Una Introducción al Control Geométrico Nolineal

Leonardo J. Colombo

Centro de Automática y Robótica (CSIC-UPM)

Control Geométrico (No-lineal)

- La teoría de control es una disciplina matemática que trata la influencia del comportamiento (control) de un sistema dinámico.

- El espacio de configuración de muchos sistemas mecánicos son variedades diferenciables (grupos de Lie, espacios simétricos,...). Las técnicas de geometría diferencial y Riemanniana son fundamentales en la teoría de control moderna.

- Muchos pocesos en industría como robótica y la industría aeroespacial tienen una fuerte conexión con la dinámica no-lineal.

Contenido del Curso: Clase I

- Generalidades de sistemas de control (definición, conjuntos alcanzables, problemas típicos en teoría de control)
- Controlabilidad de sistemas de control afínes
- Sistemas de control en grupos de Lie
- Sistemas de contol invarintes a derecha
- Controlabilidad de sistemas de control invariantes a derecha
- Observabilidad de sistemas de control
- Observabilidad de sistemas de control invariantes a izquierda
- Aplicación: Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Qué es un sistema dinámico?

Un sistema dinámico es una ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in M.$$

- M es una variedad diferenciable.
- f es un campo vectorial en M:

$$x \in M \mapsto f(x) \in T_x M.$$

Curva integral

Una *curva integral* de un campo vectorial f es una curva $\gamma(t)$ que satisface

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \text{para todo } t.$$

$$\gamma \text{ es solución de } \dot{x} = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \text{ es curva integral de } f.$$

Dar un sistema dinámico es dar un campo vectorial.

Campos vectoriales y flujos

Asumamos que el campo vectorial f es completo, es decir: para cada $x_0 \in M$ la solución $x(t, x_0)$ del problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0,$$

está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Flujo generado por el campo vectorial f:

$$\exp(tf) : M \to M, \qquad t \in \mathbb{R},$$

definido por

$$\exp(tf)(x_0) = x(t, x_0),$$

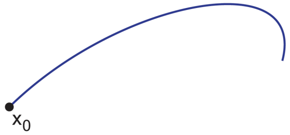
donde $x(t, x_0)$ es la solución en el instante t con condición inicial x_0.

(Intuición: $\exp(tf)$ mueve cada punto x_0 a lo largo de la curva integral de f durante un tiempo t.)

Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico evolucionando en una variedad M es un campo vectorial $f(\cdot)$ en M

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x(t) \in M.$$



La dinámica de este sistema esta determinada solamente por el flujo de un campo vectorial.

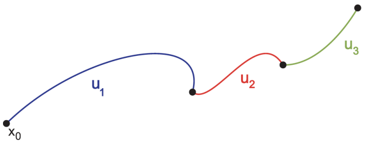
El futuro $x(t, x_0)$ esta completamente determinado por el estado en el presente x_0!.

Para afectar (controlar) la dinámica, debemos considerar una familia de campos vectoriales

Qué es un sistema de control?

Un sistema de control evolucionando en M es una familia de campos vectoriales $f(\cdot, u)$ en M, parametrizada por los controles u.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(t) \in M, \qquad u(t) \in U \in \mathbb{R}^m.$$



x es el estado de el sistema, M es el espacio de estados.

u es el control de el sistema.

En teoría de control podemos cambiar la dinámica del sistema de control en cada momento al cambiar el control u.

Hipótesis técnicas

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \qquad x(t) \in M, \qquad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m.$$

El control pertenece a la clase $\mathcal{U}$ de controles admisibles. Su elección depende del sistema de control que se esté modelando.

- En el conjunto de controles admisibles:

$\mathcal{U}$ contiene todas las funciones constantes a trozos con valores en U, que son continuas a trozos.

- En el conjunto de campos vectoriales: Para cada $x_0 \in M$ y $u \in \mathcal{U}$, la EDO

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0$$

tiene solución para todo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Corchetes de Lie

El conjunto de campos vectoriales en M forma un álgebra de Lie.

Podemos realizar combinaciones lineales y corchetes de Lie.

En coordenadas, campos vectoriales pueden identificarse con vectores columna.

El corchete de Lie de dos campos vectoriales:
$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x)g(x)$.

($\frac{\partial g}{\partial x}$ es la matriz Jacobiana de g).

El corchete de Lie de 2 campos vectoriales mide la no-conmutatividad de el flujo correspondiente.

$[f,g] \equiv 0$ si y sólo si $\exp(tf) \circ \exp(sg) = \exp(sg) \circ \exp(tf), \forall s,t \in \mathbb{R}$.

El corchete de Lie permite estudiar la interconección entre diferentes sistemas dinámicos.

En teoría de control es de particular importancia que $[f,g] \notin \text{span}\{f,g\}$.

Conjuntos alcanzables

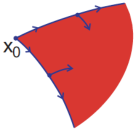
$f_u(\cdot) := f(\cdot, u)$, $\mathcal{F} = \{f_u\}_{u \in \mathcal{U}}$.

Conjunto alcanzable de $\mathcal{F}$ desde un punto $x_0 \in M$:

$$\mathcal{R}(x_0) = \{\exp(t_k f_{u_k}) \ldots \exp(t_1 f_{u_1})(x_0) | k \in \mathbb{N},\ f_{u_i} \in \mathcal{F},\ t_i \geq 0\}$$

El conjunto alcanzable caracteriza los estados que pueden ser alcanzados desde un estado inicial $x_0 \in M$ en tiempo positivo, al escoger varios controles y saltos de uno a otro (switching) de tiempo en tiempo.

Only forward-in-time motions allowed!



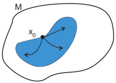
Reachable set

Problemas típicos en teoría de control

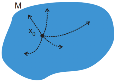
Controlabilidad:

Controlabilidad es la habilidad de dirigir un sistema desde un estado inicial a uno final, en tiempo finito, usando los controles disponibles.

Un sistema es controlable si $\mathcal{R}(x) = M$, $\forall x \in M$.



Not controllable



Controllable

Controlabilidad no tiene en cuenta la calidad de la trayectoria entre dos estados ni la cantidad de control realizado!

Problemas típicos en teoría de control

Controlabilidad:

Controlabilidad es la habilidad de dirigir un sistema desde un estado inicial a uno final, en tiempo finito, usando los controles disponibles.

Un sistema es controlable si $\mathcal{R}(x) = M$, $\forall x \in M$.

Not controllable   Controllable

Controlabilidad no tiene en cuenta la calidad de la trayectoria entre dos estados ni la cantidad de control realizado!

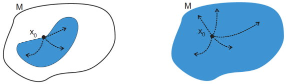
Seguimiento de trayectorias: Podemos seguir (asintóticamente) una trayectoria deseada?

Problemas típicos en teoría de control

Controlabilidad:

Controlabilidad es la habilidad de dirigir un sistema desde un estado inicial a uno final, en tiempo finito, usando los controles disponibles.

Un sistema es controlable si $\mathcal{R}(x) = M$, $\forall x \in M$.



Not controllable Controllable

Controlabilidad no tiene en cuenta la calidad de la trayectoria entre dos estados ni la cantidad de control realizado!

Seguimiento de trayectorias: Podemos seguir (asintóticamente) una trayectoria deseada?

Observabilidad: Un sistema dinámico es **observable** si, a partir de sus **salidas medidas** y del conocimiento del modelo, podemos determinar el **estado interno** del sistema en un tiempo finito.

Sistemas de control afines

$$\dot{x} = \underbrace{g_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x)}_{f(x,u)}$$

- g_0 es el campo vectorial de drift (deriva) - especifica la dinámica en ausencia de los controles.
- $g_i, \; i = 1, \ldots, m$ son llamados campos vectoriales de control.

Hipótesis:

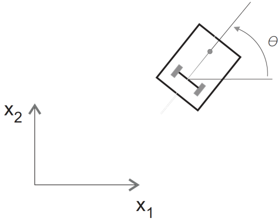
- En el conjunto de controles admisibles:

$\mathcal{U}$ consiste de todas las funciones contantes a trozos con valores en U, que son continuas a trozos.

- En los campos vectoriales:

$g_0, g_1, \ldots, g_m$ son diferenciables (de clase $\mathcal{C}^\infty$), $\quad m \leq n = \dim(M)$.

Ejemplo: Automóvil



El estado del coche:

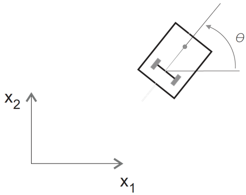
- posición del centro de masa $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- ángulo de orientación $\theta \in \mathbb{S}^1$ (relativo a la dirección positiva del eje x_1).

Espacio de estados:

$$M = \{x = (x_1, x_2, \theta) | x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \theta \in \mathbb{S}^1\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \simeq SE(2).$$

Automóvil (cont.)

