Muestreo dinámico para operadores que conmutan con traslaciones enteras

Expositor: Alejandra Aguilera (Universidad de Buenos Aires - IMAS CONICET, aaguilera@dm.uba.ar)
Autor/es: Alejandra Aguilera (Universidad de Buenos Aires - IMAS CONICET, aaguilera@dm.uba.ar); Carlos Cabrelli (Universidad de Buenos Aires - IMAS CONICET, cabrelli@dm.uba.ar); Diana Carbajal (Universidad de Buenos Aires - IMAS CONICET, dcarbajal@dm.uba.ar); Victoria Paternostro (Universidad de Buenos Aires - IMAS CONICET, vpater@dm.uba.ar)

El problema del Muestreo Dinámico (Dynamical Sampling) consiste en recuperar una señal que evoluciona con el tiempo a partir de muestras espacio-temporales. Se supone que las muestras espaciales registradas en cada instante de tiempo son insuficientes para recuperar la señal, lo que hace necesario muestrear varias veces en el tiempo.

Matemáticamente, una manera de expresar el problema anterior es la siguiente: dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operator lineal y acotado (operador de evolución), encontrar un conjunto $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\} \subset \mathcal{H}$ tal que $\{T^k f_i : i \in I, k \in K\}$ es una base o un frame para $\mathcal{H}$, donde I y K son subconjuntos de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

El problema en el caso finito-dimensional fue resuelto completamente. Por ejemplo, si $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ es una matriz diagonalizable, y l_i es finito entonces $\{A^n f_i : i \in I, n = 0, ..., l_i\}$ es un frame de $\mathbb{C}^d$ si y solo si para cada proyección P sobre un autoespacio de A se tiene que $\{Pf_i\}_{i\in I}$ es completo en $P(\mathbb{C}^d)$.

En esta charla presentaremos el problema de muestreo dinámico para una clase de operadores que conmutan con traslaciones enteras (vectores), que actúan en un subespacio invariante por traslaciones finitamente generado V de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Encontramos condiciones sobre un operador $L : V \to V$ y sobre un conjunto $\{f_1, ..., f_m\} \subset V$, para que la familia

$$\{T_k L^j f_i : k \in \mathbb{Z}^d, j = 1, ..., n-1, i = 1, ..., m\}$$

sea un frame para V.

La idea consiste en asociarle al operador L una familia de operadores $\{R(\omega)\}_{\omega\in[0,1)^d}$ definidos en espacios de dimensión finita y luego combinar un teorema de diagonalización con los resultados existentes para el problema de muestreo dinámico finito-dimensional. Sin embargo, estos resultados no pueden ser aplicados directamente pues necesitamos uniformidad en las cotas de frame de la familia $\{R(\omega)\}_{\omega\in[0,1)^d}$, con el objetivo de trasladar ciertas propiedades al operador L.