambiable cuando el otro lo es. Podemos usar ahora esta información para mostrar más agilmente que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ . En efecto, alcanza con notar que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}G = (G - \{ab, cd\}) \cup \{ac, bd\} = (G - \{dc, ba\}) \cup \{db, ca\} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}G$ , y luego combinarlo con el hecho de que  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $G$  si y sólo si lo es  $(d, c)(b, a)$ .

En la Figura 2.13 vemos la aplicación del 2-switch  $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$  al grafo  $G = \{12, 23, 26, 36, 34, 35, 48, 56, 57, 79\} \in \mathcal{G}_9$ . El conjunto  $(2, 3)(7, 9)$  es intercambiable en  $G$  ya que cumple: 1)  $\{23, 79\} \subset G$ ; 2)  $23 \cap 79 = \emptyset$ ; 3)  $\{27, 39\} \subset G^c$ . Luego,  $\tau(G) = (G - \{23, 79\}) \cup \{27, 39\}$ . En definitiva,  $\tau$  elimina las aristas 23 y 79 desde  $G$  y las reemplaza por las aristas 27 y 39 que no están en  $G$ . En la Figura 2.13 se muestran  $G$  y  $\tau(G)$  y se evidencian los vértices y aristas involucrados en la transformación. Obsérvese que si bien estos dos grafos no son isomorfos ( $\tau(G) \supset C_5$ , pero  $G$  no), el grado de cada vértice se conserva.

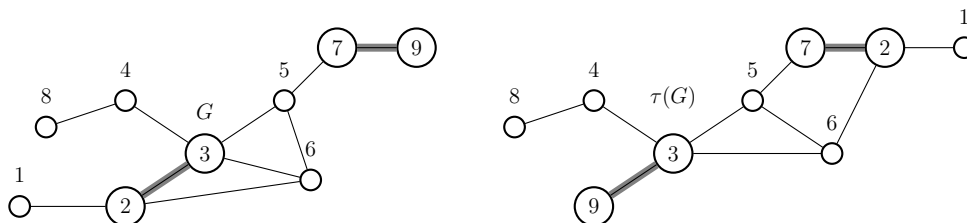


Figura 2.13

Es fácil ver que en cambio los siguientes 2-switches sobre  $\mathcal{G}_9$  son todos nulos en  $G$ :  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ . Los 2-switches  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  también son nulos en  $G$ , pero por una razón mucho

más radical que los anteriores:  $\{10, -1, 0, \pi, \sqrt{2}\} \cap [9] = \emptyset$ . La moraleja de estos últimos dos ejemplos es: el 2-switch está bien definido para cualquier símbolo se coloque en su matriz de acción. Obsérvese de nuevo la Definición 2.3.1: no hay restricción alguna para los elementos  $a, b, c, d$  y por lo tanto no deben necesariamente pertenecer al conjunto de vértices del grafo.

En la Figura 2.14 tenemos todas las clases de isomorfismo  $H_i$  ( $i \in [11]$ ) de los grafos de orden 4. En otras palabras, los 11 grafos no-etiquetados de 4 vértices.

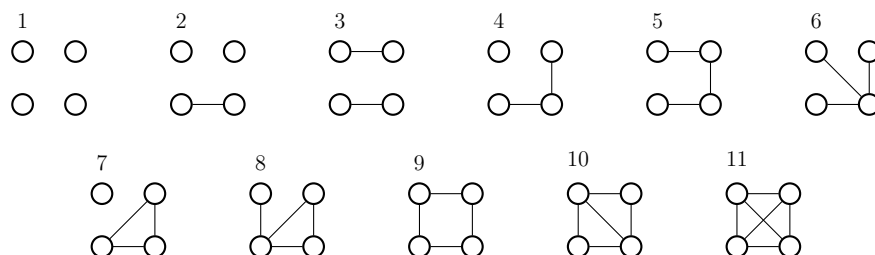


Figura 2.14: Los 11 grafos no-etiquetados de 4 vértices.

Esto nos ayudará a determinar por completo el 2-switch  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ ; y de manera eficiente, es decir, sin tener que evaluar la función en todos los 64 grafos de  $\mathcal{G}_4$ . Dado  $G \in \mathcal{G}_4$ , hay que verificar si  $(1, 2)(3, 4)$  es intercambiable en  $G$ . Para esto, tiene que cumplirse que:

- I)  $\{12, 34\} \subseteq G$ ;
- II)  $12 \cap 34 = \emptyset$ ;
- III)  $\{13, 24\} \subseteq G^c$ .

La condición (II) nos dice en particular que  $G$  tiene que tener al menos dos aristas disjuntas y esto descarta automáticamente las clases  $H_i$ , para  $i \in \{1, 2, 4, 6, 7\}$ . Por (III), se necesita lo mismo para  $G^c$  y por lo tanto podemos descartar también  $H_{11}, H_{10}$  y  $H_8$ , pues sus respectivos complementos son  $H_1, H_2$  y  $H_3$ . Por ende, si  $i \in [11] - \{3, 5, 9\}$ , tenemos que  $\tau$  es nulo en  $G \approx H_i$  (todo esto sin hacer ningún cálculo).

Dicho de otra forma, hemos establecido hasta el momento que  $G$  tiene que ser isomorfo a  $2P_2$  ( $H_3$ ),  $P_4$  ( $H_5$ ) o  $C_4$  ( $H_9$ ) para esperar alguna efectiva transformación por medio de  $\tau$ . En principio hay  $4! = 24$  maneras de etiquetar cada  $H_i$  con números en  $[4]$ , aunque cuestiones de simetría estructural pueden disminuir bastante esa cantidad. Sin embargo, observemos que (I) impone que  $G_0 = \{12, 34\}$  sea el único  $2P_2$  donde  $(1, 2)(3, 4)$  puede ser intercambiable. Por (I) y (II),  $G_1 = (1234)$  es el único  $P_4$  donde  $(1, 2)(3, 4)$  puede ser intercambiable. Respecto a  $H_9$  en cambio, notemos primero que  $12, 34 \in G_2 \approx C_4$ , por (I). Luego, como (III) implica  $13 \notin G_2$ , y como  $d_1 = 2$ , debe ser entonces  $14 \in G_2$ . Pero ahora  $23$  es la única arista que cierra el ciclo de longitud 4, con lo cual  $G_2 = (12341)$  es el solo  $C_4$  donde  $(1, 2)(3, 4)$  puede ser intercambiable. Confirmamos finalmente esta posibilidad verificando (II) en  $G_2$ . Análogamente para  $G_0$  y  $G_1$ , verificando (II) y (III) en el primero, y solo (III) en el segundo. En la Figura 2.15 se muestra la aplicación de  $\tau$  a estos 3 grafos.

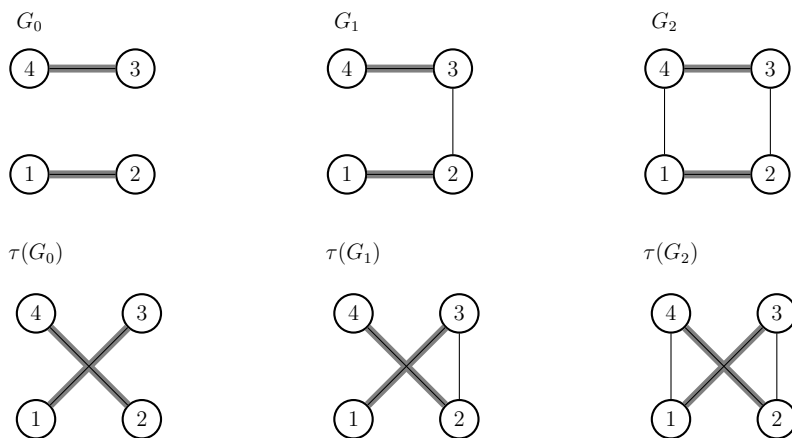


Figura 2.15

Concluimos por lo tanto que  $\tau$  es no-nulo en esos 3 casos  $(G_0, G_1, G_2)$  y nulo en los otros 61. Alternativamente, podemos decir que  $\tau$  tiene 61 puntos fijos.

El 2-switch coincide con la función identidad cuando  $n < 4$ , sin importar la combinación de los símbolos  $a, b, c$  y  $d$  en su matriz de acción. En efecto, se necesita  $n \geq 4$  para que  $ab \cap cd = \emptyset$  en algún  $G \in \mathcal{G}_n$ . Lo mismo sucede, por definición, cuando  $|\{a, b, c, d\} \cap [n]| \neq 4$ , independientemente de  $n$ . También es importante notar que:

1. todo 2-switch no-nulo sobre el grafo  $G$  borra dos aristas de  $G$  y las reemplaza por dos aristas de  $G^c$ ;
2. las filas de la matriz de acción del 2-switch corresponden a las aristas de  $G$  que se quieren eliminar y sus columnas corresponden a las aristas de  $G^c$  que se quieren agregar;
3. para cualquier 2-switch  $\tau$ :  $|\tau(G)| = |G|$ , para todo  $G \in \mathcal{G}_n$  (una consecuencia inmediata de la definición de 2-switch);
4. si  $\tau$  es un 2-switch no-nulo en  $G$ , entonces  $|\tau(G) - G| = |G - \tau(G)| = 2$ ;
5.  $ab \cap cd = \emptyset$  si y sólo si  $ac \cap bd = \emptyset$ ;
6. si  $ab$  y  $cd$  están en distintas componentes de  $G$ , entonces  $(a, b)(c, d)$  y  $(a, b)(d, c)$  son intercambiables en  $G$ ;
7. si  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $G$ , entonces  $(a, b)(c, d)$  es estable en  $\tau(G)$ ;
8. fijadas dos aristas  $ab, cd$  cualesquiera en  $G$ , hay a lo sumo dos 2-switches no-nulos en  $G$  que intervienen sobre ellas.

La última observación se debe al simple hecho que, en el mejor de los casos, puede remplazarse  $\{ab, cd\}$  por  $\{ac, bd\}$  con  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , o por  $\{ad, bc\}$  con  $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ . Precisamente, el caso más favorable es cuando  $(a, b)(c, d)$  y  $(a, b)(d, c)$  son simultáneamente intercambiables en  $G$ . Por ejemplo, si  $G \approx C_3$ , todo 2-switch es nulo en  $G$  y por lo tanto ningún par de aristas va a poder

ser modificado. Si en cambio consideramos las aristas 12, 34 en  $G = (1234) \approx P_4$ , entonces solamente  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  puede reemplazarlas, ya que  $(1, 2)(4, 3)$  es estable en  $G$ . Por último, si tomamos 12, 34 en  $G = \{12, 34\} \approx 2P_2$ , tenemos que  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  las pueden reemplazar, pues  $(1, 2)(3, 4)$  y  $(1, 2)(4, 3)$  son simultáneamente intercambiables en  $G$ .

Sobre la base de lo que acabamos de discutir, diremos que  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  **intercambia** (o **reemplaza**, o *modifica*) las aristas  $ab, cd$  en  $G$  cuando  $\tau$  es no-nulo sobre  $G$ . Sin importar si es nulo o no en  $G$ , también podemos decir que  $\tau$  es un 2-switch *entre* las aristas  $ab$  y  $cd$ . Este lenguaje se revelará cómodo e intuitivo, sobre todo en las próximas secciones.

**Lema 2.3.3.** Sean:  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un 2-switch en  $\mathcal{G}_n$ ,  $\vec{S} = (a, b)(c, d)$  e  $\mathcal{I} := \{G \in \mathcal{G}_n : \vec{S} \text{ es intercambiable en } G\}$ . Entonces:

1.  $\tau$  es idempotente, es decir,  $\tau^2 = \tau$ ;
2. Su restricción  $\tau' : \mathcal{I} \rightarrow \tau(\mathcal{I})$  es biyectiva;
3. Si  $G \in \mathcal{I}$ , entonces  $\tau(G) \neq G$ .

*Demostración.* Si  $G \in \mathcal{I}$ , tenemos que  $\vec{S}$  se vuelve estable en  $\tau(G)$  y por lo tanto  $\tau^2(G) = \tau(G)$ . Si  $G \notin \mathcal{I}$ , entonces  $\tau(G) = G$ , con lo cual  $\tau^2(G) = \tau(G)$ .

Sean  $S = \{ab, cd\}$  y  $S^* = \{ac, bd\}$ . Para probar (2), sean  $G, H \in \mathcal{I}$  tales que  $G \neq H$ . Entonces  $G \neq H$  implica  $G - S \neq H - S$ , pues  $S \subseteq G \cap H$ . Luego,  $(G - S) \cup S^* \neq (H - S) \cup S^*$ , pues  $S^* \subseteq G^c \cap H^c$ . Esto último equivale a  $\tau'(G) \neq \tau'(H)$ , lo cual prueba que  $\tau'$  es inyectivo. Más aun,  $\tau'$  es sobre por definición, ya que es una función de un conjunto en su imagen. Por lo tanto, concluimos que  $\tau'$  es biyectiva.

