

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL.
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA.

TEORÍA DE NUDOS

Ana Emilia de Orellana.

Licenciatura en Matemática Aplicada.

Índice

1. Conceptos Básicos	3
1.1. Movimientos de Reidemeister	4
1.2. Operaciones entre nudos	5
2. Clasificación	7
2.1. Notación de Conway	8
3. Invariantes	12
3.1. Número de enlace	12
3.2. Mínimo número de cruces	13
3.3. 3-Coloreabilidad	13
3.4. Número de desanudamiento	15
3.5. Polinomio de Alexander-Conway	17
3.6. Polinomio de Jones	20
4. Aplicaciones	22
4.1. Biología	22

Resumen

La monografía estará dividida en cuatro partes: la primera definirá por única vez el glosario de términos necesarios y recurrentes a lo largo del trabajo, a modo de cimientos sobre los cuales edificaremos conclusiones. La segunda sección tratará la clasificación de nudos, haciendo foco en la notación de Conway que, pese a no ser empleada, es frecuente en la bibliografía específica y material de consulta. En tercer lugar describiremos seis invariantes: Número de Enlace, Mínimo Número de Cruces, 3-Coloreabilidad, Número de Desanudamiento, Polinomio de Alexander-Conway y Polinomio de Jones. Por último se observará la incidencia de la Teoría de Nudos dentro de un área específica de la Biología Molecular.

Prólogo

Los nudos han formado parte de la historia de la humanidad durante siglos. Uno de los hallazgos más antiguos fue el Quipu (año 5000 a.C.), un instrumento utilizado por los Incas para guardar todo tipo de información numérica. Los distintos nudos, la posición, el nivel y el color de las cuerdas representaban, por ejemplo, fechas o cantidades de personas. Con la llegada de los españoles, miles fueron destruidos al creerlos instrumentos del demonio, y es por eso que en la actualidad solo quedan aproximadamente setecientos cincuenta de ellos.

También son utilizados nudos con fines decorativos, como las ilustraciones llevadas a cabo por monjes celtas en el Libro de Kells (año 800 d.C.), donde ocho patrones de nudos se vuelven evidentemente recurrentes a través de las representaciones.

La Teoría de Nudos tuvo sus comienzos en 1833, cuando Gauss descubrió una integral para calcular el número de enlace de un nudo. En 1867, paralelamente a sus estudios en Termodinámica, que acabaron por valerle un título de nobleza, William Thomson (Lord Kelvin), especuló con que los átomos pudieran ser nudos errando en medio de lo que conocían como éter. En 1880, Thomas Kirkman publicó un primer acercamiento a las proyecciones de nudos y esbozó la primera tabulación publicada. Peter Guthrie Tait, tiempo después, conoció a Thomson en Edimburgo y, alentado por sus ideas, decidió someterse al desafío de realizar la primera tabulación de hasta diez cruces en la historia, superando incluso lo hecho por Kirkman.

En matemática la teoría de nudos es una rama de la Topología y es de gran interés debido a sus aplicaciones en la genética molecular, para desenmarañar las hélices de ADN.

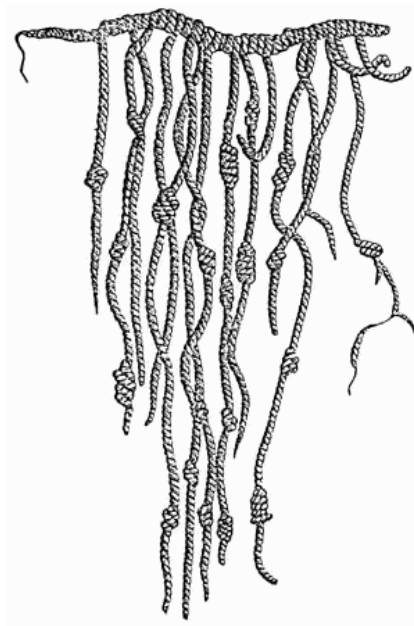


Figura 1: Quipu.

1. Conceptos Básicos

Definición 1. (*n*-esfera) Son los puntos de \mathbb{R}^{n+1} a distancia 1 del origen, se denota \mathbb{S}^n .

Definición 2. Un nudo es una función $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva.

Se define una relación de equivalencia dada por isotopía¹. Dos nudos k_1 y k_2 son equivalentes si y solo si existe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface:

- f biyectiva y continua.
- f^{-1} continua.
- $f(k_1) = k_2$.
- f preserva la orientación de \mathbb{R}^3 .

Es decir, dos nudos son equivalentes si se puede mover un nudo en el espacio para pasar de uno a otro “sin cortar ni pegar” la sogá.

El diagrama D de un nudo k es una proyección de k en un plano tal que ningún punto de D venga de dos puntos en k . Esto es, $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$. Cada punto en el diagrama con dos preimágenes es un punto con cruce. Se indica qué parte del nudo está abajo cortándolo en el dibujo.



Figura 2: Nudo con 23 cruces.

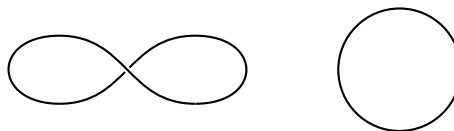


Figura 3: Dos proyecciones del nudo trivial

¹La palabra isotopía se refiere a la deformación de la cuerda

En esta monografía trabajaremos solamente con nudos *mansos*. En la Figura 4 muestra un nudo no manso, llamado *salvaje*.

