UMA Neuquén 2022

Sesión de Análisis

Intervalo de positividad de un haz de operadores autoadjuntos

Santiago Gonzalez Zerbo (IAM-CONICET, FIUBA)

Alejandra Maestripieri (IAM-CONICET, FIUBA)

Francisco Martínez Pería (IAM-CONICET, UNLP)

Objetivo

Consideremos un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Dados operadores acotados y autoadjuntos A y B actuando en $\mathcal{H}$, definamos

$$P(\lambda) = A + \lambda B, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Objetivo

Consideremos un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Dados operadores acotados y autoadjuntos A y B actuando en $\mathcal{H}$, definamos

$$P(\lambda) = A + \lambda B, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El objetivo de esta charla es describir condiciones necesarias y suficientes para que los conjuntos

$$\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es semidefinido positivo}\}$$

$$\mathcal{I}_{>}(A, B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es definido positivo}\}$$

sean no vacíos, y las características de $P(\lambda)$ cuando λ toma valores en éstos.

Un problema QCQP

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x^\top A x + a^\top x \\ \text{sujeto a} \quad & x^\top B x + b^\top x = \beta, \end{aligned}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son simétricas, $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ están dados.

Un problema QCQP

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x^\top A x + a^\top x \\ \text{sujeto a} \quad & x^\top B x + b^\top x = \beta, \end{aligned}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son simétricas, $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ están dados.

- Si A y B son semidefinidas positivas las funciones son convexas.
- El caso general es de complejidad NP.

Un problema QCQP

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x^\top A x + a^\top x \\ \text{sujeto a} \quad & x^\top B x + b^\top x = \beta, \end{aligned}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son simétricas, $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ están dados.

- Si A y B son semidefinidas positivas las funciones son convexas.
- El caso general es de complejidad NP.

El pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{R}$, está relacionado con este problema QCQP.

Un problema QCQP

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & x^\top A x + a^\top x \\ \text{sujeto a} & x^\top B x + b^\top x = \beta, \end{array}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son simétricas, $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$ están dados.

- Si A y B son semidefinidas positivas las funciones son convexas.
- El caso general es de complejidad NP.

El pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{R}$, está relacionado con este problema QCQP.

Si $x_0 \in \mathcal{H}$ es una solución del QCQP entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A + \lambda_0 B \text{ es semidefinida positiva.}$$

Un problema QCQP

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \langle Ax, x \rangle + \operatorname{Re} \langle a, x \rangle \\ \text{sujeto a} \quad & \langle Bx, x \rangle + \operatorname{Re} \langle b, x \rangle = \beta, \end{aligned}$$

donde $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ son autoadjuntos, $a, b \in \mathcal{H}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ están dados.

- Si A y B son semidefinidos positivos las funciones son convexas.
- El caso general es de complejidad NP.

El pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{R}$, está relacionado con este problema QCQP.

Si $x_0 \in \mathcal{H}$ es una solución del QCQP entonces existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A + \lambda_0 B \text{ es semidefinido positivo.}$$

Intervalo de positividad de un haz lineal de matrices

Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos

$$\mathcal{I}_{\geq}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es semidefinida positiva}\},$$
$$\mathcal{I}_{>}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es definida positiva}\}.$$

Intervalo de positividad de un haz lineal de matrices

Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos

$$\mathcal{I}_{\geq}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \ A + \rho B \text{ es semidefinida positiva}\},$$
$$\mathcal{I}_{>}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \ A + \rho B \text{ es definida positiva}\}.$$

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por B:

$$Q(B) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x^\top B x = 0 \right\}$$

Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos

$$\mathcal{I}_{\geq}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es semidefinida positiva}\},$$
$$\mathcal{I}_{>}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A + \rho B \text{ es definida positiva}\}.$$

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por B:

$$Q(B) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \; : \; x^\top B x = 0 \right\}$$

Teorema

- *Supongamos que* B *es indefinida. Entonces,* $\mathcal{I}_{\geq}(A,B) \neq \varnothing$ *si y sólo si*

$$x^\top A x \geq 0 \quad \textit{para todo } x \in Q(B).$$

- $\mathcal{I}_{>}(A,B) \neq \varnothing$ *si y sólo si* $x^\top A x > 0$ *para todo* $x \in Q(B)$, $x \neq 0$.