La afirmación (3) se sigue inmediatamente de la definición de 2-switch.  $\square$

Una consecuencia del Lema 2.3.3 es que, si  $\{a, b, c, d\} \subseteq [n]$ , entonces  $\tau$  no es inyectivo en  $\mathcal{G}_n \forall n \geq 4$ . Para ver esto, sea  $G \in \mathcal{I}$ . Entonces, aunque  $\tau(G) \neq G$ , tenemos que  $\tau^2(G) = \tau(G)$ .

**Teorema 2.3.4.** Sean:  $\vec{S} = (a, b)(c, d)$ ,  $\mathcal{I} = \{G \in \mathcal{G}_n : \vec{S} \text{ es intercambiable en } G\}$ ,  $\vec{S}^* = (a, c)(b, d)$  e  $\mathcal{I}^* := \{G \in \mathcal{G}_n : \vec{S}^* \text{ es intercambiable en } G\}$ . Además, sean  $\tau' : \mathcal{I} \rightarrow \tau(\mathcal{I})$  y  $\sigma' : \mathcal{I}^* \rightarrow \sigma(\mathcal{I}^*)$  restricciones respectivamente de los 2-switches  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $\sigma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{G}_n$ . Entonces:

1.  $\tau(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^*$  y  $\sigma(\mathcal{I}^*) = \mathcal{I}$ ;
2.  $\tau'$  y  $\sigma'$  son inversas una de la otra;
3.  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}^*$  son disjuntos y tienen la misma cardinalidad.

*Demostración.* Sean  $S = \{ab, cd\}$  y  $S^* = \{ac, bd\}$ . Si  $Y \in \tau(\mathcal{I}) = \{\tau(X) : X \in \mathcal{I}\}$ , entonces  $Y = (X - S) \cup S^*$ , para algún  $X \in \mathcal{I}$ . Claramente, se cumplen las 3 condiciones de intercambiabilidad para  $\vec{S}^*$  en  $Y$  y por lo tanto  $Y \in \mathcal{I}^*$ . Recíprocamente, sea  $Y \in \mathcal{I}^*$ . Entonces podemos escribir  $Y = Z \cup S^*$ , para algún  $Z \notin \mathcal{I}^*$ . Más aun, obsérvese que  $S \subseteq Y^c$  implica  $S \subseteq Z^c$ . Luego:  $Z = (Z \cup S) - S$  y tenemos que  $Z \cup S = X \in \mathcal{I}$ . Por lo tanto,

acabamos de obtener que  $Y = (X - S) \dot{\cup} S^* = \tau'(X) \in \tau(\mathcal{I})$  y finalmente queda probada la igualdad  $\tau(\mathcal{I}) = \mathcal{I}^*$ .

Existencia, unicidad y biyectividad de la inversa  $(\tau')^{-1}$  de  $\tau'$  son una consecuencia inmediata de la biyectividad de esta última. Aplicando el Lema 2.3.3, tenemos que  $\sigma'$  es biyectiva. Si  $Y \in \mathcal{I}^*$ , entonces  $Y = \tau'(X) = (X - S) \cup S^*$ , para algún  $X \in \mathcal{I}$ . Luego,  $\sigma'(Y) = \sigma'\tau'(X) = (Y - S^*) \cup S = X$ , lo cual obliga a que  $(\tau')^{-1} = \sigma'$  por unicidad de la inversa. Consecuentemente:  $\sigma(\mathcal{I}^*) = \sigma'\tau'(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ .

Puesto que entonces los conjuntos  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{I}^*$  están en correspondencia biunívoca por medio de  $\tau'$  y  $\sigma'$ , se sigue que ambos tienen la misma cardinalidad. Finalmente, observemos que, por definición,  $\bar{S}$  y  $\bar{S}^*$  no pueden ser simultáneamente intercambiables en un mismo grafo. Esto muestra que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^* = \emptyset$ .  $\square$

El inciso (2) del Teorema 2.3.4 puede reformularse más elegantemente de la siguiente manera.

**Corolario 2.3.5.** *Sea  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un 2-switch en  $\mathcal{G}_n$  y sea  $(a, b)(c, d)$  intercambiable en  $G$ . Entonces  $\sigma = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t$  es el único 2-switch tal que  $\sigma\tau(G) = G$ .*

Manteniendo contexto y notación del Corolario 2.3.5, nos referiremos a  $\sigma$  como *el 2-switch inverso* de  $\tau$  y se denotará de acá en adelante con  $\tau^{-1}$ . Aunque ya sabemos que en general un 2-switch no tiene una inversa en sentido global, el hecho que la tenga localmente alcanza para todos nuestros desarrollos posteriores, ya que solo tendrán relevancia todos esos 2-switches que efectivamente *modifican* a un grafo dado. Remarcamos que, curiosamente, para obtener la matriz de acción de  $\tau^{-1}$ , alcanza con transponer la de  $\tau$ .

En la Figura 2.16 se muestran los árboles  $G$  y  $G' = \tau(G)$ , donde  $\tau$  es el 2-switch  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{G}_6$ . El 2-switch inverso de  $\tau$  es  $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  y es fácil verificar que  $\tau^{-1}(G') = G$ .

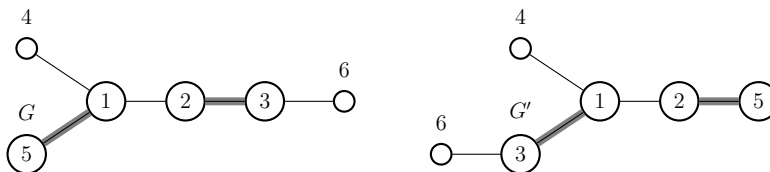


Figura 2.16:  $G' = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}G$ ,  $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}G'$ .

Si prestamos atención en los ejemplos mostrados hasta ahora, podemos notar que en todos la secuencia de grados del grafo transformado coincide con la del grafo inicial. Esto no es casualidad y, de hecho, es sin duda la propiedad fundamental del 2-switch. A continuación, presentamos una demostración de este hecho.

**Teorema 2.3.6.** *El 2-switch preserva la secuencia de grados.*

*Demostración.* Sea  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un 2-switch sobre un grafo  $G \in \mathcal{G}_n$ . Si  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $G$ , los grados de los 4 vértices  $a, b, c, d$  disminuyen momentáneamente en 1 cuando  $\tau$  elimina las aristas  $ab$  y  $cd$ . Pero al agregar  $ac$  y  $bd$  esta disminución se compensa.

Si  $(a, b)(c, d)$  es estable en  $G$ , la afirmación es obvia.  $\square$

Dados  $A, B \in \mathcal{G}_n$ , serán objeto central de nuestro estudio las sucesiones finitas  $(\tau_i)_{i \in [N]}$  de 2-switches no-nulos tales que  $B = \tau_N \dots \tau_1(A)$ . Bajo estas condiciones decimos que la sucesión  $(\tau_i)$  transforma  $A$  en  $B$  y que su tamaño  $|( \tau_i )|$  es  $N$ . Por el Teorema 2.3.6 es necesario que  $A$  y  $B$  coincidan en secuencia de grados para que dicha sucesión pueda existir. Muy pronto vamos a ver que esto es además suficiente. Para lo que sigue convenimos que “sucesión de 2-switches” sea sinónimo de “sucesión finita de 2-switches no-nulos”. En el caso trivial  $A = B$ , asumimos que la sucesión vacía  $(\emptyset)$  transforma  $A$  en  $A$ . Sin embargo, existen sucesiones no-vacías que realizan transformaciones de un grafo en si mismo. Un ejemplo trivial es  $\tau^{-1}\tau$ , en un grafo  $A$  adecuado. Veamos uno no-trivial (Figura 2.17). Tomando  $A = \{31, 41, 12, 25\} \in \mathcal{G}_5$ , tenemos que  $(\tau_i)_{i \in [3]} = \left( \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)$  satisface que  $\tau_3\tau_2\tau_1(A) = A$ :  $A \mapsto_{\tau_1} A_1 \mapsto_{\tau_2} A_2 \mapsto_{\tau_3} A$ .

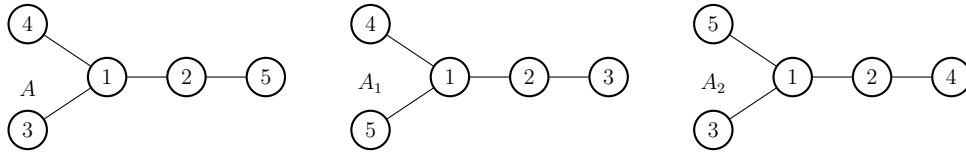


Figura 2.17:  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A_1$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A_2$ .

¡Atención! Si bien en este ejemplo se cumple que  $\tau_2\tau_1 = \tau_3^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , tenemos que, en general, una composición de 2-switches no es un 2-switch. Para ver esto, consideremos  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  en  $\mathcal{G}_5$ . Si hacemos  $\tau_2\tau_1(A)$ , donde  $A = (12345) \approx P_5$ , obtenemos el camino  $B = (13425)$ . Si fuera  $\tau_2\tau_1 = \tau_0$ , para algún 2-switch  $\tau_0$  en  $\mathcal{G}_5$ , tendríamos que  $|A - B| \leq 2$  (un 2-switch reemplaza a lo sumo dos aristas del grafo donde actúa). Pero  $A \cap B = \emptyset$ , con lo cual  $|A - B| = |A| = 4$ . Luego,  $\tau_2\tau_1$  no puede ser un 2-switch.

**Corolario 2.3.7.** *Si es posible transformar el grafo  $A$  en el grafo  $B$  mediante una sucesión de 2-switches, entonces es posible transformar  $B$  en  $A$  con una sucesión del mismo tamaño.*

*Demostración.* Sea  $(\tau_i)_{i \in [N]}$  una sucesión que transforma  $A$  en  $B$ . Para cada  $i$ , podemos entonces aplicar el Corolario 2.3.5 a los grafos  $A_{N-i}$  y  $A_{N-i+1}$  y usar el 2-switch inverso  $\tau_{N-i+1}^{-1}$  para volver de  $A_{N-i+1}$  a  $A_{N-i}$ . La sucesión de 2-switches  $(\tau_N^{-1}, \dots, \tau_1^{-1})$  transforma por lo tanto  $B$  en  $A$  y tiene el mismo tamaño de  $(\tau_i)$ .  $\square$

Todo está casi listo ahora para el Primer Teorema de Transición (PTT). Necesitamos un último lema previo, el cual dice esencialmente que es posible, mediante una sucesión de 2-switches, transformar un grafo  $A$  en un grafo  $B$  donde un vértice de grado máximo tiene por vecinos a vértices de grado lo mayor posible. La prueba del próximo lema y del PTT son simples adaptaciones de la prueba original a nuestro lenguaje y notación. Denotamos con  $\Gamma_s$  al conjunto de todos los grafos con una misma secuencia de grados  $s$ .

**Lema 2.3.8** ([1], T.1.10). *Sea  $A \in \Gamma_s$  tal que  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ . Entonces es posible transformar, mediante una sucesión de 2-switches, el grafo  $A$  en un grafo  $B \in \Gamma_s$  tal que  $N_B(1) = \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que esta afirmación es falsa. De todos los grafos en los cuales  $A$  puede ser transformado, sea  $B$  uno para el cual la suma de las etiquetas de los vértices en  $N_B(1)$  es mínima. Puesto que  $N_B(1) \neq \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ , el vértice 1 es adyacente al vértice  $k$  y no es adyacente al vértice  $j$ , con  $j < k$  y por lo tanto  $d_j \geq d_k$ . Luego,  $\exists \ell \in [n]$  tal que  $j\ell \in B$  y  $k\ell \notin B$ . Observemos ahora que  $(1, k)(j, \ell)$  es intercambiable en  $B$ . Entonces, para el 2-switch  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & k \\ j & \ell \end{pmatrix}$ , tenemos que  $\tau(B) = (B - \{1k, j\ell\}) \cup \{1j, k\ell\}$  es un grafo en  $\Gamma_s$  para el cual la suma de las etiquetas de los vértices en  $N_{\tau(B)}(1)$  es estrictamente menor que la de  $N_B(1)$ . Esta es una contradicción. Por ende, es posible realizar la transformación deseada.  $\square$

**Teorema 2.3.9** ([1], T.1.11 - Primer Teorema de Transición). *Si  $A, B \in \Gamma_s$ , entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de una sucesión de 2-switches.*

*Demostración.* En primer lugar, observemos que es suficiente un oportuno re-etiquetamiento de los vértices de  $A$  y  $B$  para que su secuencia de grados se convierta en una sucesión no-creciente.