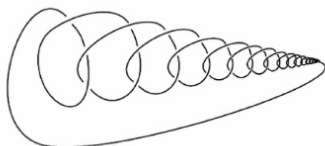


Figura 4: Nudo Salvaje.

1.1. Movimientos de Reidemeister



Kurt Reidemeister nació en el año 1893 en Alemania. Estudió filosofía, física, química, geología y matemática, pero dedicó su vida a esta última. Hizo su tesis doctoral en Teoría de Números Algebraica y contribuyó en Geometría Diferencial y Teoría de Nudos, entre otras ramas de la matemática.

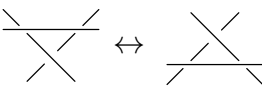
En 1927 Reidemeister ideó una colección de movimientos aplicables a la proyección de un nudo sin modificar el enlace que representa.

Figura 5: Kurt Werner Friedrich Reidemeister.

Son tres los llamados *Movimientos de Reidemeister*:

(I) Girar o crear un lazo. $\overline{\cup} \leftrightarrow \text{—}$

(II) Desplazar dos partes que no se cruzan. $\overline{\cup} \leftrightarrow \overline{\cup}$

(III) Pasar un trozo sin nudo sobre o bajo un cruce. 

Teorema 1. *Dos nudos son equivalentes si y solo si sus diagramas planos están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.*

Demostración. La demostración del Teorema supera los alcances de esta monografía, por lo tanto se analizará en el siguiente ejemplo. Ver figura 6.

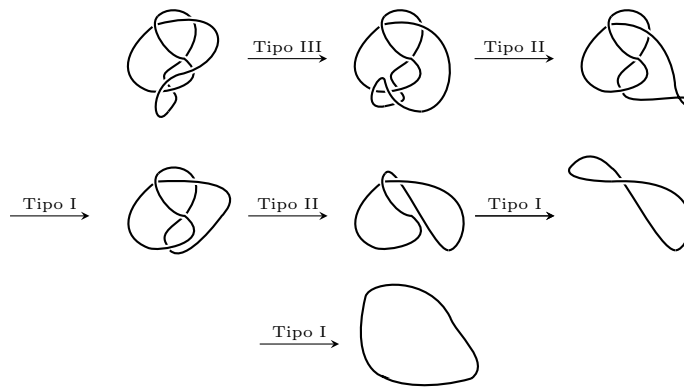


Figura 6: Ejemplo del Teorema 1.

□

Definición 3. La imagen especular de un nudo es la que se obtiene al aplicarle al nudo la transformación $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. La imagen especular de k se denota $m(k)$. Si un nudo es equivalente a su imagen especular, se llama *anfiqueral*. En caso contrario, el nudo es *quiral*.

Definición 4. El reverso de un nudo k se denota $r(k)$. Es el mismo nudo pero con orientación opuesta.

1.2. Operaciones entre nudos

Pongamos como ejemplo los números primos. Sabemos que éstos no pueden ser descompuestos en función (en este caso producto) de otros. Es posible entonces convenir un acercamiento similar para definir nudos primos.

Definición 5. La *suma conexas*, también llamada *composición de nudos*, es una operación entre dos nudos orientados k_1 y k_2 . Se denota $k_1 \# k_2$ y consiste en eliminar un arco de cada nudo donde no haya cruces y unir los puntos extremos de esos arcos por un camino sin cruces.

La suma conexas es conmutativa (figura 8), asociativa (figura 9) y el neutro es el nudo Trivial.

Definición 6. Un nudo primo es aquel que no puede descomponerse como suma conexas de nudos no triviales.

Definición 7. Se dice que un nudo es compuesto si puede representarse como suma conexas de nudos no triviales.

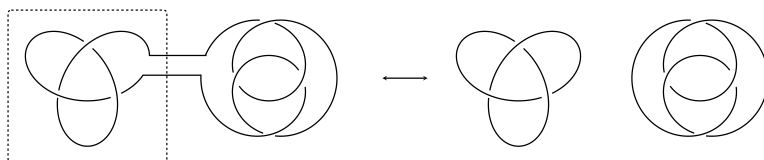


Figura 7: Suma y descomposición de nudos.

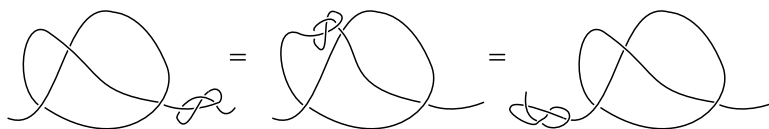


Figura 8: Propiedad conmutativa.

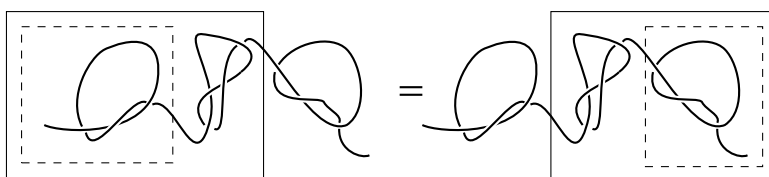


Figura 9: Propiedad asociativa.

Teorema 2. *Todo nudo no trivial k_1 se puede descomponer de forma única como sumas conexas de nudos primos. Esto es:*

- $k_1 = p_1 \# p_2 \# \dots \# p_n$, donde cada p_i es un nudo primo.
- si $k_1 = p_1 \# p_2 \# \dots \# p_n = p'_1 \# p'_2 \# \dots \# p'_n$ son dos descomposiciones en factores primos, entonces $p_i = p'_i$ para alguna permutación $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j(1) & \dots & j(n) \end{pmatrix}$.