Posibles clases de movimientos:



Movimiento lineal: conducir el coche hacia adelante y hacia atrás con alguna velocidad lineal fija: $u_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$.

Movimiento rotacional: girar el coche alrededor de su centro de masa con alguna velocidad angular fija $u_2 = \dot{\theta}$.

Sistema dinámico para el movimiento lineal y rotacional

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos\theta, \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin\theta, \quad \dot{\theta} = u_2.$$

Automóvil (cont.)

En forma vectorial

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1, \; g_1(x) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \; g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

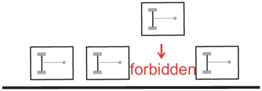
Combinando ambos tipos de movimientos admisibles:

$$\dot{x} = \underbrace{u_1 g_1(x)}_{\text{movimiento lineal}} + \underbrace{u_2 g_2(x)}_{\text{movimiento rotacional}}.$$

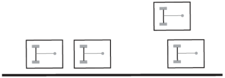
Sistema de control, subactuado.

El control $u = (u_1, u_2)$ puede tomar cualquier valor en el conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$.

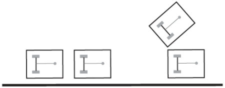
Estacionamiento de un Automóvil



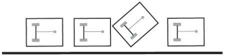
Four motions with the same amplitude perform forbidden motion:



1. motion forward



2. rotation counterclockwise



3. motion backward

4. rotation clockwise

El corchete de Lie realiza este trabajo!

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \ g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$[g_1, g_2](x) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- El campo vectorial g_1 genera los movimientos hacia adelante y hacia atrás.

- El campo vectorial g_2 genera la rotación en sentido horario y anti-horario.

- El campo vectorial $[g_1, g_2]$ genera el movimiento en la dirección perpendicular a la orientación del coche.

Distribuciones e involutividad

- Una distribución Δ en la variedad M es una aplicación que asigna a cada punto en M un subespacio de el espacio tangente en ese punto:

$$x \in M \mapsto \Delta(x) \subset T_x M.$$

- Δ dimensión constante k si $\dim(\Delta(x)) = k$, $\forall x \in M$.

- Una distribución Δ en M se dice que es involutiva si $\forall x \in M$

$$f(x), g(x) \in \Delta(x) \Rightarrow [f, g](x) \in \Delta(x).$$

Distribución de control

Consideremos un sistema de control sin drift:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad x \in M \qquad \text{(controles sin ligaduras).}$$

Distribución de control:

$$\Delta(x) = \mathsf{span}\{g_1(x), \ldots, g_m(x)\} \subset T_x M.$$

Distribución de control

Consideremos un sistema de control sin drift:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad x \in M \qquad \text{(controles sin ligaduras).}$$

Distribución de control:

$$\Delta(x) = \mathsf{span}\{g_1(x), \ldots, g_m(x)\} \subset T_x M.$$

Involutividad de la distribución de control es malo!

Distribución de control (ejemplo)

Regresemos al modelo del automóvil

$$\dot{x} = u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x), \qquad g_1(x) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \; g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La distribución de control $\Delta(x) = \text{span}\{g_1(x), g_2(x)\}$ tiene dimensión 2.

$$[g_1, g_2](x) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \notin \Delta(x).$$

La distribución de control Δ no es involutiva!

es nuestro sistema controllable? Nuestra experiencia dice que si!

Propiedad de generación de corchete

Si el sistema

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad x \in M$$

es controlable, su distribución de control

$$\Delta = \mathsf{span}\{g_1, \ldots, g_m\}$$

debe satisfacer una propiedad de que es intuitivamente opuesta a la involutividad.

Propiedad de generación de corchete

Si el sistema

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad x \in M$$

es controlable, su distribución de control

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

debe satisfacer una propiedad de que es intuitivamente opuesta a la involutividad.

Definition

La distribución $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ en M se dice que es generadora de corchete si el corchete de Lie iterado

$$g_i,\, [g_i, g_j], [g_i, [g_j, g_k]], \dots, \quad 1 \leq i, j, k \leq m,$$

genera el espacio tangente de M en cada punto.

Teorema de Rashevsky-Chow

Theorem (Rashevsky-Chow)

Asumimos que M es conexa.
Si la distribución de control $\Delta =$ span$\{g_1, \ldots, g_m\}$ es generadora de corchete, entonces el sistema (sin drift)

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \quad x \in M$$

es controlable.

Teorema de Rashevsky-Chow

Theorem (Rashevsky-Chow)

Asumimos que M es conexa.
Si la distribución de control $\Delta = span\{g_1, \ldots, g_m\}$ es generadora de corchete, entonces el sistema (sin drift)

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \quad x \in M$$

es controlable.

$$\dot{x} = \underbrace{g_0(x)}_{\text{drift}} + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \quad x \in M.$$

el drift complica la controlabilidad!

Sistemas de control en grupos de Lie

Sistemas de control en grupos de Lie

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G con estructura de grupo, donde la multiplicación $(g,h) \mapsto gh$ para $g,h \in G$ y la inversión, $g \mapsto g^{-1}$, son aplicaciones diferenciables. Denotaremos e al elemento identidad de G y por $\mathfrak{g} := T_eG$ su álgebra de Lie.

Sistemas de control en grupos de Lie

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G con estructura de grupo, donde la multiplicación $(g, h) \mapsto gh$ para $g, h \in G$ y la inversión, $g \mapsto g^{-1}$, son aplicaciones diferenciables. Denotaremos e al elemento identidad de G y por $\mathfrak{g} := T_eG$ su álgebra de Lie.

Nos interesan los sistemas en grupos de Lie porque modelan una gran variedad de sistemas mecánicos. Es decir, estos sistemas tienen como espacio de configuración un grupo de Lie

Una operación importante entre elementos de un grupo de Lie G son las translaciones a izquierda y derecha en G. La translación a izquierda de un elemento $g \in G$ esta dada por $L_g(h) = gh$ para $h \in G$. La traslación a derecha de un elemento de $g \in G$ esta dada por $R_g(h) = hg$ for $h \in G$.

Campos vectoriales invariantes a derecha

Idea intuitiva: Intuitivamente, un campo vectorial invariante a derecha es un campo vectorial enteramente determinado por un vector en la identidad e del grupo de Lie.

Definition

Un campo vectorial $X : G \to TG$ se dice que es *invariante a derecha* si para todo $g, h \in G$,

$$T_h R_g(X(h)) = X(R_g(h)) = X(hg).$$

En particular, para $h = e$, la anterior definición significa que:
X es invariante a derecha si $\dot{g} = X(g) = T_e R_g \xi$ for $\xi = X(e) \in \mathfrak{g}$.

Sistemas de control en grupos de Lie

M es ahora un grupo de Lie (matricial) G. Los campos invariantes a derecha en G forman un álgebra de Lie.

Consideremos un sistema de control invariante a derecha evolucionando en G:

$$\dot{X} = \underbrace{A_0 X}_{g_0(X)} + \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{A_i X}_{g_i(X)} \quad (\Sigma)$$

$X \in G$, $\quad A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{g}$, $\quad m < \dim(G)$.

Sistemas de control en grupos de Lie

M es ahora un grupo de Lie (matricial) G. Los campos invariantes a derecha en G forman un álgebra de Lie.

Consideremos un sistema de control invariante a derecha evolucionando en G:

$$\dot{X} = \underbrace{A_0 X}_{g_0(X)} + \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{A_i X}_{g_i(X)} \quad (\Sigma)$$

$X \in G$, $\quad A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{g}, \quad m < \dim(G)$.

$$(\Sigma) \quad \equiv \quad \mathcal{F} = \{A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i\}_{u_i \in \mathcal{U}} \subset \mathfrak{g}.$$

Un sistema de control en G es identificado con un subconjunto de su álgebra de Lie.

Sistemas de control en grupos de Lie (cont.)

El flujo de un campo vectorial $f(X) = AX$ se define a traves de la exponencial matricial como:

$$\begin{aligned} t \mapsto \ \exp tf : & G \to G \\ & X \mapsto e^{tA}X = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) X. \end{aligned}$$

Conjuntos alcanzables:

$$\mathcal{R}(X) = \{ e^{t_k B_k} \dots e^{t_1 B_1} X \mid k \in \mathbb{N},\, B_i \in \mathcal{F},\, t_i \geq 0 \}.$$

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(I)X.$$

Un sistema de control invariante a derecha es controlable en G si y sólo si $\mathcal{R}(I) = G$.

V. Jurdjevic. *Geometric control theory*, 1997.

Controlabilidad en grupos de Lie

La teoría moderna sobre controlabilidad de sistemas en grupos de Lie se inicia en 1972 con el trabajo clásico de Jurdjevic–Sussmann.