La prueba se llevará al cabo por inducción sobre el orden  $n$  de  $A$  y  $B$ . Si  $n \leq 4$ , el resultado es inmediato. Dado  $n > 4$ , supóngase que todo par de grafos de orden  $n - 1$ , con la misma secuencia de grados, puede transformarse recíprocamente mediante una sucesión de 2-switches. Por el lema anterior, es posible transformar  $A$  y  $B$ , usando 2-switches, respectivamente en grafos  $A', B' \in \Gamma_s$  tales que  $N_{A'}(1) = \{2, \dots, d_1 + 1\} = N_{B'}(1)$ . Puesto que  $A' - 1$  y  $B' - 1$  son dos grafos de orden  $n - 1$  con la misma secuencia de grados, se sigue por hipótesis inductiva que pueden transformarse recíprocamente a través de una sucesión de 2-switches. Luego, lo mismo puede afirmarse sobre  $A'$  y  $B'$  y esto implica el resultado requerido para  $A$  y  $B$ .  $\square$

En [1] el 2-switch es introducido más como un medio para un fin. En efecto, al PTT no se le da mucho uso e importancia en sí mismo, y solo es visto como resultado auxiliar para la demostración del Teorema de Havel-Hakami (THH). Este teorema es muy interesante ya que caracteriza las llamadas secuencias gráficas. Decimos que una sucesión  $s$  de enteros no negativos es **gráfica** si  $s$  es la secuencia de grados de algún grafo. A continuación, citamos el THH solo por eventual curiosidad del lector, ya que no lo usaremos.

**Teorema 2.3.10** ([1], T.1.12, pag.24 - T. de Havel-Hakami). *Sea  $s = (d_1, \dots, d_n)$  una sucesión de enteros no negativos tal que  $\Delta = d_1 \geq \dots \geq d_n$ . Entonces  $s$  es gráfica si y sólo si  $s' = (d_2 - 1, \dots, d_{\Delta+1} - 1, d_{\Delta+2}, \dots, d_n)$  es gráfica.*

Remarcamos que, al contrario de [1], en este texto el 2-switch es protagonista y el PTT es un resultado fundamental, ya que es el punto de partida para todo lo que se descubrirá a lo largo del próximo capítulo.

# Capítulo 3

## Resolución del Problema

Dados dos árboles con la misma secuencia de grados, ¿es posible transformar uno en el otro mediante 2-switches que preserven la estructura de árbol? Esta fue la pregunta que guió el desarrollo de todo este trabajo. En este capítulo, finalmente, encuentra su respuesta. No solo mostramos que eso es posible, si no que también vale una afirmación mucho más fuerte. En efecto, es posible transformar recíprocamente dos bosques cualesquiera con la misma secuencia de grados por medio de una sucesión computable de 2-switches que preservan aciclicidad. Donde *computable* significa que se puede explicitar cada 2-switch de dicha sucesión mediante un algoritmo, programable y ejecutable con facilidad con una computadora. Este es, en síntesis, el contenido de la Sección 3.2. La primer sección del capítulo, la 3.1, caracteriza de que manera hay que efectuar un 2-switch  $\tau$  sobre un árbol (bosque)  $F$  para que  $\tau(F)$  también sea un árbol (bosque). Es aquí que aparecen por primera vez las dos variantes especiales del 2-switch: el *t-switch* (acrónimo de tree-2-switch) y el *f-switch* (forest-2-switch).

Recordamos algo que ya dijimos en el Capítulo 1: todos los resultados y definiciones de este capítulo son originales.

### 3.1. T-Switch y F-Switch

Empezamos esta sección definiendo que es un t-switch y viendo algunos ejemplos. Recordemos la advertencia hecha en la Sección 2.3: “sucesión de 2-switches” es sinónimo de “sucesión finita de 2-switches no-nulos”.

**Definición 3.1.1.** *Sea  $\Psi$  el conjunto de todos los árboles y sea  $T \in \Psi$ . Un **t-switch** sobre  $T$  es un 2-switch  $\tau$  tal que  $\tau(T) \in \Psi$ .*

En la Figura 3.1 se muestra la aplicación del 2-switch  $\tau_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$  al árbol  $T \in \mathcal{G}_{10}$ . Como  $\tau_0(T)$  es un árbol, tenemos que  $\tau_0$  es un t-switch en  $T$ .



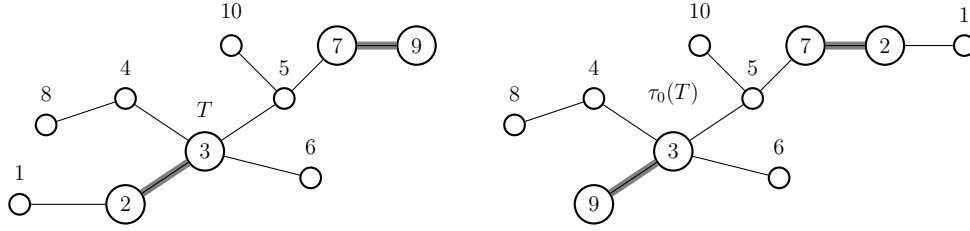


Figura 3.1

El 2-switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ , en cambio, no es un t-switch en  $T$ , pues transforma este último en un grafo unicíclico disconexo (Figura 3.2).

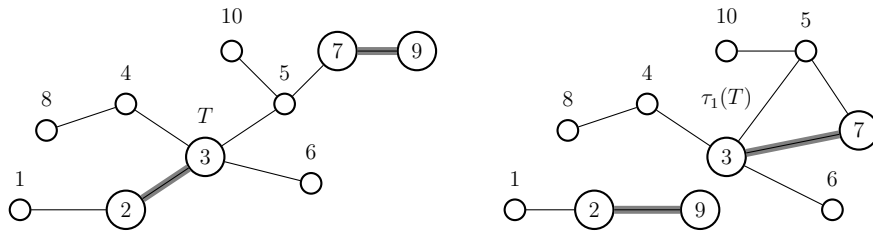


Figura 3.2

Con el próximo teorema vamos a caracterizar los t-switches sobre un árbol dado. Como veremos pronto, es clave para el t-switch la disposición de los vértices involucrados a lo largo del único camino mínimo que los contiene. Vamos a ver que ese orden está relacionado con la configuración de los mismos vértices en la matriz de acción del 2-switch.

**Teorema 3.1.2.** *Si  $ab$  y  $cd$  son dos aristas disjuntas sobre el camino  $aPd = (ab\dots cd)$  en el árbol  $T$ , entonces un 2-switch  $\tau$  que las intercambia es un t-switch si y sólo si  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .*

*Demostración.* Si  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , tenemos que verificar, por la Definición 3.1.1, que  $\tau(T) = T' \in \Psi$ . Para ver esto, dividamos la acción de  $\tau$  en tres partes. Primero, obsérvese que  $(a, b)(c, d)$  es intercambiable en  $T$  y que después de haber borrado  $ab$  y  $cd$ ,  $T$  se divide en un bosque de 3 componentes, llamémoslas  $T_i$  ( $i \in [3]$ ), donde:  $a \in T_1$ ,  $bPc \subseteq T_2$  y  $d \in T_3$ . Luego, conectamos  $T_1$  a  $T_2$  por medio del arista  $ac$ , obteniendo un nuevo bosque de dos componentes,  $T_3$  y  $T_{12}$ , donde  $T_{12} = T_1 \cup ac \cup T_2 \supseteq (b\dots ca)$ . Finalmente, obtenemos  $T'$  conectando  $T_3$  a  $T_{12}$  con  $bd$  y por lo tanto  $T'$  es un árbol.

Para el recíproco, simplemente obsérvese que el único otro 2-switch que reemplaza  $ab$  y  $cd$  es  $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ , y siempre produce un grafo unicíclico de dos componentes cuando  $(a, b)(d, c)$  es intercambiable en  $T$ . De hecho, repitiendo el análisis anterior, obtenemos un grafo  $T'$  compuesto por  $T_{13} = T_1 \cup ad \cup T_3$  y por  $T_2$ , que incluye el ciclo  $(b\dots cb)$ .  $\square$

Ya hemos visto, mediante algunos ejemplos, que un 2-switch puede aumentar o disminuir la cantidad de componentes de un grafo. Nos preguntamos ahora si, dado un bosque  $F$ , es posible obtener, mediante una sucesión de 2-switches, otro bosque  $F'$  con una cantidad de

componentes distinta de la de  $F$ . La respuesta a esta pregunta es el corolario del próximo teorema.

**Teorema 3.1.3.** *Dos bosques con la misma secuencia de grados tienen la misma cantidad de componentes conexas.*

*Demostración.* Sea  $s = (d_1, \dots, d_n)$  la secuencia de grados de los bosques  $F_0$  y  $F_1$ , y sea  $k_j$  ( $j = 0, 1$ ) la cantidad de componentes de  $F_j$ . Entonces:  $n - k_0 = |F_0| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i = |F_1| = n - k_1$ , con lo cual  $k_0 = k_1$ .  $\square$

El recíproco de 3.1.3 es obviamente falso ya que existen muy simples ejemplos de bosques del mismo orden y con la misma cantidad de componentes que difieren en secuencia de grados ( $P_n$  y  $S_n$  para cada  $n \geq 2$ , por ejemplo). Más aún, el Teorema 3.1.3 no vale si reemplazamos “bosques” por “grafos”. Como contraejemplo, es suficiente considerar  $2C_3$  y  $C_6$ . Ambos tienen secuencia de grados  $(2, \dots, 2)$  pero  $2C_3$  tiene dos componentes y  $C_6$  una.

**Corolario 3.1.4.** *Es imposible transformar por medio de 2-switches un bosque  $F$  en otro bosque  $F'$  con una cantidad de componentes distinta.*

*Demostración.* De lo contrario, los dos bosques tendrían la misma secuencia de grados, pues cada 2-switch la preserva, y por lo tanto, por el Teorema 3.1.3, tendrían también la misma cantidad de componentes.  $\square$

**Definición 3.1.5.** *Sea  $\Phi$  el conjunto de todos los bosques y sea  $F \in \Phi$ . Un **f-switch** sobre  $F$  es un 2-switch  $\tau$  tal que  $\tau(F) \in \Phi$ .*

En la Figura 3.3 se muestra la aplicación del 2-switch  $\tau_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$  a la componente  $T = \{12, 23, 35, 5.10, 57, 79\}$  (de orden 7) del bosque  $F = T \cup \{6.11, 84, 8.12\} \in \mathcal{G}_{12}$ .

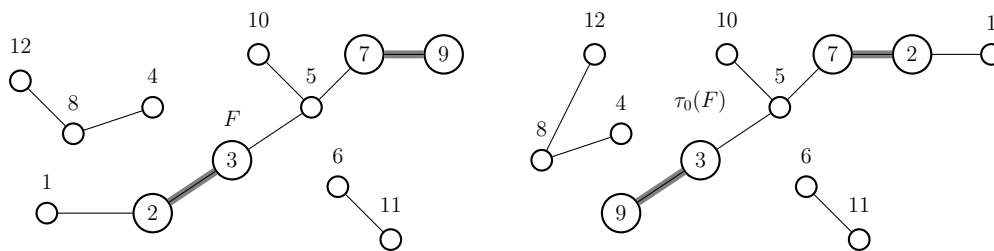


Figura 3.3

Como  $\tau_0(F)$  es un bosque, tenemos que  $\tau_0$  es un f-switch en  $F$ . Observemos que, restringido a  $T$ ,  $\tau_0$  puede verse como un t-switch en  $T$ .

Los siguientes 2-switches en la Figura 3.4,  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  y  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , también son f-switches en  $F$ , pero entre aristas que se encuentran en distintas componentes. Más precisamente, son los dos posibles 2-switches que reemplazan las aristas 84 y 35.

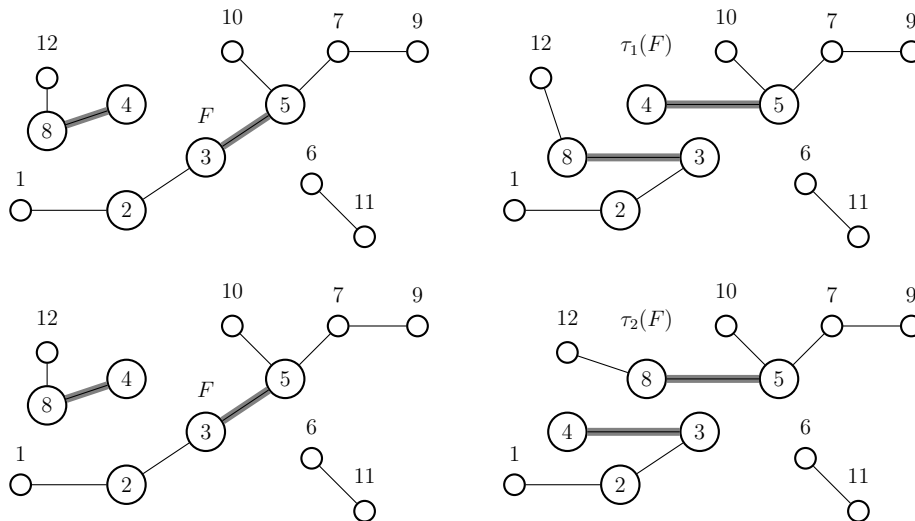


Figura 3.4

Notemos de paso que los bosques  $\tau_0(F)$ ,  $\tau_1(F)$  y  $\tau_2(F)$  verifican el Teorema 3.1.3.