Demostración. La demostración de este teorema supera los alcances de esta monografía, se puede ver en la página 96 de [8]. □

2. Clasificación

Apenas una década después de que la tabulación de Peter Tait fuese evaluada como la primera tabulación correcta, apareció otro personaje en escena. Se trataba de Charles Newton Little, quien en 1899 listó y enumeró los nudos no alternantes². Su trabajo publicado consistía en una tabla con cuarenta y tres nudos constituidos por al menos diez cruces. A partir entonces, esta tabulación se consideró de cabecera por el canon, y así se mantuvo invariable durante 75 años. Sin embargo, en 1974, un abogado llamado Kenneth Perko descubrió la posibilidad de que hubiera dos proyecciones con diez cruces, todos correspondientes al mismo nudo. El nombre de estos nudos no ha sido modificado y se los conoce hasta el día de hoy como “Los nudos de Perko”.



Figura 10: Los nudos de Perko.

En las tablas de nudos primos no se tienen en cuenta la imagen especular y el reverso de un nudo.

²Un nudo es alternante si al recorrerlo, los cruces se alternan entre cruces por arriba y por abajo.

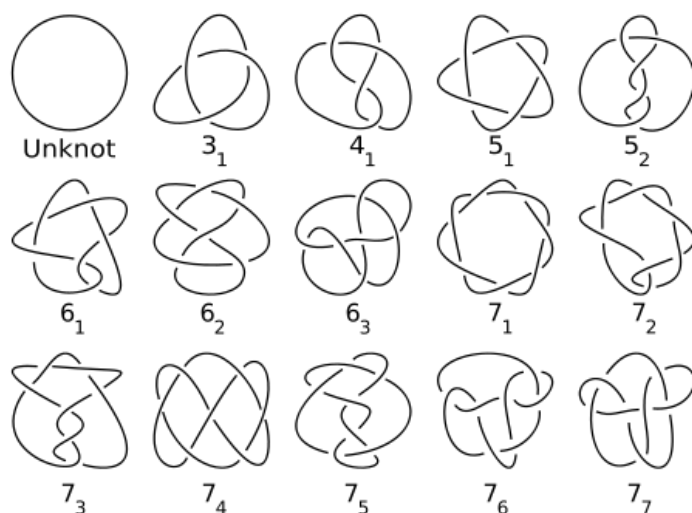


Figura 11: Tabla de nudos primos de hasta siete cruces.

En la figura 11 cada nudo tiene asociado un número que indica la cantidad de cruces. El subíndice es para enumerar la cantidad de nudos con igual número de cruces.

Esta forma de enumerar nudos no es muy útil, ya que los subíndices están por orden de descubrimiento, pero no informan sobre cómo construir el nudo. Otras tablas, como la de la figura 12 utilizan otra notación, explicada a continuación.

2.1. Notación de Conway

La notación de Conway usa partes de nudos llamados enredos, es decir la proyección de las dos cuerdas enredadas.

Se mantienen los cuatro extremos de las cuerdas por fuera del diagrama, apuntando en direcciones opuestas. Luego, dos enredos son equivalentes si, manteniendo los extremos en su lugar, se puede pasar de uno a otro a través de movimientos de Reidemeister. El valor de un enredo se calcula como se muestra en la figura 18.

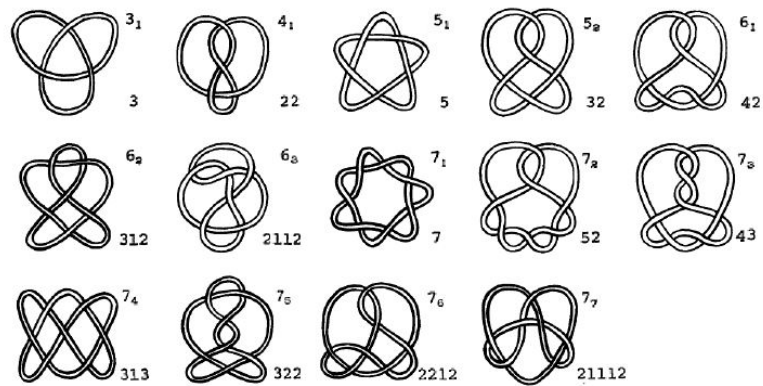


Figura 12: Tabla de nudos primos con la notación de Conway

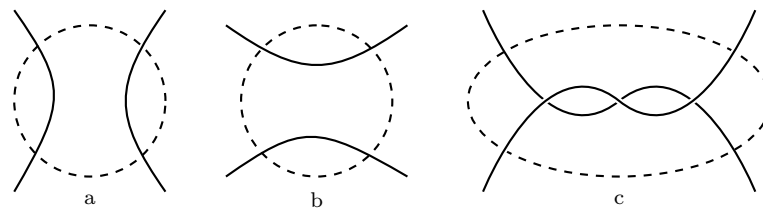


Figura 13: a. Enredo ∞ , b. Enredo 0, c. Enredo 3

La notación de Conway es una sucesión de números que representa el valor de cada enredo del nudo.

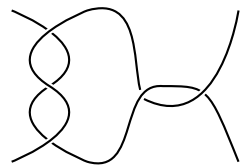


Figura 14: Enredo 32

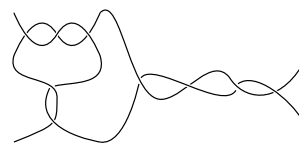


Figura 15: Enredo 324

La notación de Conway es un invariante de nudos. En la próxima sección se ampliará el tema.