Desde entonces, diversos autores han desarrollado la teoría:

- V. Jurdjevic (1997): *Geometric Control Theory*
- A. Bloch (2003): *Geometric Control of Mechanical Systems*
- Y. Sachkov (2004): *Controllability on Lie Groups*

Consideremos el sistema invariante a derecha en un grupo de Lie G:

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{m} u_i \, A_i X, \qquad X \in G, \quad m < \dim G,$$

donde los A_i son elementos de la álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$.

Controlabilidad en grupos de Lie

Clausura de Lie generada por $\{A_1, \ldots, A_m\}$

$\mathrm{Lie}\{A_1, \ldots, A_m\}$ es la subálgebra de Lie más pequeña de $\mathfrak{g}$ que contiene a los A_i:

$$\mathrm{Lie}\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathrm{span}\big\{A_i,\ [A_i, A_j],\ [A_i, [A_j, A_k]], \ldots\big\}.$$

Es decir: el espacio generado por los A_i y todos sus corchetes iterados.

Theorem (Criterio de Jurdjevic–Sussmann)

El sistema es controlable en un grupo de Lie conexo G si y sólo si

$$\mathrm{Lie}\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathfrak{g},$$

es decir, si los vectores A_i y sus corchetes generan toda el álgebra de Lie.

El Automóvil de nuevo

Los vehículos se mueven en el plano. Una descripción de su posición y orientación requiere 3 coordenadas: (x, y) para la posición de su centro de masa, θ para la orientación del vehículo.

$X(t) \in SE(2)$ describe simultaneamente la posición (del centro de masa) y su orientación en cada instante de tiempo t.

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ x(t) & y(t) & 1 \end{bmatrix}.$$

Hay dos grados de libertad (jugando el rol de controles):

$$u_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},\ u_2 = \dot{\theta}.$$

Automóvil de nuevo (cont.)

$$\dot{X}(t) = (u_1(t)A_1 + u_2(t)A_2)X(t), \quad X \in SE(2).$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_1, A_2 \in \mathfrak{se}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$[A_1, A_2] = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y span}\{A_1, A_2, A_3\} = \mathfrak{se}(2).$$

Como $A_3 = [A_1, A_2]$, la subálgebra de Lie generada por $\{A_1, A_2\}$ es

$$\mathrm{Lie}\{A_1, A_2\} = \mathrm{span}\{A_1, A_2, [A_1, A_2]\} = \mathfrak{se}(2).$$

Finalmente, hemos probado lo que sabiamos empíricamente!: Nuestro coche es controlable!

Resumen (I): de sistemas dinámicos a sistemas de control

1. Sistemas dinámicos en variedades

- Un sistema dinámico en M es un campo vectorial f:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M.$$

- Curvas integrales y flujo: $x(t, x_0)$ y $\exp(tf)$ describen la evolución del sistema.

2. Sistemas de control

- Un sistema de control en M es una familia de campos vectoriales:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m.$$

- Caso afín:

$$\dot{x} = g_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x),$$

donde g_0 es el drift y los g_i son campos de control.

- Controles admisibles: funciones constantes a trozos con valores en U.

3. Conjuntos alcanzables y controlabilidad

- Conjunto alcanzable $\mathcal{R}(x_0)$: estados que se pueden alcanzar desde x_0 con controles admisibles.

- Un sistema es controlable si $\mathcal{R}(x) = M$ para todo $x \in M$.

Resumen (II): corchetes, generación y grupos de Lie

1. Corchetes de Lie y distribución de control

- Los campos vectoriales forman un álgebra de Lie con el corchete $[f, g]$.
- Sistema sin drift:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \qquad \Delta(x) = \mathrm{span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}.$$

- Generación de corchete: los g_i y sus corchetes iterados generan todo $T_x M$.
- Teorema de Rashevsky–Chow: si Δ es generadora de corchete y M es conexa, el sistema es controlable.

2. Sistemas en grupos de Lie

- En un grupo de Lie G, estudiamos sistemas invariantes a derecha:

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{m} u_i A_i X, \quad A_i \in \mathfrak{g}.$$

- Clausura de Lie:

$$\mathrm{Lie}\{A_1, \dots, A_m\} = \mathrm{span}\{A_i, [A_i, A_j], [A_i, [A_j, A_k]], \dots\}.$$

- Criterio de Jurdjevic–Sussmann: el sistema es controlable en G (conexo) si y sólo si

$$\mathrm{Lie}\{A_1, \dots, A_m\} = \mathfrak{g}.$$

Concepto de observabilidad

Idea general

Un sistema dinámico es **observable** si, a partir de sus **salidas medidas** y del conocimiento del modelo, podemos determinar el **estado interno** del sistema en un tiempo finito.

Concepto de observabilidad

Idea general

Un sistema dinámico es **observable** si, a partir de sus **salidas medidas** y del conocimiento del modelo, podemos determinar el **estado interno** del sistema en un tiempo finito.

Sistema lineal continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

El sistema es **observable** si la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

tiene rango completo: $\mathrm{rango}(\mathcal{O}) = n$.

Concepto de observabilidad

Idea general

Un sistema dinámico es **observable** si, a partir de sus **salidas medidas** y del conocimiento del modelo, podemos determinar el **estado interno** del sistema en un tiempo finito.

Sistema lineal continuo

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

El sistema es **observable** si la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad (A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

tiene rango completo: $\mathrm{rango}(\mathcal{O}) = n$.

Entonces, cada estado x puede "verse" a través de las mediciones y.

Interpretación geométrica y aplicaciones

Interpretación geométrica

En el caso no lineal, la observabilidad se entiende como la capacidad de distinguir **trayectorias** del sistema en la **variedad de estados** a partir de las observaciones $y = h(x)$.

Interpretación geométrica y aplicaciones

Interpretación geométrica

En el caso no lineal, la observabilidad se entiende como la capacidad de distinguir **trayectorias** del sistema en la **variedad de estados** a partir de las observaciones $y = h(x)$.

- Si dos trayectorias distintas producen la misma salida $y(t)$, el sistema no es observable.
- En sistemas con simetrías (por ejemplo, rotaciones en $SO(3)$ o movimientos en $SE(3)$), esas simetrías pueden generar **direcciones no observables**.
- Esto aparece naturalmente en:
  - Problemas de **localización multiagente**: estimar posiciones relativas a partir de medidas de distancia o ángulo.
  - Filtros de Kalman extendidos (EKF): la convergencia de las estimaciones depende de que el sistema sea observable.

Interpretación geométrica y aplicaciones

Interpretación geométrica

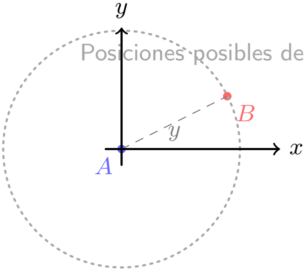
En el caso no lineal, la observabilidad se entiende como la capacidad de distinguir **trayectorias** del sistema en la **variedad de estados** a partir de las observaciones $y = h(x)$.

- Si dos trayectorias distintas producen la misma salida $y(t)$, el sistema no es observable.
- En sistemas con simetrías (por ejemplo, rotaciones en $SO(3)$ o movimientos en $SE(3)$), esas simetrías pueden generar **direcciones no observables**.
- Esto aparece naturalmente en:
  - Problemas de **localización multiagente**: estimar posiciones relativas a partir de medidas de distancia o ángulo.
  - Filtros de Kalman extendidos (EKF): la convergencia de las estimaciones depende de que el sistema sea observable.

La observabilidad conecta la teoría geométrica con la estimación en robótica y control.

Ejemplo: observabilidad en localización de agentes

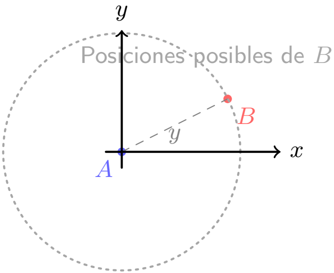
Supongamos dos robots A y B en el plano que pueden medir únicamente la **distancia** entre ellos: $y = \|x_B - x_A\|$.



- Con una sola medida de distancia, B puede estar en **infinitas posiciones** sobre un círculo: el sistema no es observable.
- Si A y B se mueven y se registran **múltiples medidas en el tiempo**, o se añaden más agentes, se obtienen suficientes relaciones para **reconstruir las posiciones**.

Ejemplo: observabilidad en localización de agentes

Supongamos dos robots A y B en el plano que pueden medir únicamente la **distancia** entre ellos: $y = \|x_B - x_A\|$.



- Con una sola medida de distancia, B puede estar en **infinitas posiciones** sobre un círculo: el sistema no es observable.
- Si A y B se mueven y se registran **múltiples medidas en el tiempo**, o se añaden más agentes, se obtienen suficientes relaciones para **reconstruir las posiciones**.