Por último, obsérvese que  $(2, 3)(9, 7)$  es intercambiable en  $F$ . Luego, veamos que sucede al aplicar el otro posible 2-switch entre 23 y 79,  $\tau_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$  (Figura 3.5). Puesto que el grafo resultante  $\tau_3(F)$  es unicíclico,  $\tau_3$  no es un f-switch en  $F$ . El hecho de que  $F$  tenga 3 componentes conexas y  $\tau_3(F)$  tenga 4 nos muestra de nuevo que no puede remplazarse “bosques” por “grafos” en el Teorema 3.1.3.

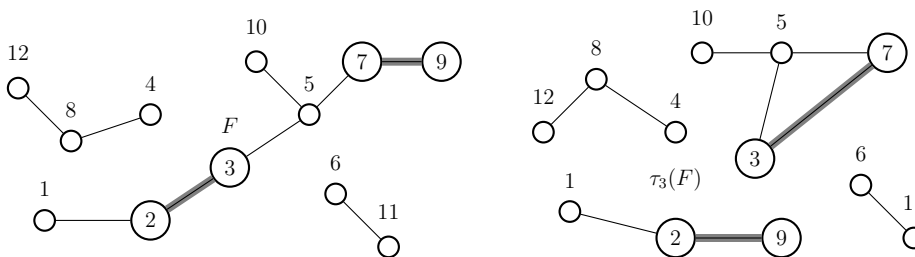


Figura 3.5

El resultado siguiente caracteriza los f-switches sobre un bosque dado. La prueba se basa fuertemente en los ejemplos que acabamos de ver y por ende no es más que una mera generalización de los mismos.

**Teorema 3.1.6.** *Sea  $\tau$  un 2-switch que intercambia las aristas  $e_0$  y  $e_1$  de un bosque  $F$ . Entonces,  $\tau$  es un f-switch en  $F$  si y sólo si opera de la siguiente manera:*

1.  $\tau$  es un t-switch, si  $e_0$  y  $e_1$  están en la misma componente;
2.  $\tau$  es un 2-switch, en caso contrario.

*Demostración.* Asumamos primero que  $\tau$  opera de esa forma en  $F$ . Tenemos entonces que verificar, por la Definición 3.1.5, que  $\tau(F) = F' \in \Phi$ . No hay nada que probar en el caso (1), porque ya sabemos que el t-switch preserva la estructura de árbol. Para el segundo caso, supóngase que  $e_j \in T_j$  para  $j = 0, 1$ , donde  $T_0$  y  $T_1$  son dos componentes conexas distintas de  $F$ . Analicemos ahora la acción de  $\tau$  en dos tiempos. En primera instancia, borrando  $e_j$  (para cada  $j$ ),  $T_j$  se divide en las subcomponentes  $T'_j$  y  $T''_j$ . La cantidad de componentes del grafo aumenta momentáneamente en 2 y cada uno de los vértices involucrados en  $\tau$  queda contenido en una subcomponente distinta. Luego, agregando las nuevas aristas  $e'_j$  ( $j = 0, 1$ ), vemos que  $e'_0$  une  $T'_0$  a  $T'_1$  (o  $T'_0$  a  $T''_1$ ) y  $e'_1$  une  $T''_0$  a  $T''_1$  (o  $T''_0$  a  $T'_1$ ). Por lo tanto,  $F'$  es un bosque.

Para el recíproco, alcanza con notar que un 2-switch cualquiera que actúe sobre  $F$  de forma complementaria a la propuesta operaría entre aristas de la misma componente transformando esta última en un grafo unicíclico.  $\square$

## 3.2. El Teorema de Transición de árboles

El uso del t-switch y del f-switch es decisivo en esta sección. Pasando por unos pocos resultados intermedios logramos resolver finalmente el problema propuesto en el Capítulo 1, demostrando afirmaciones análogas al Primer Teorema de Transición en el conjunto de los bosques y de los árboles con una misma secuencia de grados. Incluso describimos un algoritmo que, para dos bosques cualesquiera con la misma secuencia de grados, determina una sucesión de f-switches que transforma uno en el otro.

El siguiente lema afirma esencialmente que dos grafos cualesquiera con la misma secuencia de grados no pueden “diferir” únicamente en una arista. Recordemos que  $\Gamma_s$  denota el conjunto de todos los grafos con una misma secuencia de grados  $s$ .

**Lema 3.2.1.** Sean  $A, B \in \Gamma_s$  y sea  $\eta = |A - B| > 0$ . Entonces  $\eta \neq 1$ .

*Demostración.* Sea  $|A| = m = |B|$ . Observemos primero que  $|A \cap B| = |A| - \eta = m - \eta$  y que, por otro lado,  $|B - A| = |B| - |A \cap B| = m - (m - \eta) = \eta$ . Más aún:  $A = B \Leftrightarrow \eta = 0$ .

Probaremos ahora el teorema por el contrarrecíproco. Si  $\eta = 1$ , tendríamos entonces que  $ab = A - B$  y que  $B - A = cd$ , con lo cual  $A' = A - ab = B - cd = B'$ . Los grados de  $a$  y  $b$  disminuyen en 1 en  $A'$ , y lo mismo pasa con  $c$  y  $d$  en  $B'$ .  $A' = B'$  implica  $s(A') = s(B')$  y esta última igualdad se verifica si y sólo si  $a = c$  y  $b = d$  o si  $a = d$  y  $b = c$ , ya que todas las otras entradas coinciden componente a componente. Cualquiera de estos dos casos es equivalente a que  $ab = cd$  y por ende podemos concluir que  $A = B$ .  $\square$

El próximo teorema establece cotas inferiores ajustadas para la cantidad de 2-switches necesarios para la transición de un grafo en otro con la misma secuencia de grados.

**Teorema 3.2.2.** Sean  $A, B \in \Gamma_s$  y sea  $\eta > 1$ . Si  $(\tau_i)$  es una sucesión de 2-switches que transforma  $A$  en  $B$ , entonces  $|(\tau_i)| \geq \lceil \eta/2 \rceil$ . Más aun, esta cota es ajustada.

*Demostración.* Para probar esto es clave notar que, en el mejor de los casos, un 2-switch  $\tau_i$  transforma dos aristas en  $A_{i-1} - B$  en otras dos de  $B - A_{i-1}$ , siendo  $A_i = \tau_i(A_{i-1})$  para

$i > 0$  y  $A_0 = A$ . Luego, si  $\eta$  es par, se necesitaran al menos  $\eta/2$  2-switches para convertir  $A$  en  $B$ .

Si en cambio  $\eta$  es impar, el argumento es el mismo excepto por el inconveniente que es claramente imposible convertir de dos en dos todas las aristas en  $A - B$ . Por lo tanto, la sucesión  $(\tau_i) = (\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_N)$  más corta que transforma  $A$  en  $B$  necesita cumplir que: 1)  $\tau_j$  es el único 2-switch de la sucesión que convierte *solo una* de las dos aristas involucradas en otra de  $B - A_{j-1}$ ; 2)  $\tau_i$  convierte de dos en dos  $\forall i \neq j$ ; 3)  $j \neq N$  (es decir:  $\tau_j$  no puede ser el último 2-switch de la sucesión, o entraríamos en conflicto con el lema anterior). Bajo estas condiciones, concluimos entonces que  $|\langle \tau_i \rangle| \geq 1 + (\eta - 1)/2 = (\eta + 1)/2$  cuando  $\eta$  es impar.

Ambas cotas encontradas son ajustadas por construcción y la prueba de este hecho se completa ofreciendo a continuación los oportunos ejemplos donde se cumple la igualdad.  $\square$

Tenemos que mostrar entonces dos ejemplos, uno donde  $\eta$  es par y otro donde es impar. Para el primer caso, sean  $A \approx 2P_2 \approx B$  tales que  $A = \{12, 34\}$  y  $B = \{13, 24\}$  (ver la Figura 2.15). Entonces  $\eta = 2$  y  $B = \tau(A)$ , donde  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Para el caso impar, sean  $A \approx P_6 \approx B$  tales que  $A = (123456)$  y  $B = (132546)$ . Entonces  $A \cap B = \{23, 45\}$ , con lo cual  $\eta = 3$ . Podemos transformar primero  $A$  en  $A_1 = (132456) \approx P_6$  mediante el t-switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  (este es el “ $\tau_j$ ” en la prueba del Teorema 3.2.2, ya que  $|A_1 - B| = 2$ ). Luego, aplicando  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  en  $A_1$ , obtenemos finalmente  $B$ . Los árboles  $A, A_1$  y  $B$  se muestran en la Figura 3.6.

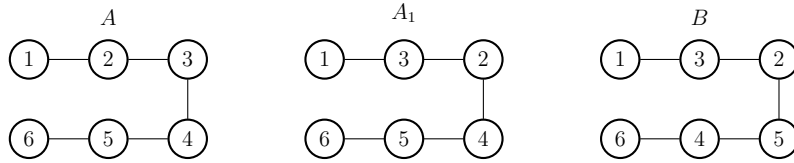


Figura 3.6

Obsérvese que los vértices aislados no pueden participar en ningún 2-switch (no-nulo). Luego, será conveniente de aquí en adelante considerar equivalentes ( $\sim$ ) a todas esas secuencias gráficas que *solo* difieran en cuanto a coordenadas nulas. Más precisamente, sea  $V_0(G)$  el conjunto de todos los vértices aislados de un grafo  $G$ . Si  $H$  es otro grafo, decimos que  $s(H) \sim s(G)$  si y sólo si existe un re-ordenamiento  $s'$  de  $s(H - V_0(H))$  (es decir, una permutación de sus coordenadas) tal que  $s(G - V_0(G)) = s'$ . Por ejemplo, sean:  $G_0 = (12) \approx P_2$ ,  $G_1 = \{13\} \in \mathcal{G}_3$ ,  $G_2 = \{23\} \in \mathcal{G}_4$  y  $G_3 = (132) \approx P_3$ . Entonces  $s(G_0) = (1, 1) \sim s(G_1) = (1, 0, 1) \sim s(G_2) = (0, 1, 1, 0)$ , pero  $s(G_3) = (1, 1, 2)$  no es equivalente ( $\approx$ ) a ninguna de las otras 3.

Usando propiedades básicas de permutaciones, es fácil ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia sobre el conjunto  $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{S}_n$ , donde  $\mathcal{S}_n$  es la colección de todas las secuencias gráficas  $s(G)$  tales que  $G \in \mathcal{G}_n$ . Para cada clase de equivalencia vamos a elegir el representante  $\bar{s}(G) = (d_1, \dots, d_n)$  tal que  $d_1 \geq \dots \geq d_n > 0$ . Esta elección tiene dos ventajas convenientes. Primero,  $G$  queda totalmente determinado por su conjunto de aristas (se han descartado todos los grafos con vértices aislados). Segundo,  $\bar{s}(G) = s$  puede escribirse de forma más compacta. Si  $d_{n_1} > \dots > d_{n_k}$  son todos los grados distintos que aparecen en  $s$ , y

$\alpha_j > 0$  ( $j \in [k]$ ) es la cantidad de veces que la coordenada  $d_{n_j}$  se repite en  $s$ , entonces la escritura  $s = d_{n_1}^{\alpha_1} d_{n_2}^{\alpha_2} \dots d_{n_k}^{\alpha_k}$  contiene la misma información de la  $n$ -upla que la define. Por ejemplo, para  $s = (5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$  (puede verificarse que  $s$  es gráfica usando el Teorema de Havel-Hakami), tenemos  $s = 5^1 3^4 2^3 1^3$ .

Sea  $s$  una secuencia gráfica. De acá en adelante vamos a trabajar en las siguientes familias de grafos:  $\Gamma_s$ ,  $\Phi_s$  y  $\Psi_s$ . La primera ya ha aparecido anteriormente y recordamos que es la colección de todos los grafos con una misma secuencia de grados  $s$ .  $\Phi_s$  es, en cambio, la familia de todos los bosques con una misma secuencia de grados  $s$ . Por último,  $\Psi_s$  denota el conjunto de todos los árboles con una misma secuencia de grados  $s$ . Claramente, los 3 son conjuntos finitos para cualquier  $s$  y, además, tenemos que:  $\emptyset \neq \Phi_s \subseteq \Gamma_s$  y  $\emptyset \neq \Psi_s \subseteq \Gamma_s$ .

**Lema 3.2.3.** *Sean  $A, B \in \Phi_s$  de orden  $n \leq 4$  y  $s \neq 1^n$ . Entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de, a lo más, un  $f$ -switch.*

*Demostración.* Hay solamente 3 bosques no-etiquetados con estas características y sin vértices aislados:  $P_3$ ,  $P_4$  y  $S_4$ .  $P_3$  y  $S_4$  no tienen aristas disjuntas y por lo tanto todo 2-switch sobre estos grafos es nulo. Para el caso de  $P_4$ , en cambio, sea  $s = 2^2 1^2$  su secuencia de grados. Es fácil ver que hay solo dos  $P_4$  con esa secuencia:  $T_0 = (4123)$  y  $T_1 = (4213)$ . Podemos transformar  $T_0$  en  $T_1$  por medio del t-switch  $\tau = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  y claramente podemos también volver a  $T_0$  desde  $T_1$  con  $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .  $\square$

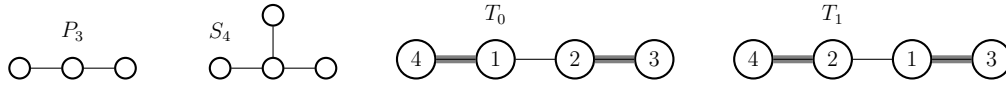


Figura 3.7: Los 4 grafos analizados en el Lema 3.2.3.