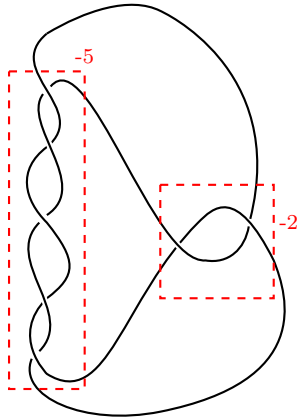


Figura 16: Nudo con notación de Conway negativa.

Hay una forma muy simple de decir, dadas las notaciones de Conway de dos nudos, si dos nudos son equivalentes o no. Por cada notación de Conway computamos una fracción continua y, si ambas son iguales, los nudos son equivalentes.

Ejemplo 1. Veamos si -232 y $3-23$ son equivalentes. Para ello, construyamos sus fracciones continuas.

-232:

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{-2}} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5}$$

3-23:

$$3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{3}} = 3 + \frac{1}{\frac{-5}{3}} = \frac{12}{5}$$

Como las fracciones continuas son iguales, entonces los nudos son equivalentes.

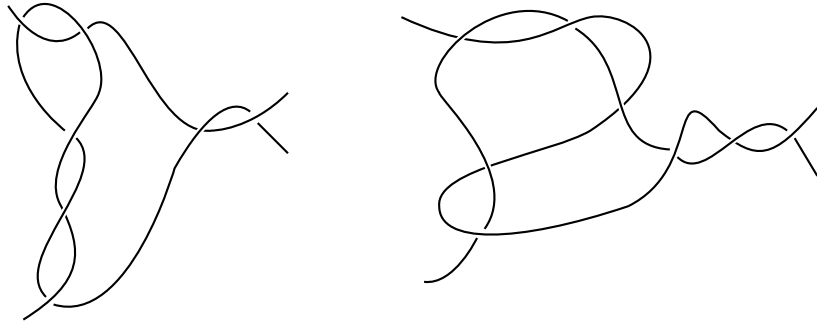


Figura 17: Nudos del ejemplo 1.

3. Invariantes

Definición 8. Un invariante γ es un objeto asociado a los diagramas de dos nudos k_1 y k_2 tal que, si $\gamma(k_1) = \gamma(k_2)$, entonces k_1 y k_2 son equivalentes.

3.1. Número de enlace

El número de enlace se utiliza para nudos con más de una componente conexa y depende de sus orientaciones. Es una medida de cuan enredado está un nudo, y para ello a cada cruce x se le asigna el valor $\epsilon(x) = 1$ o $\epsilon(x) = -1$, según se indica en la figura 18. Se denota $l(k_1, k_2)$, donde k_1 y k_2 son las dos componentes conexas de un nudo k .

$$l(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \sum_{x \in k} \epsilon(x)$$



Figura 18: Número de enlace.

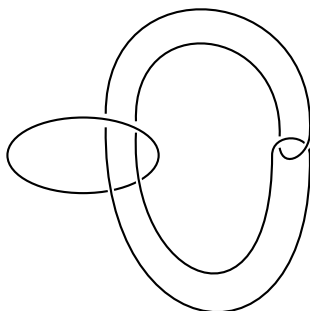


Figura 19: Whitehead Link, su número de enlace es 0.

3.2. Mínimo número de cruces

Es la menor cantidad de cruces que se pueden representar en la proyección de un nudo y se denota $c(k)$. A pesar de que la definición sea sencilla, el *crossing number* de un nudo es muy difícil de calcular, de hecho, aún no se conocen todos los nudos con catorce cruces.

Una proyección se dice *reducida* si no hay ninguna forma “fácil” de remover cruces. Kauffman, Murasugi y Thistlewaite demostraron un resultado muy importante. Se describe en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea k un nudo alternante con n cruces, luego $c(k) = n$.*

Para demostrar este teorema se utilizó el *polinomio de Jones*, que veremos más adelante.

El nudo de la figura 2 es alternante, por lo tanto su crossing number es 23.

Conjetura 1. *Sean k_1, k_2 dos nudos, entonces $c(k_1 \# k_2) = c(k_1) + c(k_2)$.*

Este problema está irresoluto desde hace 100 años. Solo se logró demostrar la igualdad para nudos alternantes. Veamos ahora otros resultados similares.

Teorema 4. *Sean k_1, k_2 dos nudos, entonces $c(k_1 \# k_2) \leq c(k_1) + c(k_2)$.*

Demostración. La demostración es trivial, ya que no puede ser $c(k_1 \# k_2) > c(k_1) + c(k_2)$ porque, por definición de suma conexas, al unir los extremos de los arcos, se debe hacer sin cruces. \square

Teorema 5. *Sea $k_1 \# \dots \# k_n$ la suma de los nudos k_1, \dots, k_n , entonces:*

$$\frac{c(k_1) + \dots + c(k_n)}{152} \leq c(k_1 \# \dots \# k_n) \leq c(k_1) + \dots + c(k_n).$$

Demostración. Se puede ver la demostración en [16]. \square

3.3. 3-Coloreabilidad

Decimos que un nudo es 3-coloreable si cada uno de sus arcos puede pintarse de un color distinto tal que en cada cruce haya tres colores o uno solo. Para que la proyección sea tricoloreable deben usarse al menos dos colores.

