El espacio de interpolación $(L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p}$ en dominios irregulares

Expositor: Irene Drelichman (IMAS (CONICET-UBA) y Departamento de Matemática, FCE, UNLP, irene@drelichman.com)
Autor/es: Irene Drelichman (IMAS (CONICET-UBA) y Departamento de Matemática, FCE, UNLP, irene@drelichman.com); Ricardo Durán (IMAS (CONICET-UBA) y Departamento de Matemática, FCEN, UBA, rduran@dm.uba.ar)

Es un resultado clásico que el espacio $(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1$, obtenido mediante el método de interpolación real es $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, cuya norma está dada por

$$\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + |f|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)},$$

con

$$|f|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy\,dx.$$

El mismo resultado vale en dominios Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde ahora

$$|f|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy\,dx.$$

Por otra parte, se sabe que este resultado no es válido para dominios arbitrarios ya que, cualquiera sea Ω, se tiene $W^{1,p}(\Omega) \subset (L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p} \subset L^p(\Omega)$, y es fácil construir ejemplos de dominios para los cuales $W^{1,p}(\Omega) \not\subset W^{s,p}(\Omega)$, para ciertos valores de s y p, siendo un ejemplo típico un cuadrado al que se le quita un segmento.

En este trabajo obtenemos una caracterización del espacio intermedio $(L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p}$ para una clase de dominios que llamamos admisibles, la cual incluye ciertos dominios que no son Lipschitz. Demostramos que para esta clase vale que $(L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p} = \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ donde $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ es el subespacio de $L^p(\Omega)$ inducido por la seminorma

$$|f|^p_{\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)} = \int_{\Omega}\int_{|x-y|<\frac{d(x)}{2}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dy\,dx.$$

Es interesante mencionar que este espacio fraccionario fue introducido previamente en el contexto de desigualdades de Poincaré fraccionarias y que se sabe que $W^{s,p}(\Omega) = \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ cuando Ω es un dominio Lipschitz o, más en general, un dominio uniforme.