Dadas matrices simétricas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos

$$\mathcal{I}_{\geq}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A+\rho B \text{ es semidefinida positiva}\},$$
$$\mathcal{I}_{>}(A,B) = \{\rho \in \mathbb{R} : \; A+\rho B \text{ es definida positiva}\}.$$

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por B:

$$Q(B) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \; : \; x^\top Bx = 0 \right\}$$

$\exists x_+, x_- \in \mathbb{R}^n : x_+^\top Bx_+ > 0 \wedge x_-^T Bx_- < 0$

Teorema

- *Supongamos que B es indefinida. Entonces, $\mathcal{I}_{\geq}(A,B) \neq \varnothing$ si y sólo si*

$$x^\top Ax \geq 0 \quad \textit{para todo } x \in Q(B).$$

- $\mathcal{I}_{>}(A,B) \neq \varnothing$ *si y sólo si* $x^\top Ax > 0$ *para todo* $x \in Q(B)$, $x \neq 0$.

La hipótesis de que B es indefinida es necesaria. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $x^\top Bx = 0$ implica que $x^\top Ax = 0$ pero $A + \lambda B$ es siempre indefinida.

La hipótesis de que B es indefinida es necesaria. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $x^\top Bx = 0$ implica que $x^\top Ax = 0$ pero $A + \lambda B$ es siempre indefinida.

Tanto $\mathcal{I}_\geq(A, B)$ como $\mathcal{I}_>(A, B)$ son intervalos, y obviamente

$$\mathcal{I}_>(A, B) \subset \mathcal{I}_\geq(A, B).$$

La hipótesis de que B es indefinida es necesaria. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $x^\top Bx = 0$ implica que $x^\top Ax = 0$ pero $A + \lambda B$ es siempre indefinida.

Tanto $\mathcal{I}_\geq(A, B)$ como $\mathcal{I}_>(A, B)$ son intervalos, y obviamente

$$\mathcal{I}_>(A, B) \subset \mathcal{I}_\geq(A, B).$$

Sin embargo, $A + \lambda B$ puede ser semidefinido positivo para un único $\lambda \in \mathbb{R}$.

La hipótesis de que B es indefinida es necesaria. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $x^\top Bx = 0$ implica que $x^\top Ax = 0$ pero $A + \lambda B$ es siempre indefinida.

Tanto $\mathcal{I}_\geq(A, B)$ como $\mathcal{I}_>(A, B)$ son intervalos, y obviamente

$$\mathcal{I}_>(A, B) \subset \mathcal{I}_\geq(A, B).$$

Sin embargo, $A + \lambda B$ puede ser semidefinido positivo para un único $\lambda \in \mathbb{R}$. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

entonces $A + \lambda B$ es semidefinido positivo sólo si $\lambda = 0$.

La hipótesis de que B es indefinida es necesaria. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $x^\top Bx = 0$ implica que $x^\top Ax = 0$ pero $A + \lambda B$ es siempre indefinida.

Tanto $\mathcal{I}_\geq(A, B)$ como $\mathcal{I}_>(A, B)$ son intervalos, y obviamente

$$\mathcal{I}_>(A, B) \subset \mathcal{I}_\geq(A, B).$$

Sin embargo, $A + \lambda B$ puede ser semidefinido positivo para un único $\lambda \in \mathbb{R}$. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

entonces $A + \lambda B$ es semidefinido positivo sólo si $\lambda = 0$.

Si $\mathcal{I}_\geq(A, B) = \{\rho_0\}$ entonces B es indefinida y $\mathcal{I}_>(A, B) = \varnothing$.