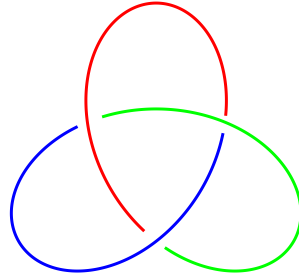


Figura 20: El nudo trébol es tricoloreable.

El 3-coloreo nos divide los nudos en dos grupos: los coloreables y los no coloreables. Para saber si dos nudos son equivalentes se necesita algo más. Le asignamos entonces a cada nudo un número que represente de cuántas formas se puede colorear. Lo denotamos $\tau(k)$.

Sea el conjunto de colores $C = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. En un cruce como el de la figura 21 se debe cumplir que $2a - b - c$ sea divisible por 3. Esto se puede escribir como $2a - b - c \equiv 0 \pmod{3}$.

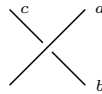


Figura 21: Cruce con ecuación $2a - b - c \equiv 0 \pmod{3}$.

La siguiente definición es una generalización de la 3-coloración y fue dada por Ralph H. Fox.

Definición 9. Sea p un número primo. Un nudo admite un coloreo de Fox de p colores si:

1. Podemos colorear los arcos con un entero en $\mathbb{Z}_p = 0, 1, \dots, p - 1$.
2. Al llamar x al arco que pasa por arriba e y y z a los otros dos, se cumple $2x - y - z \equiv 0 \pmod{p}$.
3. Se usan al menos dos colores distintos.

Ahora el problema de ver si un nudo es n -coloreable se redujo a resolver un sistema de ecuaciones lineales ya que, resolver $b + c \equiv 2a \pmod{n}$, es lo mismo que buscar las soluciones de $a + b + c = 0$ en \mathbb{Z}_n .

Ejemplo 2. Veamos de cuántas formas se puede 3-colorear el nudo $3_1 \# 3_1$ de la figura 22.

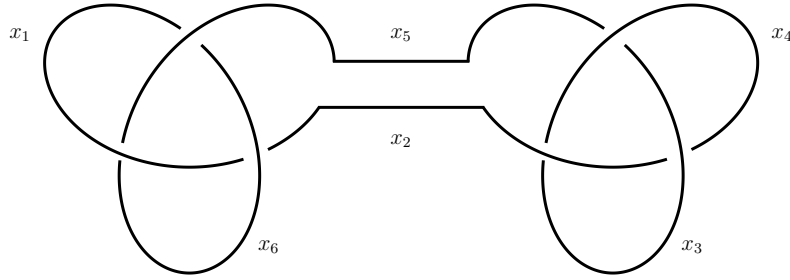


Figura 22: $3_1\#3_1$.

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \qquad \qquad \qquad + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 \qquad \qquad \qquad + x_5 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad \qquad \qquad + x_6 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 \qquad \qquad \qquad = 0 \\ \qquad \qquad x_3 + x_4 + x_5 \qquad \qquad \qquad = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 \qquad \qquad \qquad = 0 \end{array} \right.$$

Reducimos la matriz asociada para encontrar la dimensión del núcleo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Como la dimensión del núcleo es 3, entonces hay 27 formas de colorear $3_1\#3_1$.

3.4. Número de desanudamiento

Como vimos, intercambiar para cualquier nudo k la posición de dos arcos, de manera que el superior pase a ser el inferior, y viceversa, no es

un movimiento válido para la equivalencia de nudos.

Definimos entonces el número de desanudamiento de un nudo como la menor cantidad de cambios, de la índole de los susodichos, que son necesarios aplicarle a un nudo para que éste sea equivalente al nudo trivial. Lo denotamos $u(k)$.

Existe un algoritmo para desanudar un nudo: se toma un punto en el nudo y luego se elige una orientación para recorrerlo. Cada vez que nos encontremos con un cruce se realiza lo siguiente:

1. Si no habíamos pasado por ese cruce, lo cambiamos.
2. Si ya hemos pasado por ese cruce, lo dejamos como está.

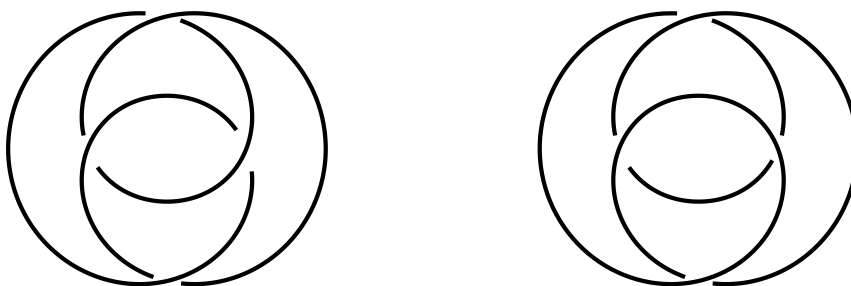


Figura 23: El número de desanudamiento del nudo ocho es 1.

Teorema 6. *Todo diagrama de un nudo se puede desanudar cambiando sus cruces.*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre el número de cruces de un nudo k .

Paso Base: Si $c(k) = 0$, entonces k es el nudo trivial y no hay nada que probar.

Hipótesis inductiva: Supongamos que el teorema vale para nudos k tales que $c(k) < m$.

Paso inductivo: Sea k un nudo tal que $c(k) = m$. Sea P un punto arbitrario sobre k tal que P no es un punto de cruce. Desde P recorreremos el nudo.

Si en un punto de cruce pasamos por el arco superior, lo omitimos y seguimos recorriendo el nudo.