Recordemos que, si un grafo  $G$  tiene secuencia de grados  $s = 1^n$ , entonces  $n = 2m$ , donde  $m = |G|$ .

**Lema 3.2.4.** *Sea  $s = 1^{2m}$  y sean  $A, B \in \Phi_s$  de tamaño  $m \geq 1$ . Entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de no más de  $m - 1$   $f$ -switches.*

*Demostración.* Si  $s = 1^{2m}$ , es posible pasar fácilmente de  $A$  a  $B$  mediante  $f$ -switches aprovechando la simple estructura de estos bosques, ya que  $A \approx mP_2 \approx B$ . Sea  $A_0 = A$  y  $B \neq A$  (si  $B = A$  no hay nada que probar).

La transición empieza considerando una arista cualquiera  $a_1 c_1 \in B - A_0$ . Luego, tenemos que  $\{a_1 b_1, c_1 d_1\} \subseteq A_0 - B$ , para algún vértice  $b_1$  y  $d_1$ . Efectuando el  $f$ -switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ , conseguimos entonces que  $a_1 c_1 \in A_1 \cap B$ , donde  $A_1 = \tau_1(A_0)$ . Repetimos el mismo procedimiento con otra arista arbitraria  $a_2 c_2 \in B - A_1$ . Puesto que  $\{a_2 b_2, c_2 d_2\} \subseteq A_1 - B$ , el  $f$ -switch  $\tau_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$  mueve  $a_2 c_2$  en  $A_2 \cap B$ , donde  $A_2 = \tau_2(A_1)$ . Siguiendo de esta manera, logramos transformar  $A$  en  $B$  mediante una sucesión  $(\tau_i)$  de  $f$ -switches de tamaño no más que  $m$ , pues, en cada recursión  $i \geq 1$ , se incrementa en al menos 1 el tamaño de  $A_{i-1} \cap B$ , donde  $A_i = \tau_i(A_{i-1})$ .

La desigualdad  $|(\tau_i)| \leq m - 1$  se consigue suponiendo  $|(\tau_i)| = m$ . Observamos ahora que  $|B - A_{m-1}| = 2$ , con lo cual  $|A_{m-1} \cap B| = m - 2$ . Esto último, junto con el hecho de que  $|A_{i-1} \cap B| < |A_i \cap B|$  para cada  $i \in [m]$ , implica que  $|A_0 \cap B| + (m - 1) \leq |A_{m-1} \cap B| = m - 2$ , es decir,  $|A_0 \cap B| \leq -1$ , lo cual es absurdo. Luego, debe ser  $|(\tau_i)| < m$ .  $\square$

Sean  $A \approx 3P_2 \approx B$  tales que  $A_0 = A = \{12, 34, 56\}$  y  $B = \{13, 25, 46\}$ . Vamos a determinar una sucesión de 2-switches que transforma  $A$  en  $B$  mediante el Lema 3.2.4. Sea  $a_1c_1 = 13 \in B - A_0 = B$ . Luego,  $\{1b_1, 3d_1\} = \{12, 34\} \subseteq A_0 - B = A_0$ . Efectuando el f-switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , conseguimos entonces que  $13 \in A_1 \cap B$ , donde  $A_1 = \tau_1(A) = \{13, 24, 56\}$ . Repetimos el mismo procedimiento con la arista  $a_2c_2 = 25 \in B - A_1 = \{25, 46\}$ . Puesto que  $\{2b_2, 5d_2\} = \{24, 56\} \subseteq A_1 - B = \{24, 56\}$ , el f-switch  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  mueve 25 en  $A_2 \cap B$ , donde  $A_2 = \tau_2(A_1) = B$ . Luego,  $B = \tau_2\tau_1(A)$ , como fue requerido. En la Figura 3.8 se muestran los grafos  $A, A_1$  y  $B$ . Observemos que  $|(\tau_1, \tau_2)| = 2$  respeta las cotas previstas por el Teorema 3.2.2 y el Lema 3.2.4.

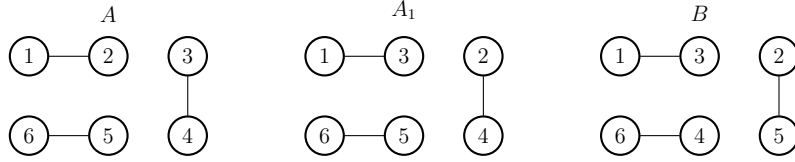


Figura 3.8: Aplicación del Lema 3.2.4.

Sean  $A, B \in \Phi_s$  tales que  $lv \in A \cap B$  y  $d_\ell = 1$ . Más aún, sean  $n, m$  y  $k$  respectivamente el orden, el tamaño y la cantidad de componentes de estos bosques. Es fácil ver que, al remover la hoja  $\ell$  desde ambos grafos, se obtienen dos nuevos bosques  $A'$  y  $B'$  de orden  $n - 1$ , tamaño  $m - 1$ , misma secuencia de grados  $s'$  y misma cantidad de componentes  $k$ . Con esta premisa en mente, el próximo lema luce bastante razonable.

**Lema 3.2.5.** Sean  $A, B \in \Phi_s$  y sea  $L$  un subconjunto cualquiera de hojas  $\ell_j$  de  $A$  y  $B$  tales que  $\ell_j v_j \in A \cap B$  para cada  $j$ . Supóngase que  $(\tau_i)$  sea una sucesión de f-switches que transforma  $A - L$  en  $B - L$ . Entonces  $(\tau_i)$  es una sucesión de f-switches que transforma  $A$  en  $B$ .

*Demostración.* Si  $L = \emptyset$ , no hay nada que probar. Si  $L \neq \emptyset$ , alcanza con probar el caso  $|L| = 1$ . El caso general se deduce después con facilidad por inducción sobre  $|L|$ .

Sea  $L = \ell$  y sea  $v$  el vecino de  $\ell$  en  $A_0 = A$  y  $B$ . Si  $(\tau_i)_{i \in [N]}$  transforma  $A'_0 = A - \ell = A'$  en  $A'_N = B - \ell = B'$ , tenemos que  $B' = \tau_N \dots \tau_1(A')$ . Entonces,  $B = lv \dot{\cup} B' = lv \dot{\cup} \tau_N \dots \tau_1(A')$ . Como la arista  $lv$  no participa en ninguno de los  $\tau_i$ , tenemos que  $lv \dot{\cup} \tau_N \dots \tau_1(A') = \tau_N \dots \tau_1(A' \dot{\cup} lv)$ , donde  $A' \dot{\cup} lv = A$ . Luego,  $A_N = \tau_N \dots \tau_1(A) = B$ . Esto muestra solamente que  $(\tau_i)$  es una sucesión de 2-switches que transforma  $A$  en  $B$ . Falta asegurar que la estructura de bosque se mantenga en cada grafo intermedio  $A_i = \tau_i(A_{i-1})$ , para cada  $i \in [N - 1]$ . Para esto, alcanza con observar que  $A_i = A'_i \dot{\cup} lv$ , donde  $A'_i = \tau_i(A'_{i-1})$  ( $i \in [N]$ ). Puesto que agregar hojas en un grafo no altera la cantidad de sus ciclos, y puesto que cada  $A'_i$  es un bosque por hipótesis, concluimos finalmente que  $\tau_i$  es un f-switch en  $A_{i-1}$ , para todo  $i \in [N]$ .  $\square$

Cabe observar algo muy importante respecto al Lema 3.2.5. Si en la prueba se cambia la hoja  $\ell$  por otro vértice cualquiera  $a$  tal que  $ab \in A \cap B$  y  $d_a > 1$ , entonces los grafos  $A' = A - a$  y  $B' = B - a$  son bosques, pero no necesariamente tienen la misma secuencia de grados. En estas condiciones no podemos asegurar la existencia de una sucesión de f-switches que transforme  $A'$  en  $B'$ . Y de hecho, es imposible pasar de  $A'$  a  $B'$  por medio de 2-switches si  $s(A') \neq s(B')$ . Asumamos por un momento que exista una sucesión de f-switches  $(\tau_i)$  que convierte  $A'$  en  $B'$  y que  $E_A(a) \subseteq A \cap B$ , donde  $E_A(a)$  es el conjunto de todas las aristas de  $A$  incidentes en  $a$  (sigue siendo  $d_a > 1$ ). En la prueba del Lema 3.2.5 hubiésemos tenido  $E_A(\ell) = \ell v$ . Notemos que ahora  $A = A' \dot{\cup} E_A(a)$  y  $B = B' \dot{\cup} E_A(a)$ . Ya que las aristas en  $E_A(a)$  no participan en ninguno de los  $\tau_i$ , sigue valiendo que  $(\tau_i)$  es una sucesión de 2-switches que transforma  $A$  en  $B$ . Sin embargo, ya no podemos asegurar que la estructura de bosque se mantenga a lo largo de toda la transición, ya que agregar vértices de grado mayor a 1 a un grafo puede alterar su cantidad de ciclos. En la Figura 3.9 corroboramos esta posibilidad mostrando el debido contraejemplo.

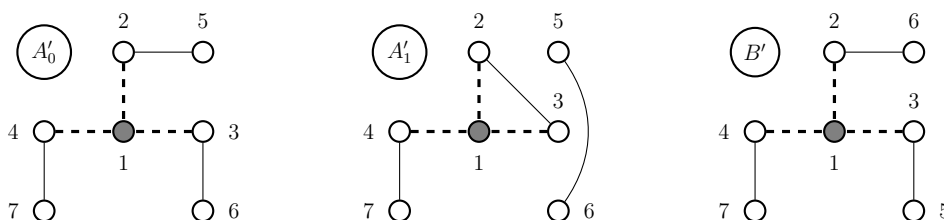


Figura 3.9:  $A'_1 = \tau_1(A'_0) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A'_0$ ,  $B' = \tau_2(A'_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} A'_1$

**Teorema 3.2.6** (Segundo Teorema de Transición). *Si  $A, B \in \Phi_s$ , entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de una sucesión de f-switches.*

*Demostración.* Por inducción sobre el orden  $n$  de  $A$  y  $B$ . Si  $n \leq 4$ , el teorema es cierto por los Lemas 3.2.3 y 3.2.4. Sea entonces  $n > 4$  y supongamos que todo par de bosques de orden  $n_1 < n$  con la misma secuencia de grados pueden transformarse recíprocamente mediante una sucesión de f-switches. Si  $s = 1^n$  no hay nada que probar ya que podemos usar directamente el Lema 3.2.4. Supóngase entonces que  $s \neq 1^n$  y que  $k$  es la cantidad de componentes de  $A$  y  $B$ .

Sean  $L(A)$  y  $L(B)$  los respectivos subconjuntos de aristas incidentes en hojas de  $A$  y  $B$ . Entonces  $L(A)$  y  $L(B)$  son no-vacíos, pues ambos bosques tienen al menos dos hojas por componente (los estamos asumiendo sin vértices aislados). Si examinamos ahora  $L = L(A) \cap L(B)$ , tenemos dos casos: 1)  $L \neq \emptyset$ ; 2)  $L = \emptyset$ .

Para el primer caso, sea  $V_1(L)$  el conjunto (claramente no-vacío) de todo los vértices en  $L$  que son hojas en  $A$  y  $B$ . Si hacemos  $A - V_1(L)$  y  $B - V_1(L)$ , obtenemos dos bosques nuevos  $A_1$  y  $B_1$  de orden  $n_1 < n$ , con la misma secuencia de grados  $s_1$ , la misma cantidad de componentes  $k$  y sin vértices aislados. La hipótesis inductiva aplica entonces a  $A_1$  y  $B_1$ : la sucesión de f-switches  $(\tau_i)$  transforma  $A_1$  en  $B_1$  y por lo tanto también  $A$  en  $B$ , por el Lema 3.2.5.

Para el segundo caso, sea  $\ell$  una hoja tal que  $b\ell \in L(B)$  y  $d_b > 1$  (debe existir al menos una hoja con esta propiedad pues estamos asumiendo  $s \neq 1^n$ ). Como  $L = \emptyset$ , tenemos que



$al \in L(A)$  implica  $a \neq b$  y, más aun, debe haber otro vértice  $c \neq a$  vecino de  $b$  en  $A$ , ya que  $d_b > 1$ . Estas observaciones garantizan que, si  $\ell$  y  $b$  están en una misma componente de  $A$ , entonces  $\ell Pc = (\ell a \dots bc)$ , con lo cual el 2-switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} \ell & a \\ b & c \end{pmatrix}$  es un f-switch (no-nulo) en  $A$  (si  $\ell a$  y  $bc$  están en componentes distintas de  $A$  esta conclusión es trivial). El bosque resultante  $\tau_1(A) = A'_1 \in \Phi_s$  comparte ahora la arista  $\ell b$  con  $B$ . Esto nos lleva nuevamente al caso (1), pues  $L(A'_1) \cap L(B) \neq \emptyset$ .  $\square$

Puesto que un árbol es un bosque conexo, obtenemos como corolario inmediato el siguiente importantísimo resultado.