La observabilidad depende de la información sensorial y de la geometría de la formación.

Observabilidad de sistemas no lineales

Consideremos las clases de sistemas no linerales con salidas (medibles) de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \tag{1}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

La función $h : X \to Y$ representa un vector de p componentes donde $h_i \in \mathcal{C}^\infty(x)$ para $1 \leq i \leq p$ y $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de funciones absolutamente continuas en X que toma valores en Y.

Observabilidad de sistemas no lineales

Consideremos las clases de sistemas no linerales con salidas (medibles) de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \tag{1}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

La función $h : X \to Y$ representa un vector de p componentes donde $h_i \in \mathcal{C}^\infty(x)$ para $1 \leq i \leq p$ y $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de funciones absolutamente continuas en X que toma valores en Y.

Para el sistema (1) definimos la función de respuesta $R : X \times U \to \mathcal{Y}$ dada por

$$R(q, u)(t) = Y_{q,u}(t) = h(x(t, q, u(\cdot)))$$

donde $x(t, q, u(\cdot))$ es la solución de $\dot{x} = f(x, u)$ con condición inicial q, $x(0, q, u(\cdot)) = q$.

Observabilidad de sistemas no lineales

Consideremos las clases de sistemas no linerales con salidas (medibles) de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \tag{1}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^p$.

La función $h : X \to Y$ representa un vector de p componentes donde $h_i \in \mathcal{C}^\infty(x)$ para $1 \leq i \leq p$ y $h = (h_1, \ldots, h_p)$. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de funciones absolutamente continuas en X que toma valores en Y.

Para el sistema (1) definimos la función de respuesta $R : X \times U \to \mathcal{Y}$ dada por

$$R(q, u)(t) = Y_{q,u}(t) = h(x(t, q, u(\cdot)))$$

donde $x(t, q, u(\cdot))$ es la solución de $\dot{x} = f(x, u)$ con condición inicial q, $x(0, q, u(\cdot)) = q$.

Definition

Dos estados q_1, q_2 son indistinguibles $Y_{q_1,u}(t) = Y_{q_2,u}(t), \ \forall t$, y se denota $q_1 I q_2$.

Observabilidad de sistemas no lineales

Definition

Decimos que el sistema (1) es observable si para cualquier estados $q_1, q_2 \in X$ se tiene que $q_1 I q_2$ implica que $q_1 = q_2$. Esto es, si existe un control admisible $u(\cdot) \in U$ y un tiempo $t \geq 0$ tal que $Y_{q_1,u}(t) \neq Y_{q_2,u}(t)$.

Observabilidad de sistemas no lineales

Definition

Decimos que el sistema (1) es observable si para cualquier estados $q_1, q_2 \in X$ se tiene que $q_1 I q_2$ implica que $q_1 = q_2$. Esto es, si existe un control admisible $u(\cdot) \in U$ y un tiempo $t \geq 0$ tal que $Y_{q_1,u}(t) \neq Y_{q_2,u}(t)$.

Definition

• El sistema (1) es llamado localmente observable en $q \in X$ si existe un entorno V de q tal que $\forall \tilde{q} \in V$, q y $\tilde{q}$ son distinguibles (todos contra q).
En otras palabras, (1) es localmente observable si cada estado x_0 puede ser distinguido de sus vecinos al usar trayectorias que permanecen cercanas a x_0.

Observabilidad de sistemas no lineales

Definition

Decimos que el sistema (1) es observable si para cualquier estados $q_1, q_2 \in X$ se tiene que $q_1 I q_2$ implica que $q_1 = q_2$. Esto es, si existe un control admisible $u(\cdot) \in U$ y un tiempo $t \geq 0$ tal que $Y_{q_1,u}(t) \neq Y_{q_2,u}(t)$.

Definition

• El sistema (1) es llamado localmente observable en $q \in X$ si existe un entorno V de q tal que $\forall \tilde{q} \in V$, q y $\tilde{q}$ son distinguibles (todos contra q). En otras palabras, (1) es localmente observable si cada estado x_0 puede ser distinguido de sus vecinos al usar trayectorias que permanecen cercanas a x_0.

• El sistema (1) es llamado localmente fuertemente observable en $q \in X$ si existe un entorno V de q tal que el sistema restringido a V es observable (todos contra todos).

Observabilidad de sistemas no lineales

Definition

Decimos que el sistema (1) es observable si para cualquier estados $q_1, q_2 \in X$ se tiene que $q_1 I q_2$ implica que $q_1 = q_2$. Esto es, si existe un control admisible $u(\cdot) \in U$ y un tiempo $t \geq 0$ tal que $Y_{q_1,u}(t) \neq Y_{q_2,u}(t)$.

Definition

• El sistema (1) es llamado localmente observable en $q \in X$ si existe un entorno V de q tal que $\forall \tilde{q} \in V$, q y $\tilde{q}$ son distinguibles (todos contra q). En otras palabras, (1) es localmente observable si cada estado x_0 puede ser distinguido de sus vecinos al usar trayectorias que permanecen cercanas a x_0.

• El sistema (1) es llamado localmente fuertemente observable en $q \in X$ si existe un entorno V de q tal que el sistema restringido a V es observable (todos contra todos).

Observable implica localmente fuertemente observable, y, si es localmente fuertemente observable, entonces es localmente observable.

Condición de rango de observabilidad

Ahora daremos condiciones suficientes para la observabilid (localmente fuertemente observable).

Condición de rango de observabilidad

Ahora daremos condiciones suficientes para la observabilid (localmente fuertemente observable).

Definition

El espacio de observación de (1) se define como

$$H = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathcal{L}_{f_{u_k}} \cdots \mathcal{L}_{f_{u_1}} h \mid k \geq 0,\ u_1, \ldots, u_k \in U\},$$

donde $f_u(x) = f(x, u)$ y $\mathcal{L}_g \phi(x) = d\phi(x)\, g(x)$.

H es el menor subespacio lineal de $C^\infty(x)$ que contiene a las observaciones $h_1, \ldots, h_p$ y es cerrado bajo la derivada de Lie de los elementos de $\mathcal{F} = \{f(\cdot, u), u \in U\}$.

Condición de rango de observabilidad

Ahora daremos condiciones suficientes para la observabilid (localmente fuertemente observable).

Definition

El espacio de observación de (1) se define como

$$H = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\big\{\mathcal{L}_{f_{u_k}} \cdots \mathcal{L}_{f_{u_1}} h \bigm| k \geq 0,\ u_1, \ldots, u_k \in U\big\},$$

donde $f_u(x) = f(x, u)$ y $\mathcal{L}_g \phi(x) = d\phi(x)\, g(x)$.

H es el menor subespacio lineal de $C^\infty(x)$ que contiene a las observaciones $h_1, \ldots, h_p$ y es cerrado bajo la derivada de Lie de los elementos de $\mathcal{F} = \{f(\cdot, u), u \in U\}$.

Definimos la codistribución $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{d\phi : \phi \in H\}$. Si tenemos el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i,\ y = h(x)$$

se tiene que $H = H = \mathrm{span}\big\{\mathcal{L}_{g_{j_k}} \cdots \mathcal{L}_{g_{j_1}} h \bigm| 0 \leq j_\ell \leq m\big\}$ con $g_0 = f$

Condición de rango de observabilidad

Theorem

Si (1) *satisface que dim*$\mathcal{H}(q) = n$*, entonces el sistema es localmente fuertemente observable.*

Condición de rango de observabilidad

Theorem

Si (1) *satisface que dim*$\mathcal{H}(q) = n$*, entonces el sistema es localmente fuertemente observable.*

La recíproca es falsa.

Condición de rango de observabilidad

Theorem

Si (1) *satisface que dim*$\mathcal{H}(q) = n$, *entonces el sistema es localmente fuertemente observable.*

La recíproca es falsa.

Example

The system $\dot{x} = 0$, $y = x^3$ es observable. Sin embargo H consiste de una sola función y la dimension de $d\mathcal{H}$ es 0.

Condición de rango de observabilidad

Theorem

Si (1) satisface que dim$\mathcal{H}(q) = n$, entonces el sistema es localmente fuertemente observable.

La recíproca es falsa.

Example

The system $\dot{x} = 0$, $y = x^3$ es observable. Sin embargo H consiste de una sola función y la dimension de $d\mathcal{H}$ es 0.

Example

Consideremos el sistema nolineal en $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = u, \quad y_1 = \sin x, \quad y_2 = \cos x.$$

El espacio de observación H consiste de dos funciones $\sin x$ y $\cos x$.

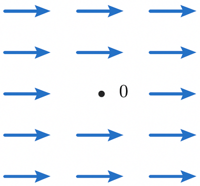
$$\text{dim } d\mathcal{H}(x) = \text{dim}\{\cos x dx, \sin x dx\} = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto el sistema es localmente observable.
Sin embargo el sistema no es observable ya que los puntos x_0 y x_1 con $x_0 - x_1$ múltiplo de 2π no son distinguibles.