Si en un punto de cruce pasamos por el arco inferior, entonces lo modificamos.

De esta forma, creamos un diagrama regular donde, empezando por P , siempre pasamos por arriba de los puntos de cruce. Repitiendo el proceso, llegamos a un punto de cruce A por donde ya hemos pasado antes. Se creó

entonces un bucle entre el punto P y el punto A . Por lo tanto se puede aplicar el movimiento de Reidemeister I. La proyección D' obtenida tiene menos puntos de cruces que la primera. Aplicando ahora la hipótesis inductiva sobre D' queda demostrado el teorema. \square

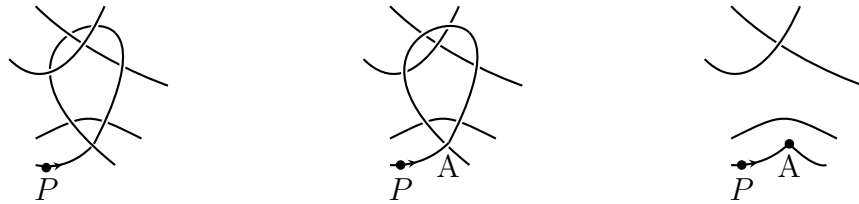


Figura 24: Demostración del teorema 6.

Teorema 7. Sea k un nudo, entonces $u(k) \leq c(k)$

Demostración. La demostración se encuentra en [17] \square

Teorema 8. Sea k un nudo tal que $u(k) = 1$, entonces k es primo.

Demostración. La demostración se puede ver en el Corolario 3.4 de [18] \square

El recíproco del teorema 8 no es cierto, ya que hay muchos nudos primos con número de desanudamiento distinto de 1. Por ejemplo $u(7_1) = 3$.

No se tiene mayor información respecto al comportamiento del número de desanudamiento con la suma conexa entre nudos. Es claro que $u(k_1 \# k_2) \leq u(k_1) + u(k_2)$ ya que la suma conexa no agrega cruces.

Conjetura 2. Sean k_1 y k_2 dos nudos, luego $u(k_1 \# k_2) = u(k_1) + u(k_2)$

3.5. Polinomio de Alexander-Conway

En el año 1928 James Waddel Alexander II definió el primer polinomio para nudos. No obstante, su definición padecía la desventaja de no contar con términos simples y ahondaba en complejidades matemáticas ajenas al conocimiento de quienes indagaban en el asunto. Fue, en última instancia, expresado por John Conway³ en 1969, haciendo su construcción más

³John Conway, conocido por haber creado *el juego de la vida* se dedicó a varias ramas de la matemática, que incluyen teoría de nudos, de juegos y de grupos, entre otras.

accesible. Denotamos al polinomio de Alexander-Conway de un nudo k como $\Delta_k(t)$.

Para construir el polinomio de Alexander-Conway de un nudo orientado, son necesarias dos reglas:

1. Sea k una proyección del nudo trivial, entonces $\Delta_k(t) = 1$
2. $\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0}(t) = 0$, donde L_+ , L_- y L_0 son cruces como los de la figura 25

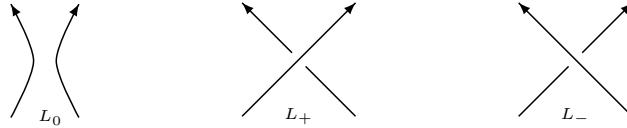


Figura 25: Regla para construir el polinomio de Alexander-Conway.

El polinomio de Alexander-Conway de un nudo, se construye de forma recursiva partiendo, por ejemplo, de un cruce L_- y cambiándolo para que sea L_0 y L_+ . Se aplican luego movimientos de Reidemeister y se calculan los polinomios de los nudos resultantes, siguiendo este proceso hasta llegar al nudo trivial, que sabemos vale 1. Una vez llegado a este paso, se construyen los polinomios de cada paso intermedio hasta llegar al nudo deseado.