**Corolario 3.2.7** (Tercer Teorema de Transición). *Si  $A, B \in \Psi_s$ , entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de una sucesión de  $t$ -switches.*

A través del próximo ejemplo vamos a ver que la demostración del Teorema 3.2.6 esconde en realidad un algoritmo para encontrar una sucesión de f-switches que transforma  $A$  en  $B$ , donde  $A, B \in \Phi_s$ .

Consideremos los bosques  $A_0$  y  $B_0$  en la Figura 3.10, de secuencia de grados  $s_0 = 4^1 3^1 2^2 1^7$ . Estos tienen orden  $n_0 = 11$  y tamaño  $m_0 = 9$ . La idea clave para conseguir la sucesión de f-switches ( $\tau_j$ ) buscada (sugerida por el Teorema 3.2.6) es iterar el siguiente procedimiento: reducir los dos bosques desde “afuera” hacia “adentro” cortando las aristas compartidas que sean incidentes en hojas. Será mucho más intuitivo en este contexto imaginar que cortar, remover o eliminar sean sinónimos de bloquear cuando nos referimos a vértices o aristas. Puesto que  $|B_0 - A_0| = 4$ , tenemos que  $|(\tau_j)| \geq 2$ , por el Teorema 3.2.2. En la Figura 3.10 vemos evidenciadas en gris las aristas incidentes en hojas compartidas por  $A_0$  y  $B_0$ : 15, 16 y 28.

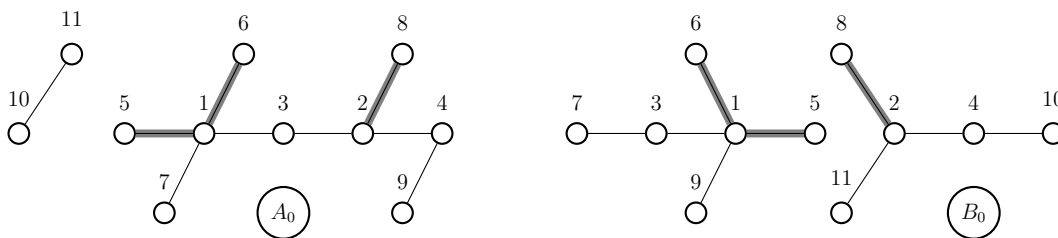


Figura 3.10

Al remover las hojas 5, 6 y 8, obtenemos los bosques  $A_1$  y  $B_1$ , de secuencia de grados  $s_1 = 2^4 1^4$ , tamaño  $m_1 = 6$  y orden  $n_1 = 8$  (Figura 3.11). Las aristas bloqueadas están representadas en línea de trazo. Estas no participarán en ningún f-switch futuro. Los vértices bloqueados están marcados en gris.

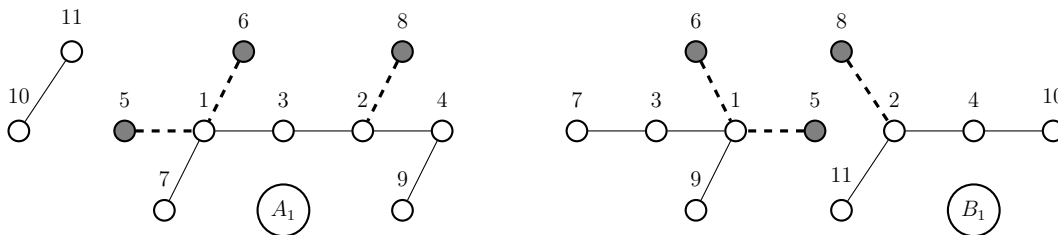


Figura 3.11

Como  $A_1$  y  $B_1$  no comparten aristas incidentes en hojas, estamos obligados a efectuar un f-switch para poder seguir el proceso de reducción. En virtud del Teorema 3.2.6, elegimos una arista cualquiera en  $B_1$  incidente sobre una hoja y sobre un vértice de grado mayor que 1. Por ejemplo, la arista 73. Aplicamos entonces en  $A_1$  el f-switch  $\tau_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . El bosque resultante  $\tau_1(A_1) = A'_1$  comparte ahora la arista 73 con  $B_1$  (Figura 3.12). La etiqueta de  $A'_1$  está distinguida respecto a las anteriores con un cuadrado en lugar de un círculo y está posicionada más a la izquierda. Esto sirve a señalar la aplicación de un f-switch en esa etapa del procedimiento.

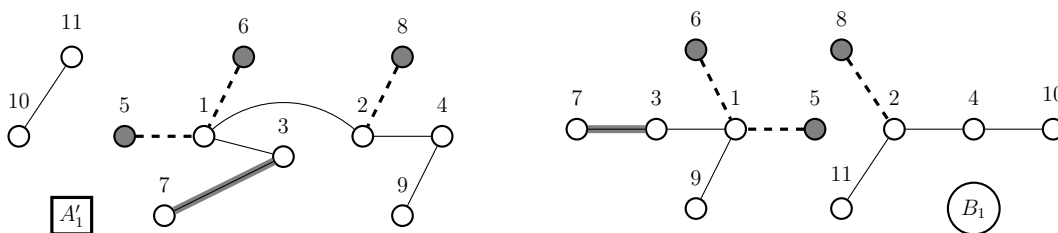


Figura 3.12

Luego cortamos la hoja 7 y obtenemos los bosques  $A_2$  y  $B_2$ , de secuencia de grados  $s_2 = 2^3 1^4$ , tamaño  $m_2 = 5$  y orden  $n_2 = 7$  (Figura 3.13). Notamos que la arista 31, incidente en la hoja 3, está en  $A_2 \cap B_2$ .

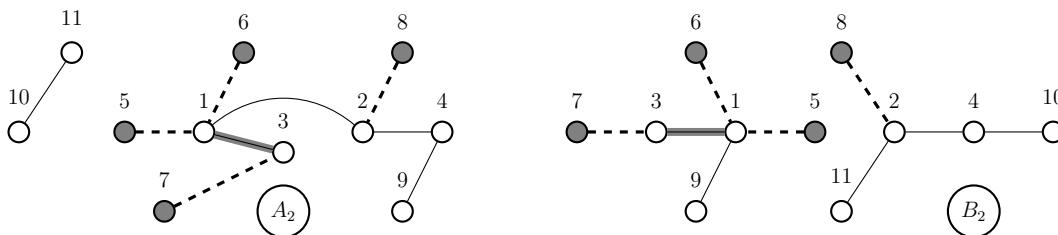


Figura 3.13

Removemos la arista 31, obteniendo los bosques  $A_3$  y  $B_3$  tales que  $s_3 = 2^2 1^4$ ,  $m_3 = 4$  y  $n_3 = 6$  (Figura 3.14).  $A_3$  y  $B_3$  ya no comparten aristas incidentes en hojas.

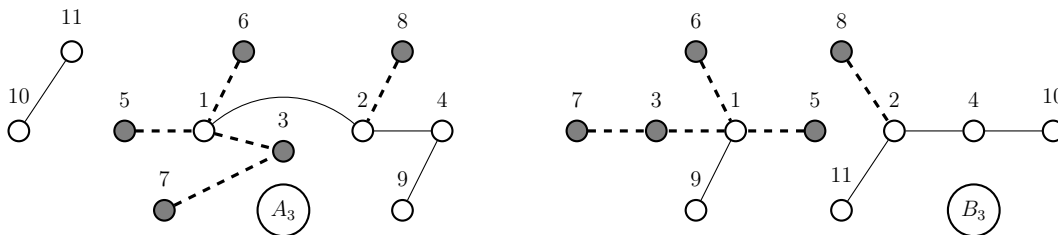


Figura 3.14

Por medio del f-switch  $\tau_2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$  en  $A_3$ , conseguimos que  $\tau_2(A_3) = A'_3$  comparta con  $B_3$  la arista 10.4, donde 10 es una hoja (Figura 3.15).

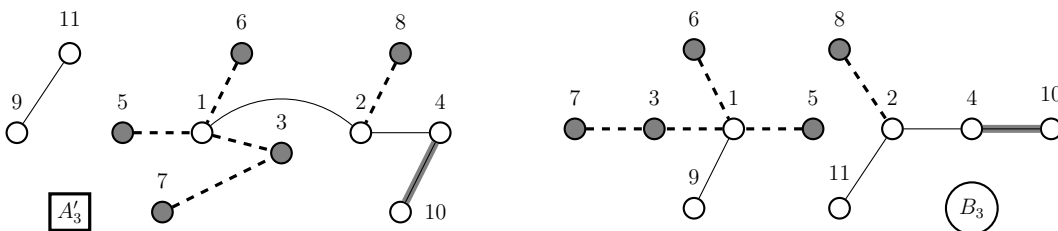


Figura 3.15

A continuación, bloqueamos la hoja 10. Esto resulta en los bosques  $A_4$  y  $B_4$  tales que:  $s_4 = 2^1 1^4$ ,  $m_4 = 3$ ,  $n_4 = 5$  y  $42 \in A_4 \cap B_4$ , donde el vértice 4 es una hoja (Figura 3.16).

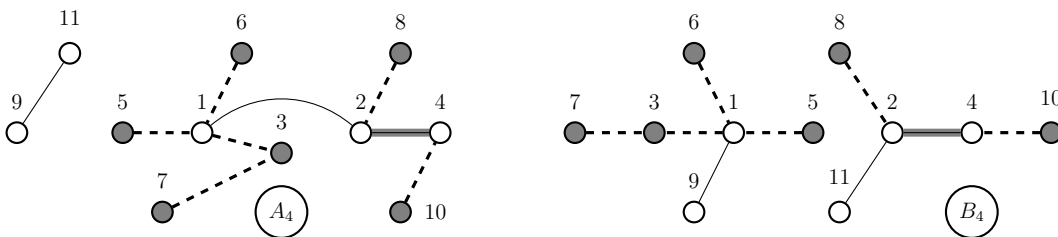


Figura 3.16

Eliminando la arista 42, llegamos a los bosques disjuntos  $A_5$  y  $B_5$ , donde  $s_5 = 1^4$ ,  $m_5 = 2$  y  $n_5 = 4$ . En este punto, podemos usar el Lema 3.2.4 para completar la transición (Figura 3.17).

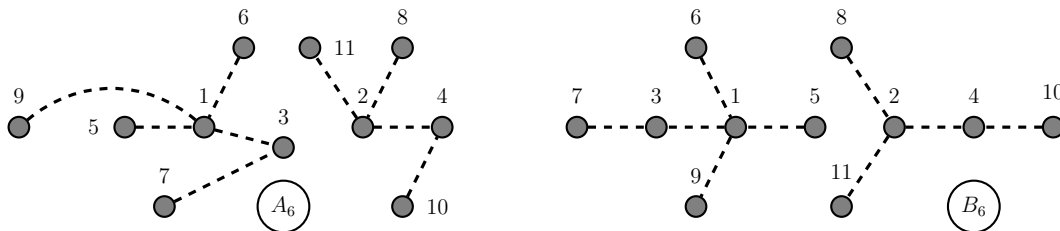


Figura 3.19

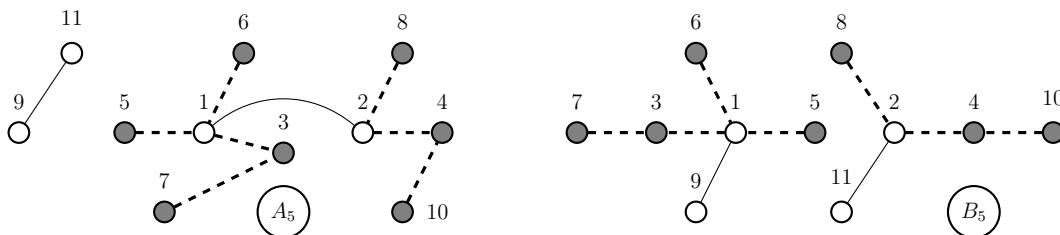


Figura 3.17

Mediante el f-switch  $\tau_3 = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , transformamos  $A_5$  en  $A'_5$  (Figura 3.18).