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por el operador adutoadjunto $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$Q(B) := \{\, x \in \mathcal{H} \ : \ \langle\, Bx, x \,\rangle = 0 \,\}$$

El caso infinito dimensional: la piedra basal

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por el operador adutoadjunto $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$Q(B) := \{\, x \in \mathcal{H} \ : \ \langle\, Bx, x \,\rangle = 0 \,\}$$

Teorema (M. G. Krein y Ju. L. Smul'jan – 1969)

Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operadores autoadjuntos, tales que B es indefinido. Supongamos que

$$\langle\, Ax, x \,\rangle \geq 0 \qquad \textit{para todo } x \in Q(B).$$

Entonces, para todo $y \in \mathcal{H}$ tal que $\langle\, By, y \,\rangle < 0$ y todo $z \in \mathcal{H}$ tal que $\langle\, Bz, z \,\rangle > 0$ tenemos que

$$\frac{\langle\, Ay, y \,\rangle}{\langle\, By, y \,\rangle} \leq \frac{\langle\, Az, z \,\rangle}{\langle\, Bz, z \,\rangle}.$$

Denotemos con $Q(B)$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática inducida por el operador adutoadjunto $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$Q(B) := \{\, x \in \mathcal{H} \ : \ \langle\, Bx, x \,\rangle = 0 \,\}$$

$$\exists x_+, x_- \in \mathcal{H} : \langle\, Bx_+, x_+ \,\rangle > 0 \ \wedge \ \langle\, Bx_-, x_- \,\rangle < 0$$

Teorema (M. G. Krein y Ju. L. Smul'jan – 1969)

Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operadores autoadjuntos, tales que B es indefinido. Supongamos que

$$\langle\, Ax, x \,\rangle \geq 0 \qquad \textit{para todo } x \in Q(B).$$

Entonces, para todo $y \in \mathcal{H}$ tal que $\langle\, By, y \,\rangle < 0$ y todo $z \in \mathcal{H}$ tal que $\langle\, Bz, z \,\rangle > 0$ tenemos que

$$\frac{\langle\, Ay, y \,\rangle}{\langle\, By, y \,\rangle} \leq \frac{\langle\, Az, z \,\rangle}{\langle\, Bz, z \,\rangle}.$$

Entonces,

$$\mu_+ := \inf_{\{z\in\mathcal{H}:\langle\, Bz,z\,\rangle>0\}} \frac{\langle\, Az, z\,\rangle}{\langle\, Bz, z\,\rangle} > -\infty \quad \text{y}$$

$$\mu_- := \sup_{\{y\in\mathcal{H}:\langle\, By,y\,\rangle<0\}} \frac{\langle\, Ay, y\,\rangle}{\langle\, By, y\,\rangle} < +\infty.$$

Entonces,

$$\mu_+ := \inf_{\{z \in \mathcal{H} : \langle Bz, z \rangle > 0\}} \frac{\langle Az, z \rangle}{\langle Bz, z \rangle} > -\infty \quad \text{y}$$

$$\mu_- := \sup_{\{y \in \mathcal{H} : \langle By, y \rangle < 0\}} \frac{\langle Ay, y \rangle}{\langle By, y \rangle} < +\infty.$$

Además, $\mu_- \leq \mu_+$ y para cada $\mu \in [\mu_-, \mu_+]$ se satisface que:

$$\langle Ax, x \rangle \geq \mu \langle Bx, x \rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Entonces,

$$\mu_+ := \inf_{\{z\in\mathcal{H}:\langle Bz,z\rangle>0\}} \frac{\langle Az,z\rangle}{\langle Bz,z\rangle} > -\infty \quad \text{y}$$

$$\mu_- := \sup_{\{y\in\mathcal{H}:\langle By,y\rangle<0\}} \frac{\langle Ay,y\rangle}{\langle By,y\rangle} < +\infty.$$

Además, $\mu_- \leq \mu_+$ y para cada $\mu \in [\mu_-, \mu_+]$ se satisface que:

$$\langle Ax,x\rangle \geq \mu \langle Bx,x\rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

$\mathcal{I}_\geq(A,B) \neq \varnothing$ si y sólo si

$$\langle Ax,x\rangle \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in Q(B).$$

En este caso, existen $\lambda_-, \lambda_+ \in \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{I}_\geq(A,B) = [\lambda_-, \lambda_+]$.

