Fórmula unificada para matrices hermitianas minimales de 3×3

Expositor: Abel Horacio Klobouk (UNLu - UNGS, aklobouk@unlu.edu.ar)
Autor/es: Abel Horacio Klobouk (UNLu - UNGS, aklobouk@unlu.edu.ar)

Sean $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ y $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ el álgebra de las matrices complejas y diagonal reales de 3×3 respectivamente. Dada una matriz $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ fija, estudiamos las matrices diagonales $D_M \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ que alcanzan la norma cociente

$$\|M + D_M\| = |||\,[M]\,||| = \min_{D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})} \|M + D\| = \operatorname{dist}\left(M, \mathcal{D}_3\left(\mathbb{R}\right)\right),$$

o equivalentemente

$$\|M + D_M\| \leq \|M + D\|, \text{ para toda } D \in \mathcal{D}_3\left(\mathbb{R}\right)$$

donde $\| \ \|$ denota la norma espectral. Las matrices $M + D_M$ son llamadas matrices minimales. Estas matrices aparecen en el estudio de curvas minimales en la variedades bandera $\mathcal{P}(n) = \mathcal{U}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)/\mathcal{U}\left(\mathcal{D}_n(\mathbb{C})\right)$ donde $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ denota las matrices unitarias del álgebra $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{P}(n)$ está dotado por una métrica de Finsler determinada por la norma cociente. Las curvas minimlaes δ en $\mathcal{P}(n)$ son dadas por acción a izquierda de $\mathcal{U}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)$ sobre $\mathcal{P}(n)$. Esto es

$$\delta(t) = \left[e^{itM}U\right],$$

donde M es minimal y $[V]$ denota la clase de V in $\mathcal{P}(n)$. Además, las preguntas naturales y algunos ejemplos particulares que aparecen de la descripción geométrica de estos objetos están relacionados con problemas que aparecen en otros contextos: problemas de minimización de operadores relacionados con optimización y control, positividad y desigualdades en el análisis matricial, seminormas de Leibnitz, matrices unitariamente estocásticas.

El problema de encontrar la matriz D_M más próxima a una matriz M fija es un problema díficil debido a que la norma espectral no es diferenciable.

El caso de las matrices hermitianas minimales de 3×3 fue tratado en una publicación previa[1], detallando la existencia y en algunos casos la unicidad de la diagonal D_M, que se calcula a partir de distintas fórmulas dependiendo de las entradas de la matriz M. En el presente trabajo se muestra una fórmula única de existencia de la digonal D_M que surge de una ingeniosa utilización del teorema del seno y del coseno de la geometría plana, extendiendo su formulación para aquellos casos en que los segmentos no se correspondan con valores de un triángulo posible, siendo este caso una aplicación concreta de una generalización de los teoremas mencionados que posee por sí mismo un interés propio.

[1] Klobouk, Abel; Varela Alejandro, *Concrete Minimal* 3×3 *Hermitian Matrices and Same General Cases*, Demonstratio Mathematica (2017), 50(1), pp. 330-350