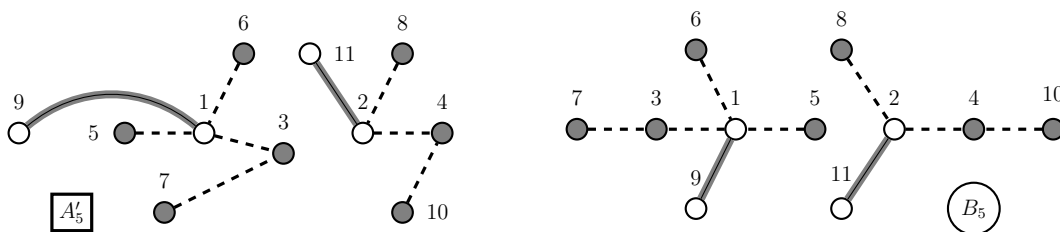


Figura 3.18

Como  $A'_5 = B_5$ , el corte de las aristas 19 y 11.2, incidentes en la hojas 1, 2, 9 y 11, deja vacíos los grafos  $A_6$  y  $B_6$ . Así, todas las aristas y los vértices en la Figura 3.19 quedan finalmente bloqueados.

Ya que no hay más aristas para remover, el proceso termina. Obsérvese que los dos bosques en línea de trazo en la Figura 3.19 son iguales. Otras importantes observaciones son las siguientes. Primero, las sucesiones de tamaños y órdenes asociados a los bosques  $A_{i-1}$  y  $B_{i-1}$ , para  $i \in [7]$ , son estrictamente decrecientes hacia 0:  $(m_{i-1}) = (9, 6, 5, 4, 3, 2, 0)$  y  $(n_{i-1}) = (11, 8, 7, 6, 5, 4, 0)$ . Segundo, la cantidad de componentes  $n_{i-1} - m_{i-1}$  de  $A_{i-1}$  y  $B_{i-1}$  se mantiene constante en 2 excepto para  $i = 7$ , donde es 0. Y por último, tenemos que  $A_{i-1}$  y  $B_{i-1}$  tienen la misma secuencia de grados  $s_{i-1}$  para todo  $i \in [7]$ . Concluimos que la sucesión de f-switches que transforma  $A$  en  $B$  es  $(\tau_j)_{j \in [3]} = \left( \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$ .

El próximo algoritmo no es más que la generalización del ejemplo que acabamos de ver. Usamos la notación  $L(X)$  para referirnos al conjunto de todas las aristas del grafo  $X$  inci-

dentes en hojas de  $X$ . La notación  $V_1(X)$  se refiere en cambio al conjunto de todas las hojas de  $X$ .

**Algoritmo 3.2.8** (Algoritmo de Transición). *INPUT: Dos bosques  $A_0, B_0 \in \Phi_{s_0}$ , de orden  $n_0$ . OUTPUT: Sucesión de  $f$ -switches  $(\tau_j)$  que convierte  $A_0$  en  $B_0$ .*

Para cada  $i \geq 1$ :

1. Verificamos si  $s_{i-1} = 1^{n_{i-1}}$  o si  $n_{i-1} \leq 4$ ;
2. Si este es el caso, usamos los Lemas 3.2.3 o 3.2.4 para explicitar la sucesión  $(\tau_j)$ .
3. Si no, definimos  $L_{i-1} := L(A_{i-1}) \cap L(B_{i-1})$ ;
4. Si  $L_{i-1} = \emptyset$ , usamos el Teorema 3.2.6 para determinar un  $f$ -switch  $\tau_{j(i)}$  sobre  $A_{i-1}$  con la siguiente propiedad: si  $A'_{i-1} := \tau_{j(i)}(A_{i-1})$ , entonces  $L'_{i-1} := L(A'_{i-1}) \cap L(B_{i-1}) \neq \emptyset$ . Luego, definimos  $A_i := A_{i-1} - V_1(L'_{i-1})$  y  $B_i := B_{i-1} - V_1(L'_{i-1})$  y volvemos al paso (1).
5. Si  $L_{i-1} \neq \emptyset$ , definimos  $A_i := A_{i-1} - V_1(L_{i-1})$  y  $B_i := B_{i-1} - V_1(L_{i-1})$  y volvemos al paso (1).

Como puede verse, el Algoritmo 3.2.8 consiste en iterar el argumento inductivo usado en la prueba del Teorema 3.2.6. Obsérvese además que en cada iteración (o ciclo) se remueve al menos una hoja. De nuevo, es útil pensar el corte de hojas como un bloqueo de las mismas junto con las respectivas aristas incidentes. Con esto en mente, es fácil convencerse que el algoritmo logra su objetivo en no más de  $m$  ciclos, con lo cual  $|(\tau_j)| \leq m$ . La desigualdad  $|(\tau_j)| \leq m - 1$  se consigue por medio de un argumento idéntico al de la prueba del Lema 3.2.4. Acabamos de probar entonces el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.9** (Teorema de Transición de Bosques). *Sean  $A$  y  $B$  son dos bosques de tamaño  $m$  con la misma secuencia de grados. Entonces  $A$  y  $B$  pueden transformarse recíprocamente por medio de una sucesión computable de no más de  $m - 1$   $f$ -switches.*

Se logra finalmente como corolario inmediato del Teorema 3.2.9 el resultado central de esta sección.

**Corolario 3.2.10** (Teorema de Transición de árboles). *Todo árbol de orden  $n$  puede ser transformado en cualquier otro con la misma secuencia de grados mediante una sucesión computable de no más de  $n - 2$   $t$ -switches.*

Concluimos este capítulo con un último ejemplo de aplicación del Algoritmo de Transición. Esta vez, transformamos el árbol  $A_0 = \{12, 14, 15, 23, 26, 37, 48\}$  en el árbol  $B_0 = \{12, 13, 15, 24, 28, 37, 46\}$ . Sus parámetros iniciales son:  $s_0 = 3^2 2^2 1^4$ ,  $n_0 = 8$ ,  $m_0 = 7$ . Observamos que los dos árboles comparten las aristas incidentes en hojas 15 y 37. Todo esto se muestra en la Figura 3.20. La notación usada en este ejemplo es la misma del ejemplo anterior.

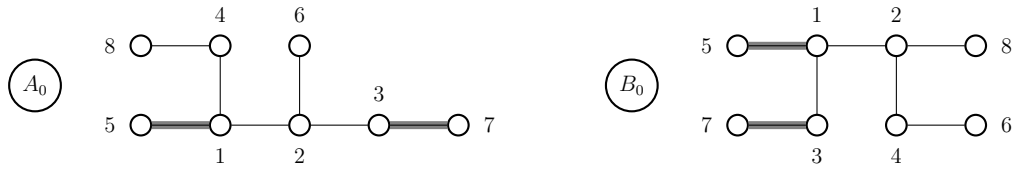


Figura 3.20



Figura 3.21:  $s_1 = 3^1 2^2 1^3$ ,  $n_1 = 6$ ,  $m_1 = 5$



Figura 3.22:  $A'_1 = \tau_1(A_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} A_1$



Figura 3.23:  $s_2 = 3^1 2^1 1^3$ ,  $n_2 = 5$ ,  $m_2 = 4$



Figura 3.24:  $s_3 = 2^2 1^2$ ,  $n_3 = 4$  (Lema 3.2.3),  $m_3 = 3$

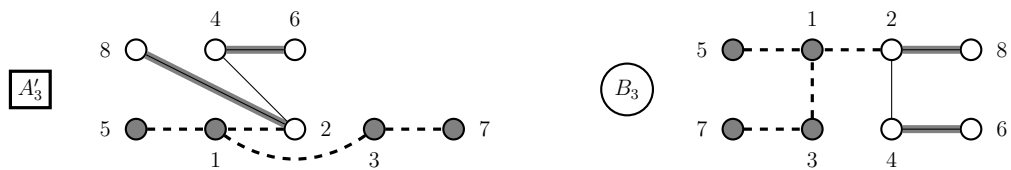


Figura 3.25:  $A'_3 = \tau_2(A_3) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} A_3$



Figura 3.26:  $s_4 = 1^2$  (Lema 3.2.4),  $n_4 = 2$ ,  $m_4 = 1$



Figura 3.27:  $A_5 = \emptyset = B_5$ ; los grafos en línea de trazo son iguales.  $B_0 = \tau_2\tau_1(A_0)$

# Capítulo 4

## Aplicaciones

En este último capítulo vamos a ver algunas aplicaciones importantes de los teoremas de transición. Primero, cuantificamos la perturbación provocada por un 2-switch sobre uno de los parámetros introducidos en la Sección 2.2: el número de matching  $\mu$ . Este análisis se efectúa sobre grafos cualesquiera. Un cierto parámetro  $\xi$  de un grafo (como por ejemplo  $\mu$ ) puede o no alcanzar todos los valores (admisibles) en el intervalo de variación delimitado por su valor máximo y mínimo. Si este es el caso, decimos que  $\xi$  tiene *propiedad de intervalo* en la familia de grafos donde  $\xi$  se está estudiando (veremos pronto la definición rigurosa). Usamos la medida de perturbación y los teoremas de transición para mostrar que  $\mu$  tiene esta propiedad sobre los conjuntos de todos los grafos, bosques o árboles con la misma secuencia de grados. Gracias a las ecuaciones del Teorema 2.2.14, podemos inmediatamente deducir resultados similares para el número de independencia  $\alpha$ , el rango y la nulidad en los bosques con la misma secuencia de grados. Esto fue, muy en síntesis, un anticipación de la Sección 4.1. En la Sección 4.2 se hará un estudio del todo análogo, pero exclusivamente sobre el número de dominancia  $\gamma$ .

Recordamos algo que ya dijimos en el Capítulo 1: todos los resultados y definiciones de este capítulo son originales

### 4.1. Propiedad de Intervalo del número de matching

En los siguientes dos lemas encontramos desigualdades que relacionan los números de matching de un grafo con su transformado mediante un 2-switch  $\tau$ . Las aristas que serán reemplazadas por  $\tau$  pueden o no estar en un matching máximo dado. Esta sencilla observación sugiere los casos a analizar para llevar al cabo las pruebas de los lemas.

**Lema 4.1.1.** *Sea  $M$  un matching máximo en  $G$  y sea  $\tau$  un 2-switch que intercambia  $e_0, e_1 \in G$ , transformando  $G$  en  $G'$ . Si  $e_0$  y  $e_1$  están ambas en  $M$  o ambas en  $G - M$ , entonces  $\mu(G) \leq \mu(G')$ .*

*Demostración.* Si  $\tau$  intercambia dos aristas  $e_0, e_1 \in G - M$ , es claro que seguimos teniendo un matching de tamaño  $\mu(G)$  en  $G - \{e_0, e_1\}$ . Luego, volvemos a conectar los 4 vértices involucrados en  $\tau$  por medio de las aristas no saturadas  $e'_0, e'_1$ ; el conjunto  $M$  sigue siendo un matching en  $G'$  y por lo tanto:  $\mu(G) = |M| \leq \mu(G')$ .



De lo contrario, si  $e_0, e_1 \in M$ , obtenemos un grafo  $G'$  con el matching  $m(G') = M - \{e_0, e_1\}$  de tamaño  $\mu(G) - 2$ . Pero obsérvese que  $m(G')$  no puede ser un matching máximo. De hecho, puesto que ninguno de los 4 vértices en  $\{e'_0, e'_1\}$  está saturado por  $m(G')$  (recordemos que en  $G$  estos estaban todos saturados por  $M$ ), ambas aristas  $e_0, e_1$  pueden ser agregadas a él. Luego:  $\mu(G') \geq |m(G') \cup \{e'_0, e'_1\}| = (\mu(G) - 2) + 2 = \mu(G)$ .  $\square$

**Lema 4.1.2.** *Sea  $M$  un matching máximo en  $G$  y sea  $\tau$  un 2-switch que intercambia  $e_0, e_1 \in G$ , transformando  $G$  en  $G'$ . Si  $e_0 \in M$  y  $e_1 \notin M$ , entonces  $\mu(G') \geq \mu(G) - 1$ .*

*Demostración.* Si  $e_0 \in M$  y  $e_1 \notin M$ , la acción de  $\tau$  reduce en 1 el tamaño del matching en el grafo transformado, es decir: el conjunto  $m(G') = M - e_0$  es un matching en  $G'$  de cardinalidad  $\mu(G) - 1$ . Por lo tanto,  $\mu(G') \geq \mu(G) - 1$ .  $\square$

Decimos que dos grafos  $G$  y  $G'$  están relacionados de forma dirigida por un 2-switch  $\tau$  si  $G' = \tau(G)$ . Indicamos esto con la notación usual de mapeo:  $G \mapsto_\tau G'$ .

El próximo teorema afirma que un 2-switch sobre un grafo perturba su número de matching en, a lo sumo, 1.

**Teorema 4.1.3.** *Sea  $\tau$  un 2-switch en un grafo  $G$  y sea  $G' = \tau(G)$ . Entonces:*  
 $|\mu(G') - \mu(G)| \leq 1$ .