El caso infinito dimensional: la piedra basal

Entonces,

$$\mu_+ := \inf_{\{z\in\mathcal{H} : \langle Bz, z\rangle > 0\}} \frac{\langle Az, z\rangle}{\langle Bz, z\rangle} > -\infty \quad \text{y}$$
$$\mu_- := \sup_{\{y\in\mathcal{H} : \langle By, y\rangle < 0\}} \frac{\langle Ay, y\rangle}{\langle By, y\rangle} < +\infty.$$

Además, $\mu_- \leq \mu_+$ y para cada $\mu \in [\mu_-, \mu_+]$ se satisface que:

$$\langle Ax, x\rangle \geq \mu \langle Bx, x\rangle \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

$\mathcal{I}_{\geq}(A, B) \neq \varnothing$ si y sólo si

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in Q(B).$$

En este caso, existen $\lambda_-, \lambda_+ \in \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$.

$-\mu_+$ $\quad$ $-\mu_-$

Si $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = \{ \lambda_0 \}$, entonces:

1. B es indefinido.
2. $\mathcal{I}_{>}(A, B) \neq \varnothing$.

Si $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = \{ \lambda_0 \}$, entonces:

1. B es indefinido.
2. $\mathcal{I}_{>}(A, B) \neq \varnothing$.

Deseamos ahora hallar las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{I}_{>}(A, B) \neq \varnothing$.

Si $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = \{ \lambda_0 \}$, entonces:

1. B es indefinido.
2. $\mathcal{I}_{>}(A, B) \neq \varnothing$.

Deseamos ahora hallar las condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{I}_{>}(A, B) \neq \varnothing$.

Hipótesis

De aquí en más suponemos que B es indefinido, y que $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = [\lambda_-, \lambda_+]$.

Lema

Supongamos que $\lambda_- < \lambda_+$. *Dados* $\lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$, $\lambda' \neq \lambda$, *existen* $0 < \alpha < \beta$ *tales que*

$$\alpha(A + \lambda' B) \leq A + \lambda B \leq \beta(A + \lambda' B).$$

Además, existen $\alpha_\pm > 0$ *tales que*

$$A + \lambda_\pm B \leq \alpha_\pm(A + \lambda B).$$

Lema

Supongamos que $\lambda_- < \lambda_+$. *Dados* $\lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$, $\lambda' \neq \lambda$, *existen* $0 < \alpha < \beta$ *tales que*

$$\alpha(A + \lambda' B) \leq A + \lambda B \leq \beta(A + \lambda' B).$$

Además, existen $\alpha_\pm > 0$ *tales que*

$$A + \lambda_\pm B \leq \alpha_\pm (A + \lambda B).$$

Para los λ del abierto los operadores son equivalentes de acuerdo a la relación de equivalencia de Thompson:

$$A + \lambda B \sim_T A + \lambda' B \qquad \text{para todos } \lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$$

Mediante un conocido teorema de R. Douglas, se sigue que:

Mediante un conocido teorema de R. Douglas, se sigue que:

Corolario

Supongamos que $\lambda_- < \lambda_+$. *Entonces,*

1. $R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big) = R\big((A+\lambda' B)^{1/2}\big)$ *para todos* $\lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$;
2. $R\big((A+\lambda_\pm B)^{1/2}\big) \subseteq R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big)$ *para todo* $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$.

Mediante un conocido teorema de R. Douglas, se sigue que:

Corolario

Supongamos que $\lambda_- < \lambda_+$. Entonces,

1. $R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big) = R\big((A+\lambda' B)^{1/2}\big)$ *para todos* $\lambda, \lambda' \in (\lambda_-, \lambda_+)$;
2. $R\big((A+\lambda_\pm B)^{1/2}\big) \subseteq R\big((A+\lambda B)^{1/2}\big)$ *para todo* $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$.