Campos vectoriales invariantes a izquierda

Idea intuitiva: Intuitivamente, un campo vectorial invariante a izquierda es un campo vectorial completamente determinado por un vector en el elemento identidad del grupo de Lie.

Ejemplo canónico: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la suma es un grupo de Lie. En este caso, un campo vectorial invariante a izquierda es simplemente un campo vectorial constante. Todos los vectores apuntan en la misma dirección.



Campos vectoriales invariantes a izquierda

En $\mathbb{R}^n$, un campo vectorial invariante a izquierda constante

Campos vectoriales invariantes a izquierda

La aplicación tangente T_eL_g traslada vectores basados en e a vectores basados en $g \in G$.

Definition

Un campo vectorial $X : G \to TG$ se llama *invariante a izquierda* si para todo $g, h \in G$ se cumple $T_hL_g(X(h)) = X(L_g(h)) = X(gh)$.

Campos vectoriales invariantes a izquierda

La aplicación tangente $T_e L_g$ traslada vectores basados en e a vectores basados en $g \in G$.

Definition

Un campo vectorial $X : G \to TG$ se llama *invariante a izquierda* si para todo $g, h \in G$ se cumple $T_h L_g(X(h)) = X(L_g(h)) = X(gh)$.

En particular, para $h = e$, la definición anterior significa que:
X es invariante a izquierda si $\dot{g} = X(g) = T_e L_g \xi$ para $\xi = X(e) \in \mathfrak{g}$.

Campos vectoriales invariantes a izquierda

La aplicación tangente $T_e L_g$ traslada vectores basados en e a vectores basados en $g \in G$.

Definition

Un campo vectorial $X : G \to TG$ se llama *invariante a izquierda* si para todo $g, h \in G$ se cumple $T_h L_g(X(h)) = X(L_g(h)) = X(gh)$.

En particular, para $h = e$, la definición anterior significa que:
X es invariante a izquierda si $\dot{g} = X(g) = T_e L_g \xi$ para $\xi = X(e) \in \mathfrak{g}$.

De ahora en adelante, la flecha hacia la izquierda sobre un campo vectorial indicará que es invariante a izquierda.

¿Cómo calcular campos vectoriales invariantes a izquierda?

El conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G es isomorfo a $\mathfrak{g} := T_eG$ como espacios vectoriales.

Para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, denotemos $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ la curva integral del campo invariante a izquierda $\overleftarrow{\xi}$ inducido por ξ, definida de forma única por:

$$\overleftarrow{\xi}(e) = \xi, \quad \gamma_\xi(0) = e, \quad \gamma'_\xi(t) = \overleftarrow{\xi}(\gamma_\xi(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definition

La aplicación $\exp : \mathfrak{g} \to G$, definida como $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$, se llama el *aplicación exponencial*.

¿Cómo calcular campos vectoriales invariantes a izquierda?

El conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda sobre G es isomorfo a $\mathfrak{g} := T_e G$ como espacios vectoriales.

Para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, denotemos $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ la curva integral del campo invariante a izquierda $\overleftarrow{\xi}$ inducido por ξ, definida de forma única por:

$$\overleftarrow{\xi}(e) = \xi, \quad \gamma_\xi(0) = e, \quad \gamma_\xi'(t) = \overleftarrow{\xi}(\gamma_\xi(t)) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definition

La aplicación $\exp : \mathfrak{g} \to G$, definida como $\exp(\xi) = \gamma_\xi(1)$, se llama el *aplicación exponencial*.

Usando la aplicación exponencial, un campo vectorial invariante a izquierda $\overleftarrow{\xi}$ inducido por ξ puede construirse como:

$$\overleftarrow{\xi}(g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g \exp(t\xi)).$$

Sistemas de control invariantes a izquierda

Definition

Un sistema de control $\dot{g} = f(g, u)$ definido en G, donde $u \in \mathfrak{g}$, se dice *invariante a izquierda* si $T_h L_g f(h, u) = f(L_g(h), u) \quad$ para todo $g, h \in G$.

Sistemas de control invariantes a izquierda

Definition

Un sistema de control $\dot{g} = f(g, u)$ definido en G, donde $u \in \mathfrak{g}$, se dice *invariante a izquierda* si $T_h L_g f(h, u) = f(L_g(h), u) \quad$ para todo $g, h \in G$.

Sistemas de control invariantes a izquierda

Definition

Un sistema de control $\dot{g} = f(g, u)$ definido en G, donde $u \in \mathfrak{g}$, se dice *invariante a izquierda* si $T_h L_g f(h, u) = f(L_g(h), u)$ para todo $g, h \in G$.

Nótese que:

1. Para un sistema de control invariante a izquierda completamente actuado, tal que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está generada por $\{E_1, \ldots, E_m\}$, los controles se especifican para los generadores del álgebra de Lie como:

$$T_g L_{g^{-1}} \dot{g} = u = \sum_{j=1}^{m} u_j(t) E_j.$$

2. En la mayoría de las aplicaciones, los controles se utilizan para influir externamente en la velocidad angular de cuerpos rígidos, por lo que conviene recordar que u desempeña el papel de velocidad angular.

Observabilidad para sistemas de control invariantes a izquierda

Consideremos el siguiente sistema de control invariante a izquierda (cinemático sin deriva):

$$\dot{g} = g\sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \ \text{ y } \ y = h(g),\, h : G \to \mathbb{R}^p \text{ es una función de salida.} \tag{2}$$

Observabilidad para sistemas de control invariantes a izquierda

Consideremos el siguiente sistema de control invariante a izquierda (cinemático sin deriva):

$$\dot{g} = g \sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \text{ y } y = h(g), \, h : G \to \mathbb{R}^p \text{ es una función de salida.} \quad (2)$$

Definition

El espacio de observación $\mathcal{O}$ para el sistema (2) es el espacio de funciones sobre G que contiene $h_1, \dots, h_p$ y todas las derivadas de Lie iteradas de los campos vectoriales invariantes a izquierda:

$$\mathcal{L}_{\overleftarrow{E_1}} \mathcal{L}_{\overleftarrow{E_2}} \dots \mathcal{L}_{\overleftarrow{E_s}} h_j, \quad j \in \{1, \dots, p\}, \; s \in \mathbb{N},$$

donde $\overleftarrow{E_s}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda asociados con los generadores E_s de la base de $\mathfrak{g}$.

Observabilidad para sistemas de control invariantes a izquierda

De manera informal, $\mathcal{O}$ contiene todas las funciones de salida y todas las derivadas de éstas a lo largo de las trayectorias del sistema.

Dado el espacio de observación $\mathcal{O}$ y $g \in G$, la observabilidad se determina estudiando la dimensión del siguiente espacio, que representa el espacio de observaciones posibles:

$$\mathrm{d}\mathcal{O}(g) = \mathrm{span}\{\mathrm{d}\alpha(g) \,|\, \alpha \in \mathcal{O}\}.$$

Observabilidad para sistemas de control invariantes a izquierda

De manera informal, $\mathcal{O}$ contiene todas las funciones de salida y todas las derivadas de éstas a lo largo de las trayectorias del sistema.

Dado el espacio de observación $\mathcal{O}$ y $g \in G$, la observabilidad se determina estudiando la dimensión del siguiente espacio, que representa el espacio de observaciones posibles:

$$\mathsf{d}\mathcal{O}(g) = \mathsf{span}\{\mathsf{d}\alpha(g) \,|\, \alpha \in \mathcal{O}\}.$$

Theorem

El sistema de control invariante a izquierda (2) *es localmente observable en $g \in G$ si*

$$\dim\{d\mathcal{O}(g)\} = \dim G,$$

donde $d\mathcal{O}(g) := span\{d\alpha(g) \,|\, \alpha \in \mathcal{O}\}$.

Ejemplo en $SO(2)$: pérdida de observabilidad angular

Consideremos un sistema en $SO(2)$ cuyo estado es un ángulo θ. La salida es

$$y = h(\theta) = \cos\theta.$$

Ejemplo en $SO(2)$: pérdida de observabilidad angular

Consideremos un sistema en $SO(2)$ cuyo estado es un ángulo θ. La salida es

$$y = h(\theta) = \cos\theta.$$

Indistinguibilidad

$$\cos\theta = \cos(-\theta) \quad \Longrightarrow \quad \theta \text{ y } -\theta \text{ son indistinguibles.}$$

Más aún,

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo en $SO(2)$: pérdida de observabilidad angular

Consideremos un sistema en $SO(2)$ cuyo estado es un ángulo θ. La salida es

$$y = h(\theta) = \cos\theta.$$

Indistinguibilidad

$$\cos\theta = \cos(-\theta) \quad \Longrightarrow \quad \theta \text{ y } -\theta \text{ son indistinguibles.}$$

Más aún,

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Codistribución

$$dh = -\sin\theta \, d\theta,$$

que es cero en todos los puntos donde $\sin\theta = 0$. La condición de rango no se satisface globalmente.

