Problemas de distancias al operador de marco

Expositor: Noelia Belén Rios (CMaLP-FCE-UNLP / IAM-CONICET, noebelen83@gmail.com)
Autor/es: Pedro Massey (CMaLP-FCE-UNLP / IAM-CONICET, pedro.massey@gmail.com); Noelia Belén Rios (CMaLP-FCE-UNLP / IAM-CONICET, noebelen83@gmail.com); Demetrio Stojanoff (CMaLP-FCE-UNLP / IAM-CONICET, demsto@gmail.com)

Sean S una matriz positiva en $\mathbb{C}^{d\times d}$ y $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^k$ un vector de entradas reales positivas ordenado de manera no creciente. Vamos a considerar el producto (cartesiano) de esferas

$$\mathbb{T}_d(\mathbf{a}) := \{\mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^k \in (\mathbb{C}^d)^k \ : \|g_i\|^2 = a_i, \ \forall i = 1, \cdots, k\}\,.$$

dotado con la siguiente métrica

$$d(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})^2 = \sum_{i=1}^{k} \|g_i - \tilde{g}_i\|^2 \quad \text{para} \quad \mathcal{G} = \{g_i\}_{i=1}^k,\, \tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{g}_i\}_{i=1}^k \in \mathbb{T}_d(\mathbf{a})\,.$$

Luego, fijando la matriz S y el vector $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^k$ como antes y considerando una norma unitariamente invariante y estrictamente convexa N, definimos la *distancia al operador de marco* como la función $\Phi_{(N,S,a)} = \Phi_N : \mathbb{T}_d(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\Phi_N(\mathcal{G}) = N(S - S_{\mathcal{G}}),$$

donde $S_{\mathcal{G}} = \sum_{i=1}^k g_i\, g_i^*$ es el operador de marco de la familia $\mathcal{G}$. Cuando la norma N elegida es "suave", como en el caso de las normas p de Schatten, se puede utilizar algoritmos de tipo de descenso en la dirección del gradiente para hallar (o aproximar) los mínimos de esta función. Considerando un algoritmo de este tipo y siendo N la norma Frobenius de matrices, N. Strawn conjeturó en **[S.]** que (bajo ciertas hipótesis de mayorización) los minimizadores locales de Φ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son minimizadores globales. La veracidad de esta conjetura fue probada recientemente como una aplicación de un problema de completaciones de marcos con normas predeterminadas, aún en términos más generales que los planteados por Strawn.

En esta charla mostraremos que para N una norma unitariamente invariante y estrictamente convexa cualquiera, los minimizadores locales de Φ_N en $\mathbb{T}_d(\mathbf{a})$ son globales, utilizando como herramienta principal una versión local del Teorema de Lidskii para matrices autoadjuntas, que será clave para obtener de manera detallada la estructura geométrica y espectral de los minimizadores locales. En particular, veremos que las familias de vectores con normas predeterminadas que minimizan estas distancias al operador de marco, no dependen de la norma unitariamente invariante elegida. Cabe destacar que este resultado incluye una prueba alternativa de la conjetura de Strawn.

MRS. P. Massey, N. Rios, D. Stojanoff; Generalized frame operator distance problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2019), aceptado para su publicación.

S. N. Strawn; Optimization over finite frame varieties and structured dictionary design, Appl. Comput. Harmon. Anal. 32 (2012) 413-434.