Sobre el Problema de Matching Perfecto en Hipergrafos Bipartitos

Expositor: Paola Tolomei (UNR-CONICET, ptolomei@fceia.unr.edu.ar)
Autor/es: Paola Tolomei (UNR-CONICET, ptolomei@fceia.unr.edu.ar); Mariana Escalante (UNR-CONICET, escalante@fceia.unr.edu.ar); Daniel Severin (UNR-CONICET, daniel@fceia.unr.edu.ar)

El *Problema de Matching Perfecto de Mínimo Peso en Hipergrafos Bipartitos* (MP) es un problema que generaliza a su homónimo sobre grafos bipartitos y, entre otras aplicaciones, permite modelar otro problema denominado *Identificación Cruzada de Catálogos Estelares* (véase D. Severín, *Cross-identification of stellar catalogs with multiple stars: Complexity and Resolution*, Electron. Notes Discr. Math. **69** (2018), 29–36).

Sea $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ un hipergrafo. Un conjunto $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ es un *matching* de $\mathcal{H}$ si es un conjunto de hiperaristas disjuntas, i.e. para $t_1, t_2 \in \mathcal{E}'$ diferentes, $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. $\mathcal{H}$ es *bipartito* si X puede ser particionado en conjuntos A, B y cada hiperarista t satisface $|t \cap A| = 1$. Para un hipergrafo bipartito $\mathcal{H} = (A \cup B, \mathcal{E})$ y $t \in \mathcal{E}$, la función $\pi_A : \mathcal{E} \to A$ aplicada a t, i.e. $\pi_A(t)$, devuelve el único elemento de $t \cap A$ y la función $\pi_B : \mathcal{E} \to \mathcal{P}(B)$ se define como $\pi_B(t) \doteq t \cap B$. Llamamos $\mathcal{K}$ al máximo valor posible de $|\pi_B(t)|$.

Un conjunto $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ es un *matching perfecto* de un hipergrafo bipartito $\mathcal{H}$ si $\mathcal{E}'$ es un matching de $\mathcal{H}$ que satura A, i.e. $A = \{\pi_A(t) : t \in \mathcal{E}'\}$. Sea $w \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ un vector de costos positivos. El MP consiste en obtener un matching perfecto $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{H}$ tal que $\sum_{t \in \mathcal{E}'} w_t$ sea mínimo.

Notemos que $\mathcal{H}$ podría no admitir un matching perfecto. De hecho preguntarse por su existencia es NP-completo, aunque existen condiciones suficientes y un algoritmo polinomial cuando una de ellas se satisface (véase C. Annamalai, *Finding Perfect Matchings in Bipartite Hypergraphs*, Combinatorica (2018), 1285–1307).

El MP puede resolverse mediante una transformación al *Problema del Conjunto Estable de Máximo Peso*. Sea G el grafo que surge de dicha transformación. En este trabajo: 1) caracterizamos cómo debe ser la instancia del MP para que G sea claw-free, resultando polinomial en estos casos, 2) demostramos que el MP es polinomial si $|A| = 2$, y 3) hallamos algunas familias de desigualdades clique del poliedro surgido de la formulación del MP en el caso en que $\mathcal{H}$ es completo (i.e. existen todas las hiperaristas posibles) y $\mathcal{K} = 2$.