Teorema 9. *Sea k un nudo,*

(I) *Si $-k$ es el nudo obtenido de invertir la orientación de k , entonces:*

$$\Delta_k(t) = \Delta_{-k}(t).$$

(II) *Si k^* es la imagen especular de k , entonces:*

$$\Delta_k(t) = \Delta_{k^*}(t).$$

Teorema 10. *Sean k_1 , k_2 dos nudos, luego:*

$$\Delta_{k_1 \# k_2}(t) = \Delta_{k_1}(t)\Delta_{k_2}(t).$$

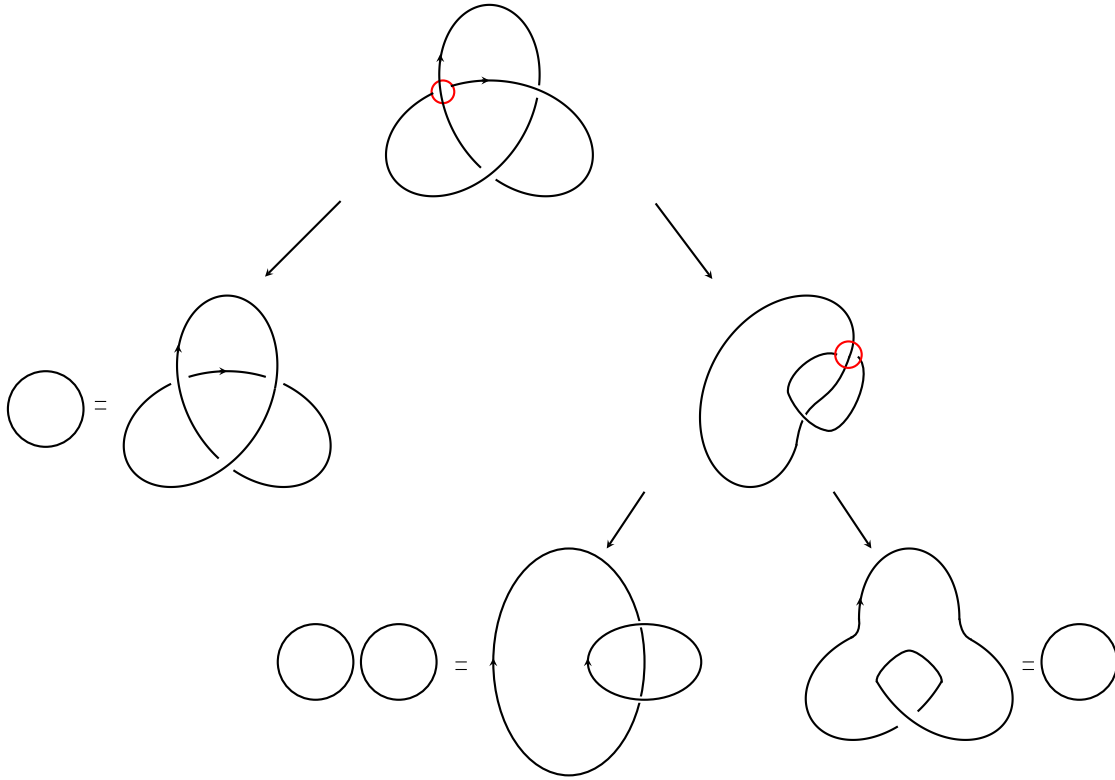


Figura 26: Pasos intermedios para conseguir el polinomio del nudo trébol.

Ejemplo 3. Construyamos el polinomio de Alexander-Conway del nudo trébol.

Tomando el nudo trébol como L_+ :

$$\Delta_{\otimes}(t) - \Delta_{\otimes}(t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{\otimes}(t) = 0.$$

Por la primer regla de la construcción del polinomio: $\Delta_{\otimes}(t) = 1$.

$$\Delta_{\otimes}(t) - \Delta_{\otimes}(t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{\otimes}(t) = 0.$$

Como $\Delta_{\otimes}(t) = 0$ entonces $\Delta_{\otimes}(t) = -t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}$.

Reemplazando para obtener el polinomio del nudo deseado se tiene:

$$\Delta_{\otimes}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^2 + 1 = t - 1 + t^{-1}.$$

3.6. Polinomio de Jones

En 1984 un matemático de Nueva Zelanda llamado Vaughan Jones descubrió un polinomio muy utilizado en teoría de nudos. Muchos resultados no se habían podido demostrar hasta su aparición.

El polinomio de Jones de un nudo k , denotado $V_k(t)$, se construye de forma recursiva como sigue:

1. $V_{\circlearrowleft}(t) = 1$.
2. $\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V_{L_0}(t)$.

Sin embargo, es conveniente antes definir el corchete de Kauffman, de un nudo k , denotado $\langle k \rangle$. Luego, el polinomio de Jones se constituirá modificando una variable. El corchete de Kauffman se construye de forma recursiva con las siguientes reglas:

1. Si k es el nudo trivial entonces $\langle k \rangle = 1$.
2. $\langle \times \rangle = A \langle \rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$.
 $\langle \asymp \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \rangle$.
3. Sea L un cruce y k el nudo trivial, $\langle L \cup k \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$.

El polinomio de Jones es igual al corchete de Kauffman con un cambio de variable $A = t^{\frac{1}{4}}$.

Ejemplo 4. Construyamos el corchete de Kauffman y el polinomio de Jones del nudo de Hopf.

$$\begin{aligned}
 \langle \textcircled{\circlearrowleft} \rangle &= A \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\circlearrowleft} \rangle \\
 &= A(A \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\circlearrowleft} \rangle) + A^{-1}(A \langle \textcircled{\circlearrowright} \rangle + A^{-1} \langle \textcircled{\circlearrowleft} \rangle) \\
 &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) \\
 &= -A^4 - 1 + 1 + 1 - 1 - A^{-4} \\
 &= -A^4 - A^{-4}
 \end{aligned}$$

Una vez encontrado el corchete de Kauffman, hacemos el cambio de variable para tener el polinomio de Jones.

$$V_{\textcircled{\circlearrowleft}}(t) = -t^{-1} - t.$$

Teorema 11. Sea k^* la imagen especular de k , entonces:

$$V_{k^*}(t) = V_k(t^{-1}).$$

Observación 1. Notar que si un nudo es anfiqueral, luego $V_k(t) = V_k(t^{-1})$, esto es, $V_k(t)$ es simétrico.

Teorema 12. Sean k_1, k_2 dos nudos,

$$V_{k_1 \# k_2}(t) = V_{k_1}(t)V_{k_2}(t).$$

4. Aplicaciones

4.1. Biología

En 1962 Francis Crick y James Watson ganaron el premio Nobel en medicina por sus aportes sobre la molécula de ADN, presente en las células y cuya función es guardar la información genética. No es sino durante los diversos procesos biológicos que las moléculas de ADN se anudan y enlazan.