Corolario

Si $\lambda_- < \lambda_+$ *y* $A+\lambda_0 B$ *tiene rango cerrado para algún* $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$, *entonces*

$$A+\lambda B \quad \text{tiene rango cerrado para todo } \lambda \in (\lambda_-, \lambda_+).$$

Definamos los conjuntos

$$\mathcal{M}_+ = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle > 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_- \right\},$$

y

$$\mathcal{M}_- = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle < 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_+ \right\}.$$

Definamos los conjuntos

inf

$$\mathcal{M}_+ = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle > 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_- \right\},$$

sup

y

$$\mathcal{M}_- = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle < 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_+ \right\}.$$

Sobre los núcleos

Definamos los conjuntos

inf

$$\mathcal{M}_+ = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle > 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_- \right\},$$

sup

y

$$\mathcal{M}_- = \left\{ x \in \mathcal{H} : \ \langle Bx, x \rangle < 0 \ \text{ and } \ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle Bx, x \rangle} = -\lambda_+ \right\}.$$

Proposición

- *Si* $\lambda_- < \lambda_+$, *entonces:*
  - $N(A + \lambda B) = Q(A) \cap Q(B) = N(A) \cap N(B)$ *para todo* $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$.
  - $N(A + \lambda_\pm B) = \mathcal{M}_\mp \cup \big(N(A) \cap N(B)\big)$.
- *Si* $\lambda_- = \lambda_+ = \lambda$, *entonces*

$$N(A + \lambda B) = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_- \cup \big(Q(A) \cap Q(B)\big).$$

$\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$ pueden ser el conjunto vacío.

$\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$ pueden ser el conjunto vacío.

Consideremos el espacio $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ con el producto interno usual.

$\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$ pueden ser el conjunto vacío.

Consideremos el espacio $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ con el producto interno usual.

Consideremos los operadores $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definidos por

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 e_1 - \sum_{k \geq 2} x_k e_k, \\ Bx &= -x_1 e_1 + \sum_{k \geq 2} (1 + \tfrac{1}{k}) x_k e_k, \end{aligned}$$

para $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, donde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ denota la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$.

$\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$ pueden ser el conjunto vacío.

Consideremos el espacio $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ con el producto interno usual.

Consideremos los operadores $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definidos por

$$Ax = x_1 e_1 - \sum_{k \geq 2} x_k e_k,$$
$$Bx = -x_1 e_1 + \sum_{k \geq 2} (1 + \tfrac{1}{k}) x_k e_k,$$

para $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, donde $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ denota la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$.

Entonces

- $\mathcal{I}_{\geq}(A, B) = \{ 1 \}$;
- $\mathcal{M}_- = \operatorname{span}\{ e_1 \} \setminus \{ 0 \}$ y $\mathcal{M}_+ = \varnothing$.

Teorema

$\mathcal{I}_>(A,B) \neq \varnothing$ si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \text{para todo } x \in Q(B). \tag{0.1}$$

En este caso, $\lambda_- < \lambda_+$ y $\mathcal{I}_>(A,B) = (\lambda_-, \lambda_+)$.

Teorema

$\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$ si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2 \qquad \text{para todo } x \in Q(B). \tag{0.1}$$

En este caso, $\lambda_- < \lambda_+$ y $\mathcal{I}_>(A, B) = (\lambda_-, \lambda_+)$.

Además, dado $\alpha > 0$ fijo tal que se satisface (0.1), existen $\eta_-, \eta_+ \in \mathbb{R}$ tales que $\eta_- \leq \eta_+$ y

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \; A + \lambda B \geq \alpha I\} = [\eta_-, \eta_+].$$

Una reducción simplificadora cuando $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A, B)$.

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A, B)$.

Si $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está dado por

$$G := (A + \rho B)^{-1/2} B \, (A + \rho B)^{-1/2},$$

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A,B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A,B)$.

Si $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está dado por

$$G := (A+\rho B)^{-1/2} B \,(A+\rho B)^{-1/2},$$

el pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$ es congruente con $I + (\lambda - \rho)G$. En efecto,

$$A + \lambda B = (A+\rho B)^{1/2}\big(I + (\lambda-\rho)G\big)(A+\rho B)^{1/2}.$$

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A,B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A,B)$.

Si $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está dado por

$$G := (A+\rho B)^{-1/2} B\,(A+\rho B)^{-1/2},$$

el pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$ es congruente con $I + (\lambda - \rho)G$. En efecto,

$$A + \lambda B = (A+\rho B)^{1/2}\big(I + (\lambda-\rho)G\big)(A+\rho B)^{1/2}.$$

Consideremos una descomposición adecuada $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus N(G)$ tal que

$$G = \begin{pmatrix} G_+ & 0 & 0 \\ 0 & -G_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)$ son definidos positivos.

