Versiones locales del teorema de Bishop-Phelps-Bollobás

Expositor: Martin Mazzitelli (Instituto Balseiro-UNCuyo, mazzimd@gmail.com)
Autor/es: Sheldon Dantas (Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, gildashe@fel.cvut.cz); Sun Kwang Kim (Department of Mathematics, Chungbuk National University, Republic of Korea, skk@chungbuk.ac.kr); Han Ju Lee (Department of Mathematics Education, Dongguk University - Seoul, Republic of Korea, hanjulee@dongguk.edu); Martin Mazzitelli (Instituto Balseiro-UNCuyo, mazzimd@gmail.com)

E. Bishop y R. Phelps demostraron en [BP] que para cualquier espacio de Banach X, el conjunto de las funcionales lineales y acotadas que alcanzan su norma es un subconjunto denso en X^*, el espacio dual de X. Pocos años después, Bollobás presentó en [Boll] una versión cuantitativa de este resultado, conocida hoy en día como el teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Este teorema afirma que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x^* \in S_{X^*}$ y $x \in S_X$ (aquí, S_Z denota la esfera unitaria de un espacio de Banach Z) satisfacen

$$|x^*(x)| > 1 - \eta(\varepsilon), \tag{1}$$

entonces existen $y^* \in S_{X^*}$ e $y \in S_X$ tales que $y^*(y) = 1$, $\|y - x\| < \varepsilon$ y $\|y^* - x^*\| < \varepsilon$. Es decir, si $x^* \in S_{X^*}$ *casi* alcanza su norma en $x \in S_X$, se pueden encontrar $y \in S_{X^*}$ e $y \in S_X$ tales que y^* alcanza su norma en y con y *cerca* de x y con y^* *cerca* de x^*.

Recientemente [DKL, KL] se estudiaron dos versiones ligeramente distintas del teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, motivadas por caracterizaciones de dos propiedades geométricas de los espacios de Banach: la convexidad uniforme y la suavidad uniforme. Estas propiedades, denominadas *Bishop-Phelps-Bollobás operator property* (BPBop) y *Bishop-Phelps-Bollobás point property* (BPBpp), fueron introducidas y estudiadas en el contexto de operadores lineales y bilineales a valores vectoriales. Siguiendo esta misma línea, en [DKLM, DKLM2] hemos estudiado versiones locales de las propiedades BPBop y BPBpp. Mostraremos las diferencias entre estas propiedades locales y sus respectivas versiones uniformes, y su estrecha relación con propiedades geométricas de los espacios de Banach.

Referencias

[BP] Bishop E. and Phelps R., *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67**, (1961), 97-98.

[Boll] Bollobás B., *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc. **2**, (1970), 181-182.

[DKL] Dantas S., Kim S.K. and Lee H.J., *The Bishop-Phelps-Bollobás point property*, J. Math. Anal. Appl., **444**, 1739-1751, 2016.

[DKLM] Dantas S., Kim S. K., Lee H. J. and Mazzitelli M., *Local Bishop-Phelps-Bollobás properties*, J. Math. Anal. Appl., **468 (1)**, 304-323, 2018.

[DKLM2] Dantas S., Kim S. K., Lee H. J. and Mazzitelli M., *Strong subdifferentiability and local Bishop-Phelps-Bollobás properties*, arXiv:1905.08483v1.

[KL] Kim S.K. and Lee H.J., *Uniform convexity and the Bishop-Phelps-Bollobás property*, Canad. J. Math., **66**, 373-386, 2014.