Ejemplo en $SO(2)$: pérdida de observabilidad angular

Consideremos un sistema en $SO(2)$ cuyo estado es un ángulo θ. La salida es

$$y = h(\theta) = \cos\theta.$$

Indistinguibilidad

$$\cos\theta = \cos(-\theta) \quad \Longrightarrow \quad \theta \text{ y } -\theta \text{ son indistinguibles.}$$

Más aún,

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Codistribución

$$dh = -\sin\theta \, d\theta,$$

que es cero en todos los puntos donde $\sin\theta = 0$. La condición de rango no se satisface globalmente.

El sistema no puede determinar el ángulo absoluto: sólo su clase de equivalencia módulo las simetrías de la salida.

Ejemplo concreto: observabilidad en $SE(2)$

Consideremos un robot en el plano con estado

$$g = (R,\ p) \in SE(2), \quad R \in SO(2),\ p \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que el sensor mide únicamente la **posición** p del robot, sin información sobre su orientación:

$$y = h(g) = p.$$

Ejemplo concreto: observabilidad en $SE(2)$

Consideremos un robot en el plano con estado

$$g = (R,\ p) \in SE(2), \quad R \in SO(2),\ p \in \mathbb{R}^2.$$

Supongamos que el sensor mide únicamente la **posición** p del robot, sin información sobre su orientación:

$$y = h(g) = p.$$

Dirección no observable

La salida y es **invariante a rotaciones**: si aplicamos cualquier ángulo $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(R, p) \quad \longrightarrow \quad (R_\theta R,\ p),$$

la salida no cambia porque depende sólo de p.
Por lo tanto, todos los estados con orientación diferente pero misma posición tienen la misma salida:

$$h(R, p) = h(R_\theta R, p),$$

y son **indistinguibles**.

Ejemplo concreto: observabilidad en $SE(2)$

Codistribución de observabilidad

El espacio de observación contiene sólo funciones de p; por tanto

$$d\mathcal{O}(g) = \operatorname{span}\{dp_1, \, dp_2\},$$

de dimensión $2 < \dim SE(2) = 3$.
La dirección asociada al ángulo (la rotación en $SO(2)$) es **no observable**.

Ejemplo concreto: observabilidad en $SE(2)$

Codistribución de observabilidad

El espacio de observación contiene sólo funciones de p; por tanto

$$d\mathcal{O}(g) = \mathrm{span}\{dp_1, dp_2\},$$

de dimensión $2 < \dim SE(2) = 3$.
La dirección asociada al ángulo (la rotación en $SO(2)$) es **no observable**.

*Conclusión: el robot puede localizar su **posición**, pero no su **orientación**.*

Resumen observabilidad (I): conceptos básicos

1. Idea general

- Un sistema es **observable** si, a partir de sus **salidas** y del modelo, podemos determinar su **estado interno** en tiempo finito.
- Formalmente, dos estados q_1, q_2 son **indistinguibles** si, para todos los controles admisibles $u(\cdot)$, generan la misma salida $Y_{q_1,u}(t) = Y_{q_2,u}(t)$.
- El sistema es observable si $q_1 I q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$.

Resumen observabilidad (I): conceptos básicos

1. Idea general
   - Un sistema es **observable** si, a partir de sus **salidas** y del modelo, podemos determinar su **estado interno** en tiempo finito.
   - Formalmente, dos estados q_1, q_2 son **indistinguibles** si, para todos los controles admisibles $u(\cdot)$, generan la misma salida $Y_{q_1,u}(t) = Y_{q_2,u}(t)$.
   - El sistema es observable si $q_1 I q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$.
2. Caso lineal
   - Sistema lineal continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   - Matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

   - El sistema es **observable** si $\mathrm{rango}(\mathcal{O}) = n$.

Resumen observabilidad (I): conceptos básicos

1. Idea general
   - Un sistema es **observable** si, a partir de sus **salidas** y del modelo, podemos determinar su **estado interno** en tiempo finito.
   - Formalmente, dos estados q_1, q_2 son **indistinguibles** si, para todos los controles admisibles $u(\cdot)$, generan la misma salida $Y_{q_1,u}(t) = Y_{q_2,u}(t)$.
   - El sistema es observable si $q_1 I q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$.
2. Caso lineal
   - Sistema lineal continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   - Matriz de observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

   - El sistema es **observable** si $\mathrm{rango}(\mathcal{O}) = n$.
3. Versiones no lineales
   - Observabilidad **global**, **local** y **localmente fuerte**: distinguen cuánto "alrededor" de un estado se pueden separar trayectorias.

Resumen observabilidad (II): no lineal y rango

1. Sistemas no lineales con salida

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad y = h(x).$$

- Definimos la **función de respuesta** $R(q,u)$ como la salida $y(t)$ generada desde q con el control $u(\cdot)$.
- Observabilidad: distintos estados producen **alguna** salida diferente para algún control admisible.

Resumen observabilidad (II): no lineal y rango

1. Sistemas no lineales con salida

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad y = h(x).$$

- Definimos la **función de respuesta** $R(q,u)$ como la salida $y(t)$ generada desde q con el control $u(\cdot)$.
- Observabilidad: distintos estados producen **alguna** salida diferente para algún control admisible.

2. Espacio de observación y condición de rango

- Espacio de observación:

$$H = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \mathcal{L}_{f_{u_k}} \cdots \mathcal{L}_{f_{u_1}} h \right\},$$

  y codistribución

$$\mathcal{H}(x) = \operatorname{span}\{d\phi(x) \mid \phi \in H\}.$$

- Para sistemas afines, se usan derivadas de Lie respecto a $g_0 = f$ y los campos de control $g_1, \ldots, g_m$.
- **Condición de rango:** si $\dim \mathcal{H}(x) = n$, el sistema es **localmente fuertemente observable**.

Resumen observabilidad (II): no lineal y rango

1. Sistemas no lineales con salida

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad y = h(x).$$

- Definimos la **función de respuesta** $R(q,u)$ como la salida $y(t)$ generada desde q con el control $u(\cdot)$.
- Observabilidad: distintos estados producen **alguna** salida diferente para algún control admisible.

2. Espacio de observación y condición de rango

- Espacio de observación:

$$H = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \mathcal{L}_{f_{u_k}} \cdots \mathcal{L}_{f_{u_1}} h \right\},$$

  y codistribución

$$\mathcal{H}(x) = \operatorname{span}\{d\phi(x) \mid \phi \in H\}.$$

- Para sistemas afines, se usan derivadas de Lie respecto a $g_0 = f$ y los campos de control $g_1, \ldots, g_m$.
- **Condición de rango:** si $\dim \mathcal{H}(x) = n$, el sistema es **localmente fuertemente observable**.

3. Sutilezas importantes

- La condición de rango es **suficiente** pero no **necesaria**: puede haber sistemas observables con $\dim \mathcal{H}(x) < n$.
- La geometría (simetrías, grupos de Lie, campos invariantes) juega un papel clave para entender direcciones no observables en robótica y sistemas mecánicos.

Resumen observabilidad (III): sistemas en grupos de Lie

1. Sistemas de control invariantes a izquierda

Consideramos un sistema cinemático sin deriva en un grupo de Lie G:

$$\dot{g} = g \sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \qquad y = h(g),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_m\}$ son generadores de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\overleftarrow{E_j}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda asociados.

Resumen observabilidad (III): sistemas en grupos de Lie

1. Sistemas de control invariantes a izquierda

Consideramos un sistema cinemático sin deriva en un grupo de Lie G:

$$\dot{g} = g \sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \qquad y = h(g),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_m\}$ son generadores de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\overleftarrow{E_j}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda asociados.

2. Espacio de observación en G

- El espacio de observación $\mathcal{O}$ es el espacio generado por las salidas y todas sus derivadas de Lie respecto a campos invariantes a izquierda:

$$\mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_k}}} \cdots \mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_1}}} h_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq p, \ 1 \leq j_s \leq m.$$

- La información relevante para distinguir estados se recoge en la **codistribución de observabilidad**:

$$d\mathcal{O}(g) = \mathrm{span}\{\ d\alpha(g) \mid \alpha \in \mathcal{O}\ \}.$$

Resumen observabilidad (III): sistemas en grupos de Lie

1. Sistemas de control invariantes a izquierda

Consideramos un sistema cinemático sin deriva en un grupo de Lie G:

$$\dot{g} = g \sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \qquad y = h(g),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_m\}$ son generadores de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\overleftarrow{E_j}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda asociados.