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A, B)$.

Si $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está dado por

$$G := (A + \rho B)^{-1/2} B \, (A + \rho B)^{-1/2},$$

el pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$ es congruente con $I + (\lambda - \rho)G$. En efecto,

$$A + \lambda B = (A + \rho B)^{1/2} \big(I + (\lambda - \rho) G \big) (A + \rho B)^{1/2}.$$

Consideremos una descomposición adecuada $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus N(G)$ tal que

$$G = \begin{pmatrix} G_+ & 0 & 0 \\ 0 & -G_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)$ son definidos positivos.

Entonces

$$\mathcal{I}_\geq(I, G) = \big[-\|G_+\|^{-1}, \|G_-\|^{-1} \big] \text{ y } \mathcal{I}_>(I, G) = \big(-\|G_+\|^{-1}, \|G_-\|^{-1} \big).$$

Una reducción simplificadora cuando $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$

Supongamos que $\mathcal{I}_>(A, B) \neq \varnothing$ y sea $\rho \in \mathcal{I}_>(A, B)$.

Si $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está dado por

$$G := (A + \rho B)^{-1/2} B \, (A + \rho B)^{-1/2},$$

el pencil $P(\lambda) = A + \lambda B$ es congruente con $I + (\lambda - \rho)G$. En efecto,

$$A + \lambda B = (A + \rho B)^{1/2} \big(I + (\lambda - \rho)G\big)(A + \rho B)^{1/2}.$$

Consideremos una descomposición adecuada $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus N(G)$ tal que

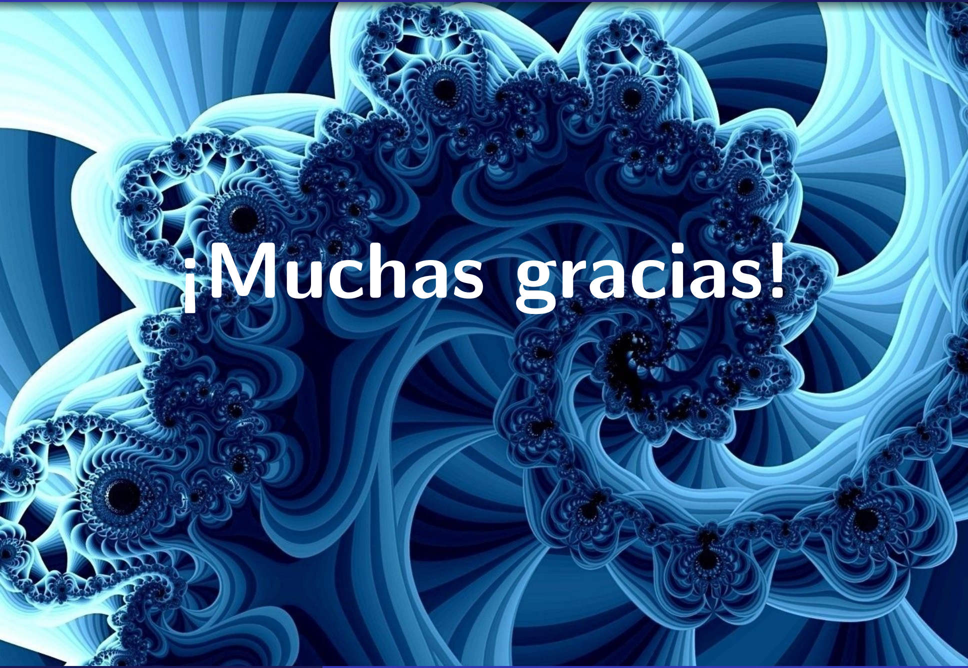
$$G = \begin{pmatrix} G_+ & 0 & 0 \\ 0 & -G_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)$ son definidos positivos.

$\lambda_- - \rho$ $\qquad$ $\lambda_+ - \rho$

Entonces

$$\mathcal{I}_\geq(I, G) = \big[-\|G_+\|^{-1}, \|G_-\|^{-1} \big] \text{ y } \mathcal{I}_>(I, G) = \big(-\|G_+\|^{-1}, \|G_-\|^{-1} \big).$$


¡Muchas gracias!