*Demostración.* Dado un matching máximo  $M$  en  $G$ , es obvio que  $G = M \dot{\cup} (G - M)$ . Luego, intercambiando  $e_0, e_1 \in G$  con  $\tau$  tenemos 3 casos: 1)  $e_0, e_1 \notin M$ ; 2)  $e_0, e_1 \in M$ ; 3)  $e_0 \in M$  y  $e_1 \notin M$ . Podemos entonces usar el Lema 4.1.1 en los primeros dos para obtener que  $\mu(G') > \mu(G) - 1$ , y luego el Lema 4.1.2 en el tercero. Por lo tanto, la desigualdad  $\mu(G') \geq \mu(G) - 1 \Leftrightarrow \mu(G') - \mu(G) \geq -1$  vale en todo caso y para todo par de grafos  $(G, G')$  relacionados de forma dirigida por un 2-switch:  $G \mapsto_\tau G'$ . Ya que es posible volver a  $G$  desde  $G'$  mediante  $\tau^{-1}$ , podemos intercambiar los roles de  $G$  y  $G'$  en la última desigualdad y deducir también que  $\mu(G') - \mu(G) \leq 1$ , con lo cual  $-1 \leq \mu(G') - \mu(G) \leq 1$ , es decir:  $|\mu(G') - \mu(G)| \leq 1$ .  $\square$

Obsérvese que un 2-switch como en 4.1.1 incrementa el número de matching en 1, o lo deja invariado. Luego, solo un 2-switch como en 4.1.2 puede llegar a disminuir  $\mu$  en 1.

Es de cierto interés, en general, estudiar la distribución de un parámetro, asociado a cierto objeto, en su rango de variación. Más aun, si hay cierto patrón de regularidad en esa distribución. En una familia finita de grafos es claro que un parámetro alcanzará su valor máximo y mínimo sobre algún miembro de la familia. Pero que otros valores se alcanzan? Dado un número (admisibles) cualquiera entre el máximo y el mínimo, existe un grafo donde el parámetro tiene ese valor? Pronto vamos a responder estas preguntas para el número de matching y los otros parámetros definidos en la Sección 2.2. Pero para enunciar los próximos resultados de forma más elegante, necesitamos de la siguiente definición.

**Definición 4.1.4.** *Si  $X$  es una colección finita de grafos y  $\xi(G) \in \mathbb{Z}$  es un parámetro asociado a un grafo  $G$ , definimos:  $\xi_{\min}(X) = \min\{\xi(G) : G \in X\}$  y  $\xi_{\max}(X) = \max\{\xi(G) : G \in X\}$ . Decimos que  $\xi$  tiene **propiedad de intervalo** en  $X$  si, para cada entero  $k$  en  $[\xi_{\min}(X), \xi_{\max}(X)]$ ,  $\exists G \in X$  tal que  $\xi(G) = k$*

El Teorema 4.1.3, junto con el Primer Teorema de Transición (2.3.9), implican el siguiente interesante resultado.

**Teorema 4.1.5.** *El número de matching tiene propiedad de intervalo en  $\Gamma_s$ .*

Más aun, el Teorema 4.1.3 puede combinarse con el Algoritmo de Transición o con el Teorema de Transición de árboles para deducir una afirmación análoga a la del Teorema 4.1.5 para bosques o árboles respectivamente (atención: estos no son casos particulares del Teorema 4.1.5).

**Teorema 4.1.6.** *El número de matching tiene propiedad de intervalo en  $\Phi_s$ .*

Combinamos a continuación el Teorema 4.1.6 con el resultado preliminar que relaciona número de independencia, rango y nulidad de un bosque (Teorema 2.2.14). Haciendo esto podemos obtener rápidamente la propiedad de intervalo para  $\alpha$  en  $\Phi_s$ , así como también podemos caracterizar los valores alcanzados por  $\text{rank}(F)$  y  $\text{null}(F)$  en su rango de variación en  $\Phi_s$ .

**Corolario 4.1.7.** *El número de independencia tiene propiedad de intervalo en  $\Phi_s$ . Más aun,  $\alpha_{\min}(\Phi_s) = n - \mu_{\max}(\Phi_s)$  y  $\alpha_{\max}(\Phi_s) = n - \mu_{\min}(\Phi_s)$ .*

*Demostración.* Si  $n$  es el orden de un bosque  $F \in \Phi_s$ , sabemos que  $\alpha(F) = n - \mu(F)$ . Luego,  $\alpha_{\min}(\Phi_s) = n - \mu_{\max}(\Phi_s)$  y  $\alpha_{\max}(\Phi_s) = n - \mu_{\min}(\Phi_s)$ . Como  $\mu$  tiene propiedad de intervalo en  $\Phi_s$  y  $n$  es claramente fijo, tenemos que  $\alpha$  también alcanza cualquier valor entero en  $[\alpha_{\min}(\Phi_s), \alpha_{\max}(\Phi_s)]$ . Por lo tanto,  $\alpha$  tiene propiedad de intervalo en  $\Phi_s$ .  $\square$

**Corolario 4.1.8.** *Para cada número par  $h$  en el intervalo  $[\text{rank}_{\min}(\Phi_s), \text{rank}_{\max}(\Phi_s)]$ , existe un bosque  $F \in \Phi_s$  tal que  $\text{rank}(F) = h$ . Más aun,  $\text{rank}_{\min}(\Phi_s) = 2\mu_{\min}(\Phi_s)$  y  $\text{rank}_{\max}(\Phi_s) = 2\mu_{\max}(\Phi_s)$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de la ecuación  $\text{rank}(F) = 2\mu(F)$  ( $F \in \Phi_s$ ) y de la propiedad de intervalo de  $\mu$  en  $\Phi_s$ .  $\square$

**Corolario 4.1.9.** *Sea  $n$  el orden de los bosques en  $\Phi_s$ . Si  $n = r$  (mód 2), entonces para cada entero  $h = r$  (mód 2) en  $[\text{null}_{\min}(\Phi_s), \text{null}_{\max}(\Phi_s)]$  existe un bosque  $F \in \Phi_s$  tal que  $\text{null}(F) = h$ . Más aun,  $\text{null}_{\min}(\Phi_s) = n - \text{rank}_{\max}(\Phi_s)$  y  $\text{null}_{\max}(\Phi_s) = n - \text{rank}_{\min}(\Phi_s)$ .*

*Demostración.* Puesto que  $\text{null}(F) = n - \text{rank}(F)$  y  $\text{rank}(F)$  es par, se sigue que  $\text{null}(F)$  tiene la misma paridad de  $n$ . Además, es claro que  $\text{null}_{\min}(\Phi_s) = n - \text{rank}_{\max}(\Phi_s)$  y  $\text{null}_{\max}(\Phi_s) = n - \text{rank}_{\min}(\Phi_s)$ , ya que  $n$  es fijo. Puesto que  $\text{rank}(F)$  alcanza todos los posibles valores pares en  $[\text{rank}_{\min}(\Phi_s), \text{rank}_{\max}(\Phi_s)]$ , se sigue que, cuando  $n$  es impar, para cada número impar  $h$  en  $[\text{null}_{\min}(\Phi_s), \text{null}_{\max}(\Phi_s)]$  existe un bosque  $F \in \Phi_s$  tal que  $\text{null}(F) = h$ . Se llega a la misma conclusión reemplazando “impar” por “par” para  $n$  y  $h$ .  $\square$

Decidimos enfatizar los siguientes dos resultados sobre árboles.

**Corolario 4.1.10** (Propiedad de Intervalo para  $\mu$  en  $\Psi_s$ ). *El número de matching tiene propiedad de intervalo en el conjunto de los árboles con una misma secuencia de grados.*

**Corolario 4.1.11** (Propiedad de Intervalo para  $\alpha$  en  $\Psi_s$ ). *El número de independencia tiene propiedad de intervalo en el conjunto de los árboles con una misma secuencia de grados.*

## 4.2. Propiedad de Intervalo del número de dominancia

En esta sección vamos primero a cuantificar la perturbación provocada por un 2-switch  $\tau$  sobre el número de dominancia de un grafo  $G$ . Igual que el número de matching, demostramos que la amplitud de la perturbación es  $\pm 1$ . Luego, una deducción del todo análoga a la de la sección anterior nos permite probar que el número de dominancia posee la propiedad de intervalo en las familias  $\Gamma_s$ ,  $\Phi_s$  y  $\Psi_s$ .

**Lema 4.2.1.** *Sea  $\tau$  un 2-switch sobre el grafo  $G$  y sea  $\tau(G) = G'$ . Entonces  $\gamma(G') \leq \gamma(G) + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $D$  un conjunto dominante mínimo en un grafo  $G$  de orden  $n \geq 4$  y sea  $V_\tau = \{a, b, c, d\}$  el subconjunto de vértices involucrados en  $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Seguramente, en  $G'$ ,  $D$  domina sobre los vértices en  $[n] - V_\tau$ . Si  $D$  domina en  $G'$ , tenemos que  $\gamma(G') \leq |D| = \gamma(G) < \gamma(G) + 1$ . Supongamos entonces que  $D$  no sea un conjunto dominante en  $G'$ . Esto significa que al menos un vértice en  $V_\tau$  queda descubierto en  $G'$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ese vértice es  $a$ . Como  $N_{G'}(a) = (N_G(a) - b) \dot{\cup} c$  y  $a$  está dominado en  $G$  pero no en  $G'$ , deducimos que  $b \in D$ , con lo cual  $d$  es dominado en  $G'$  por  $b$ . Por lo tanto,  $D' = D \dot{\cup} a$  es un conjunto dominante en  $G'$ . Esto implica que  $\gamma(G') \leq |D'| = \gamma(G) + 1$ .  $\square$

Podemos finalmente medir la variación de  $\gamma$  provocada por un 2-switch sobre un grafo  $G$ . Concretamente, demostramos a continuación que un 2-switch sobre  $G$  perturba su número de dominancia en, a lo sumo, 1. La prueba del próximo resultado es esencialmente idéntica a la prueba del Teorema 4.1.5.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $\tau$  un 2-switch sobre un grafo  $G$  y sea  $G' = \tau(G)$ . Entonces:*  
 $|\gamma(G') - \gamma(G)| \leq 1$ .

*Demostración.* El Lema 4.2.1 nos dice esencialmente que la desigualdad  $\gamma(G') - \gamma(G) \leq 1$  (\*) vale para cualquier par de grafos  $(G, G')$  relacionados de forma dirigida por un 2-switch:  $G \mapsto_\tau G'$ . Por lo tanto, como  $G' \mapsto_{\tau^{-1}} G$ , podemos usar (\*) reemplazando  $G'$  por  $G$  y viceversa, obteniendo también que  $-1 \leq \gamma(G') - \gamma(G)$ .  $\square$

Un argumento idéntico al que se uso para deducir los Teoremas 4.1.5 y 4.1.6, permite obtener los siguientes resultados sobre dominancia, del todo análogos a los que involucran el número de matching y el número de independencia.

**Teorema 4.2.3.** *El número de dominancia tiene propiedad de intervalo en  $\Gamma_s$  y  $\Phi_s$ .*

Igual que en la sección anterior, decidimos enfatizar la propiedad de intervalo de  $\gamma$  para árboles, consecuencia inmediata de la propiedad de intervalo del mismo parámetro en  $\Phi_s$ .

**Corolario 4.2.4** (Propiedad de Intervalo para  $\gamma$  en  $\Psi_s$ ). *El número de dominancia tiene propiedad de intervalo en el conjunto de los árboles con una misma secuencia de grados.*

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este último capítulo hacemos un rápido recorrido de los Capítulos 2, 3 y 4, destacando en cada uno de ellos los resultados originales mas importantes que se ha logrado conseguir.

Al ser el segundo un capítulo preliminar, decidimos destacar nada mas la novedosa definición de 2-switch como función de  $\mathcal{G}_n$  en si mismo. Esta permitió deducir nueva propiedades y reescribir otras ya conocidas en un lenguaje mas general y riguroso.

El Capítulo 3 es seguramente el mas rico en cuanto a resultados. Sin embargo, de todos ellos, hay dos que cabe resaltar en cuanto a generalidad y alcance de sus consecuencias: el Algoritmo de Transición y el Teorema de Transición de Bosques. Gracias a estos, no solo garantizamos la existencia de una sucesión de f-switches que transforme un bosque  $A$  en otro cualquiera  $B$  con la misma secuencia de grados, si no que también sabemos como determinar cada uno de esos f-switches.

En el cuarto capítulo lo mas importante que hemos demostrado es que la aplicación de un 2-switch en un grafo  $G$  perturba su numero de matching ( $\mu$ ) y de dominancia ( $\gamma$ ) en, a lo sumo, 1. Esta información nos permitió luego probar que  $\mu$  y  $\gamma$  tienen la propiedad de intervalo en los conjuntos  $\Gamma_s$  y  $\Phi_s$ . Vimos que el numero de independencia ( $\alpha$ ) también tiene esta propiedad, pero solo en  $\Phi_s$ .

# Bibliográfia

- [1] Gary Chartrand, Linda Lesniak, and Ping Zhang. *Graphs & digraphs*, volume 39. CRC press, 2010.
- [2] D. A. Jaume and G. Molina. Maximum and minimum nullity of a tree degree sequence. 2018.
- [3] Jean H Bevis, Gayla S Domke, and Valerie A Miller. Ranks of trees and grid graphs. *J. of Combinatorial Math. and Combinatorial Computing*, 18:109–119, 1995.
- [4] Deénes König Gráfok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:116–119, 1931.