2. Espacio de observación en G

- El espacio de observación $\mathcal{O}$ es el espacio generado por las salidas y todas sus derivadas de Lie respecto a campos invariantes a izquierda:

$$\mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_k}}} \cdots \mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_1}}} h_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq p,\ 1 \leq j_s \leq m.$$

- La información relevante para distinguir estados se recoge en la **codistribución de observabilidad**:

$$d\mathcal{O}(g) = \operatorname{span}\{\ d\alpha(g) \mid \alpha \in \mathcal{O}\ \}.$$

3. Criterio geométrico de observabilidad

El sistema es localmente observable en $g \in G$ si

$$\dim\big(d\mathcal{O}(g)\big) = \dim G.$$

Resumen observabilidad (III): sistemas en grupos de Lie

1. Sistemas de control invariantes a izquierda

Consideramos un sistema cinemático sin deriva en un grupo de Lie G:

$$\dot{g} = g \sum_{j=1}^{m} u_j E_j, \qquad y = h(g),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_m\}$ son generadores de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y $\overleftarrow{E_j}$ son los campos vectoriales invariantes a izquierda asociados.

2. Espacio de observación en G

- El espacio de observación $\mathcal{O}$ es el espacio generado por las salidas y todas sus derivadas de Lie respecto a campos invariantes a izquierda:

$$\mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_k}}} \cdots \mathcal{L}_{\overleftarrow{E_{j_1}}} h_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq p, \ 1 \leq j_s \leq m.$$

- La información relevante para distinguir estados se recoge en la **codistribución de observabilidad**:

$$d\mathcal{O}(g) = \operatorname{span}\{\ d\alpha(g) \mid \alpha \in \mathcal{O}\ \}.$$

3. Criterio geométrico de observabilidad

El sistema es localmente observable en $g \in G$ si

$$\dim\big(d\mathcal{O}(g)\big) = \dim G.$$

La observabilidad depende de cómo las funciones de salida h "rompen" las simetrías del grupo y de cómo las derivadas de Lie revelan direcciones distinguibles en G.

Aplicación: Agentes en una red

Aplicación: Agentes en una red

- Consideremos un conjunto $\mathcal{N}$ de $n \in \mathbb{N} \geq 2$ agentes cuya posición en el plano se denota por $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \dots, o\}$. Definimos $r = (r_1, \dots, r_o) \in \mathbb{R}^{2o}$ como el vector apilado de posiciones.

Aplicación: Agentes en una red

- Consideremos un conjunto $\mathcal{N}$ de $n \in \mathbb{N} \geq 2$ agentes cuya posición en el plano se denota por $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \ldots, o\}$. Definimos $r = (r_1, \ldots, r_o) \in \mathbb{R}^{2o}$ como el vector apilado de posiciones.
- Un agente $i \in \mathcal{N}$ puede realizar mediciones respecto a otros agentes en el subconjunto $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$, es decir, los vecinos del agente i. Las relaciones de vecindad se describen mediante un grafo no dirigido $\mathbb{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ con conjunto de aristas $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Aplicación: Agentes en una red

- Consideremos un conjunto $\mathcal{N}$ de $n \in \mathbb{N} \geq 2$ agentes cuya posición en el plano se denota por $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \ldots, o\}$. Definimos $r = (r_1, \ldots, r_o) \in \mathbb{R}^{2o}$ como el vector apilado de posiciones.
- Un agente $i \in \mathcal{N}$ puede realizar mediciones respecto a otros agentes en el subconjunto $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$, es decir, los vecinos del agente i. Las relaciones de vecindad se describen mediante un grafo no dirigido $\mathbb{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ con conjunto de aristas $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.
- La matriz de incidencia se denota por $B \in \mathbb{R}^{o \times |\mathcal{E}|}$ y establece las relaciones de vecindad en $\mathbb{G}$. El vector apilado de posiciones relativas entre agentes vecinos se define como

$$z = \begin{pmatrix} \overline{B}^T \\ -\overline{B}^T \end{pmatrix} r, \quad \overline{B} := B \otimes I_2.$$

Aplicación: Agentes en una red

- Consideremos un conjunto $\mathcal{N}$ de $n \in \mathbb{N} \geq 2$ agentes cuya posición en el plano se denota por $r_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \ldots, o\}$. Definimos $r = (r_1, \ldots, r_o) \in \mathbb{R}^{2o}$ como el vector apilado de posiciones.
- Un agente $i \in \mathcal{N}$ puede realizar mediciones respecto a otros agentes en el subconjunto $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{N}$, es decir, los vecinos del agente i. Las relaciones de vecindad se describen mediante un grafo no dirigido $\mathbb{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ con conjunto de aristas $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.
- La matriz de incidencia se denota por $B \in \mathbb{R}^{o \times |\mathcal{E}|}$ y establece las relaciones de vecindad en $\mathbb{G}$. El vector apilado de posiciones relativas entre agentes vecinos se define como

$$z = \begin{pmatrix} \overline{B}^T \\ -\overline{B}^T \end{pmatrix} r, \quad \overline{B} := B \otimes I_2.$$

- Nótese que $z_k \in \mathbb{R}^2$ y $z_{k+|\mathcal{E}|} \in \mathbb{R}^2$ en z corresponden a $r_i - r_j$ y $r_j - r_i$ para la arista $\mathcal{E}_k$, respectivamente. Denotamos también $r_{ij} := r_i - r_j$ como las posiciones relativas entre los agentes i y j respecto al marco global.

Cinemática relativa en la red

¿Qué queremos hacer?: Describir los movimientos relativos, o velocidades, de los vecinos del agente i con respecto a éste.

Cinemática relativa en la red

¿Qué queremos hacer?: Describir los movimientos relativos, o velocidades, de los vecinos del agente i con respecto a éste.

- Denotamos por $SO(2n)$ el grupo ortogonal de dimensión $2n$ y consideramos el grupo de Lie

$$SE(2n) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^{2n},\, R \in SO(2n)\}, \quad n \in \mathbb{N} \leq 1.$$

Si $\mathbf{q} \in SE(2n)$, entonces $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cinemática relativa en la red

¿Qué queremos hacer?: Describir los movimientos relativos, o velocidades, de los vecinos del agente i con respecto a éste.

- Denotamos por $SO(2n)$ el grupo ortogonal de dimensión $2n$ y consideramos el grupo de Lie

$$SE(2n) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^{2n},\, R \in SO(2n)\}, \quad n \in \mathbb{N} \leq 1.$$

  Si $\mathbf{q} \in SE(2n)$, entonces $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- El agente i trabaja en su propio marco local de coordenadas para medir las distancias a todos sus $n_i = |\mathcal{N}_i|$ vecinos.

Cinemática relativa en la red

¿Qué queremos hacer?: Describir los movimientos relativos, o velocidades, de los vecinos del agente i con respecto a éste.

- Denotamos por $SO(2n)$ el grupo ortogonal de dimensión $2n$ y consideramos el grupo de Lie

$$SE(2n) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^{2n},\, R \in SO(2n)\}, \quad n \in \mathbb{N} \leq 1.$$

  Si $\mathbf{q} \in SE(2n)$, entonces $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- El agente i trabaja en su propio marco local de coordenadas para medir las distancias a todos sus $n_i = |\mathcal{N}_i|$ vecinos.

- Para cada agente consideramos el subgrupo de Lie de $SE(2n)$ dado por

$$G_i = \{(p, R_i) \,|\, p \in \mathbb{R}^{2n_i},\, R_i \in SO(2)\},$$

  donde $p = (p_1, \ldots, p_{n_i})$ es el vector apilado tal que p_k representa la posición relativa del vecino k en $\mathcal{N}_i$ respecto al agente i, y R_i es la matriz de rotación que representa la orientación del agente i respecto a un marco global de referencia.

Cinemática relativa en la red

- Una vez centrado el sistema en el agente i, un punto $\mathbf{q} \in G_i$ contiene la información de las posiciones relativas de todos los vecinos $\mathcal{N}_i$ respecto al agente i y además la orientación del agente i.

Cinemática relativa en la red

- Una vez centrado el sistema en el agente i, un punto $\mathbf{q} \in G_i$ contiene la información de las posiciones relativas de todos los vecinos $\mathcal{N}_i$ respecto al agente i y además la orientación del agente i.

- El punto $\mathbf{q}$ puede representarse como $(p, \theta_i) = (x_1, y_1, \ldots, x_{n_i}, y_{n_i}, \theta_i)$ donde p es el vector apilado de posiciones relativas r_{ij} con $j \in \mathcal{N}_i$, y

$$R_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

  denota el marco local de coordenadas del agente i respecto a un marco global fijo.