Para entender el papel que cumplen las enzimas⁴ en los procesos de réplica, transcripción y recombinación de ADN, se utiliza la teoría de nudos. Veamos, por ejemplo, como actúan dos enzimas:

Topoisomerasa: Se encarga de cortar una cadena de ADN en el cruce con otra, para que la que antes se encontraba debajo esté ahora encima. Luego vuelve a unir los extremos de la cadena que había cortado. En consecuencia, el número de cruces ha cambiado.

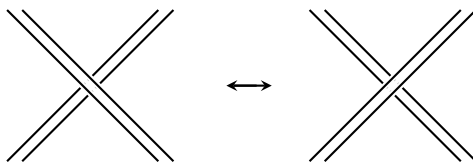


Figura 27: Efecto de la Topoisomerasa en una molécula de ADN.

Recombinasa: Primero dos arcos de una misma o dos moléculas de ADN distintas se “acercan”. La enzima corta y une los extremos de distintos arcos.

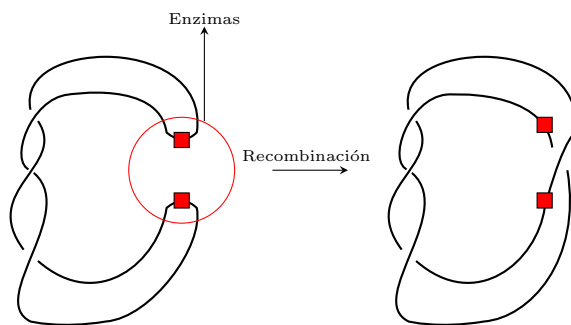


Figura 28: Efecto de la Recombinasa en una molécula de ADN.

Las fotografías obtenidas con microscopios electrónicos muestran nudos de

⁴Moléculas orgánicas que afectan la velocidad de una reacción.

ADN muy similares a los nudos matemáticos. Clasificarlos ayuda a entender el funcionamiento de las enzimas.

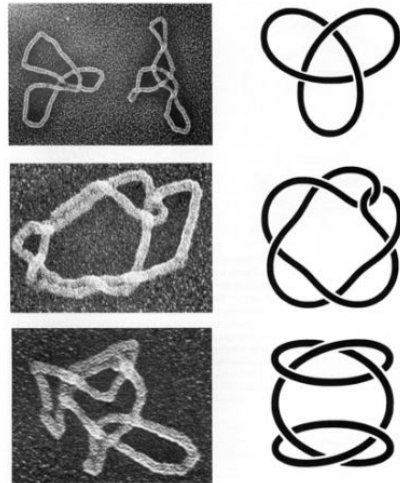


Figura 29: Fotografías de nudos de ADN con su nudo matemático asociado.

Referencias

- [1] F ARDILA, PABLO. *Introducción a los Invariantes de Nudos*. Rev. Tecno Lógicas Segunda Edición Especial, año 2010. ISSN 0123-7799.
- [2] J. W, ALEXANDER. *Topological invariants of knots and links*. Transactions of the American Mathematical Society, Volume 30 Issue 2, year 1928
- [3] MOLINA CISNEROS JOSÉ LUIS. *Introducción a la Teoría de Nudos*. V Jornadas de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, año 2011.
- [4] MIRA J, RODRÍGUEZ J, SALAZAR O. *Introducción a la Teoría de Nudos*. Revista de Ciencias, Volumen 20 Número 2, año 2016.
- [5] LUPING WANG XIAO. *Introducción a la teoría de Nudos*. Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación.
- [6] RICHARD H. CROWELL, RALPH H. FOX. *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, New York, 1963
- [7] KUNIO MURASUGI. *Knot Theory and its Applications*. Birkäuser, Boston, year 1996.
- [8] BURDE GERHARD, ZIESCHANG HEINER. *Knots*. Walter de Gruyter, year 2003.
- [9] IMÍZCOZ LOZANO MARÍA TERESA. *La teoría de Nudos en el siglo XX*. Universidad de Zaragoza.
- [10] AZCURRA PABLO. *Nudos Virtuales e Invariantes*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, año 2008.
- [11] IMÍZCOZ LOZANO MARÍA TERESA. *Nudos y Variedades Tridimensionales*. Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, año 1998.
- [12] WASSERMAN, S., J. DUNGAN, AND N. COZZARELLI. *Discovery of a predicted DNA knot substantiates a model for site-specific recombination*. Science 229171-174, year 1985.

- [13] DE WITT SUMNERS. *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes*. Notices of the AMS, Volume 42, Number 5.
- [14] VENDRAMIN LEANDRO. *Teoría combinatoria de nudos*. VII Encuentro Nacional de Álgebra, La Falda, Sierras de Córdoba, Argentina, año 2014.
- [15] COLIN C. ADAMS. *The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. W. H. Freeman and Company, New York, año 1994.
- [16] MLACKENBY. *The crossing number of composite knots*. Journal of Topology 2,4, año 2009.
- [17] H. CONWAY, J. *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*. Computational Problems in Abstract Algebra. Elsevier, pp. 329–358, año 1970
- [18] M. G. SCHARLEMANN AND A. THOMPSON *Unknotting number, genus, and companion tori*. Mathematische Annalen, año 1988.
- [19] MUÑOZ VICENTE. *Formas que se deforman, la topología*. RBA, El Mundo es Matemático, año 2011.
- [20] PICKOVER CLIFFORD. *Libro de las Matemáticas, de Pitágoras a la 57 Dimensión, 250 Hitos de la Historia de las matemáticas*. Ilus Books, año 2010.