Cinemática relativa en la red

- Una vez centrado el sistema en el agente i, un punto $\mathbf{q} \in G_i$ contiene la información de las posiciones relativas de todos los vecinos $\mathcal{N}_i$ respecto al agente i y además la orientación del agente i.

- El punto $\mathbf{q}$ puede representarse como $(p, \theta_i) = (x_1, y_1, \ldots, x_{n_i}, y_{n_i}, \theta_i)$ donde p es el vector apilado de posiciones relativas r_{ij} con $j \in \mathcal{N}_i$, y

$$R_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

  denota el marco local de coordenadas del agente i respecto a un marco global fijo.

- La subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{se}(2n)$ está dada por

$$\mathfrak{g}_i = \{\xi = (v, \omega_i) \mid v \in \mathbb{R}^{2n_i}, \, \omega_i \in \mathfrak{so}(2)\},$$

  donde

$$\omega_i = \begin{pmatrix} 0 & -w_i \\ w_i & 0 \end{pmatrix},$$

  siendo $w_i \in \mathbb{R}$ la velocidad angular del agente i, y v el vector apilado de velocidades relativas entre el agente i y sus vecinos $\mathcal{N}_i$.

Cinemática relativa en la red

Denotando $\{e_l\}_{1\leq l\leq 2n_i}$ la base estándar de $\mathbb{R}^{2n_i}$, la subálgebra $\mathfrak{g}_i$ tiene $(2n_i+1)$ generadores $\{E_k^a, E_{n_i+1}\}$, $1\leq a\leq 2$ y $1\leq k\leq n_i$, con $E_k^a=(e_{a+k},0)$ y $E_{n_i+1}=(0,\ldots,0,1)$.

Cinemática relativa en la red

Denotando $\{e_l\}_{1\leq l\leq 2n_i}$ la base estándar de $\mathbb{R}^{2n_i}$, la subálgebra $\mathfrak{g}_i$ tiene $(2n_i+1)$ generadores $\{E_k^a, E_{n_i+1}\}$, $1\leq a\leq 2$ y $1\leq k\leq n_i$, con $E_k^a=(e_{a+k},0)$ y $E_{n_i+1}=(0,\dots,0,1)$.

Se puede demostrar que el punto $\mathbf{q}\in G_i$ satisface $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}\,\xi$, por lo que se puede escribir:

$$\begin{cases}\dot{p}_j & = R_i\, v_j\\ \dot{R}_i & = R_i\,\omega_i,\end{cases} \tag{3}$$

lo cual representa un sistema completamente actuado en la subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{se}(2n)$ con entradas de control (v_j, w_i), donde v_j es la velocidad relativa entre el agente i y los agentes vecinos j.

Cinemática relativa en la red

Denotando $\{e_l\}_{1\leq l\leq 2n_i}$ la base estándar de $\mathbb{R}^{2n_i}$, la subálgebra $\mathfrak{g}_i$ tiene $(2n_i+1)$ generadores $\{E_k^a, E_{n_i+1}\}$, $1\leq a\leq 2$ y $1\leq k\leq n_i$, con $E_k^a=(e_{a+k},0)$ y $E_{n_i+1}=(0,\ldots,0,1)$.

Se puede demostrar que el punto $\mathbf{q}\in G_i$ satisface $\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}\,\xi$, por lo que se puede escribir:

$$\begin{cases}\dot{p}_j & = R_i\,v_j\\ \dot{R}_i & = R_i\,\omega_i,\end{cases} \tag{3}$$

lo cual representa un sistema completamente actuado en la subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{se}(2n)$ con entradas de control (v_j,w_i), donde v_j es la velocidad relativa entre el agente i y los agentes vecinos j.

Por tanto, en términos de la base de $\mathfrak{g}_i$ se puede escribir la dinámica de $\mathbf{q}$ en la siguiente forma compacta:

$$\dot{\mathbf{q}}=w_i\overleftarrow{E_{n_i+1}}+\sum_{k=1}^{n_i}\left(v_{x,k}\overleftarrow{E_k^1}+v_{y,k}\overleftarrow{E_k^2}\right).$$

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Suponemos que los agentes tienen sensores a bordo que permiten al agente i medir su distancia respecto al agente $k \in \mathcal{N}_i$ y su propia orientación θ_i respecto a un marco global de coordenadas.

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Suponemos que los agentes tienen sensores a bordo que permiten al agente i medir su distancia respecto al agente $k \in \mathcal{N}_i$ y su propia orientación θ_i respecto a un marco global de coordenadas.

A partir de ahora, nos enfocamos en el agente i. Para $k = 1, \ldots, n_i$ definimos las funciones de observación en G_i:

$$h_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(x_k^2 + y_k^2\right), \quad h_{n_i+1}(\mathbf{q}) = \theta_i.$$

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Suponemos que los agentes tienen sensores a bordo que permiten al agente i medir su distancia respecto al agente $k \in \mathcal{N}_i$ y su propia orientación θ_i respecto a un marco global de coordenadas.

A partir de ahora, nos enfocamos en el agente i. Para $k = 1, \ldots, n_i$ definimos las funciones de observación en G_i:

$$h_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(x_k^2 + y_k^2\right), \quad h_{n_i+1}(\mathbf{q}) = \theta_i.$$

Theorem

Supongamos que todos los vecinos del agente i están en movimiento relativo respecto al agente i en ambas coordenadas x y y. Entonces, el estado $\mathbf{q}$ en G_i es observable bajo la dinámica:

$$\dot{\mathbf{q}} = w_i \overleftarrow{E_{n_i+1}} + \sum_{k=1}^{n_i}\left(v_{x,k}\overleftarrow{E_k^1} + v_{y,k}\overleftarrow{E_k^2}\right), \tag{4}$$

con las funciones de observación h_k y h_{n_i+1} para $k = 1, \ldots, n_i$.

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Algunas observaciones sobre el resultado anterior:

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Algunas observaciones sobre el resultado anterior:

- Nótese que, para un movimiento rotacional rígido de dos agentes vecinos respecto a un punto fijo, h_k será constante. Sin embargo, la posición relativa correspondiente es observable, ya que su velocidad relativa v_j no es nula.

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Algunas observaciones sobre el resultado anterior:

- Nótese que, para un movimiento rotacional rígido de dos agentes vecinos respecto a un punto fijo, h_k será constante. Sin embargo, la posición relativa correspondiente es observable, ya que su velocidad relativa v_j no es nula.

  Esto no ocurre en otros enfoques, por ejemplo, en el control de formación basado en posición, donde los agentes también controlan sus orientaciones.

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Algunas observaciones sobre el resultado anterior:

- Nótese que, para un movimiento rotacional rígido de dos agentes vecinos respecto a un punto fijo, h_k será constante. Sin embargo, la posición relativa correspondiente es observable, ya que su velocidad relativa v_j no es nula.

  Esto no ocurre en otros enfoques, por ejemplo, en el control de formación basado en posición, donde los agentes también controlan sus orientaciones.

- El agente i puede rotar sobre sí mismo y esto no interfiere con la estimación de sus posiciones relativas respecto a sus vecinos.

Localización de agentes basada en mediciones de distancia

Algunas observaciones sobre el resultado anterior:

- Nótese que, para un movimiento rotacional rígido de dos agentes vecinos respecto a un punto fijo, h_k será constante. Sin embargo, la posición relativa correspondiente es observable, ya que su velocidad relativa v_j no es nula.

  Esto no ocurre en otros enfoques, por ejemplo, en el control de formación basado en posición, donde los agentes también controlan sus orientaciones.

- El agente i puede rotar sobre sí mismo y esto no interfiere con la estimación de sus posiciones relativas respecto a sus vecinos.

- El análisis del rango de $d\mathcal{O}$ en el teorema no presenta dificultades porque las funciones de observación h_k permiten considerar cada par de vecinos por separado. No obstante, esto no sería así si se usaran funciones de observación que involucraran más de un par de vecinos.

Resumen de la Clase

- Repasamos los conceptos fundamentales del control geométrico no lineal.
- Introdujimos los sistemas de control en variedades y grupos de Lie.
- Discutimos las nociones de **controlabilidad** y **observabilidad**.
- Analizamos aplicaciones a sistemas mecánicos y problemas de localización.

El objetivo fue comprender cómo la geometría influye en el análisis y diseño de controladores.

Conclusiones

- La geometría diferencial proporciona un marco natural para modelar y controlar sistemas no lineales.
- Los grupos de Lie permiten describir sistemas con simetrías, como robots móviles y cuerpos rígidos.
- La **controlabilidad** se relaciona con la generación del espacio tangente mediante corchetes de Lie.
- La **observabilidad** depende de la capacidad de distinguir estados a partir de mediciones y dinámicas.

Próximamente: Dinámica reducida, ecuaciones de Euler-Poincaré, control dinámico y aplicaciones a drones