Álgebras de Hilbert Fischer-Servi

Daniela Montangie (UNCo-IITCI)
Sergio Celani (UNCPBA-CONICET)

Sesión de Lógica y Computabilidad

UMA Neuquén 2022

Antecedentes

- S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.
- S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \to, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \to, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \rightarrow, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \rightarrow b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \to, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \to b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \rightarrow, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \rightarrow b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que:

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \to, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \to b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que:

1. $\mathcal{K}$ es una base de abiertos y compactos,

Antecedentes

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \rightarrow, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \rightarrow b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que:

1. $\mathcal{K}$ es una base de abiertos y compactos,
2. $X \in \mathcal{K}$ y $U \cap V \in \mathcal{K}$, para $U, V \in \mathcal{K}$.

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \rightarrow, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \rightarrow b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que:

1. $\mathcal{K}$ es una base de abiertos y compactos,
2. $X \in \mathcal{K}$ y $U \cap V \in \mathcal{K}$, para $U, V \in \mathcal{K}$.
3. $sat(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$, para $U, V \in \mathcal{K}$,

S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie; **Representation and Duality for Hilbert algebras**. Central European Journal of Mathematics. Vol. 7, No. 3 (2009), pp 463-478.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with supremum**. Algebra Universalis Vol. 67, No. 3 (2012), pp. 237-255.

Álgebras de Hilbert acotadas con supremo o $H_0^{\vee}$-álgebras:

Álgebras $\langle A, \to, \vee, 0, 1\rangle$ de tipo $(2, 2, 1, 1)$ tales que:

1. $\langle A, \to, 0, 1\rangle$ es álgebra de Hilbert acotada,
2. $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un $\vee$-semirretículo con último elemento 1.
3. $a \to b = 1$ si y sólo is $a \vee b = b$, para $a, b \in A$.

$H_0^{\vee}$-Espacios:

Espacios topológicos $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ tales que:

1. $\mathcal{K}$ es una base de abiertos y compactos,
2. $X \in \mathcal{K}$ y $U \cap V \in \mathcal{K}$, para $U, V \in \mathcal{K}$.
3. $sat(U \cap V^c) \in \mathcal{K}$, para $U, V \in \mathcal{K}$,
4. $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ es sober,

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \rightarrow Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up(X(A))$ tal que $\varphi(a) = \{x \in X(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

$\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un $H_0^{\vee}$-espacio.

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

  $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle$ es un $H_0^{\vee}$-espacio.

- Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio.

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

  $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un $H_0^{\vee}$-espacio.

- Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio.
  Consideremos:

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up(X(A))$ tal que $\varphi(a) = \{x \in X(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

  $\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A} \rangle$ es un $H_0^{\vee}$-espacio.

- Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio.
  Consideremos:
  - $D(X)$: conjunto de los complementos de básicos.

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

$$\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle \text{ es un } H_0^{\vee}\text{-espacio.}$$

- Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio.
  Consideremos:
  - $D(X)$: conjunto de los complementos de básicos.
  - $U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V = (U \cap V^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$, para todo $U, V \in D(X)$.

Antecedentes

- Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra:
  Consideremos:
  - $X(A)$: el conjunto de los filtros primos.
  - $\varphi : A \to Up\,(X\,(A))$ tal que $\varphi\,(a) = \{x \in X\,(A) \mid a \in x\}$
  - $\mathcal{K}_A = \{\varphi(a)^c : a \in A\}$

  $$\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}\rangle \text{ es un } H_0^{\vee}\text{-espacio.}$$

- Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio.
  Consideremos:
  - $D(X)$: conjunto de los complementos de básicos.
  - $U \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}} V = (U \cap V^c]^c_{\leq_{\mathcal{K}}}$, para todo $U, V \in D(X)$.

  $$\langle D(X), \Rightarrow_{\leq_{\mathcal{K}}}, \cup, \emptyset, X\rangle \text{ es un } H_0^{\vee}\text{-álgebra.}$$

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1$, $h(0) = 0$,
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$,

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios.
$R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-**relación irreducible** si

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios.
$R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-**relación irreducible** si

1. $R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para $U \in \mathcal{K}_2$,

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios.
$R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-**relación irreducible** si

1. $R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para $U \in \mathcal{K}_2$,
2. $R(x)$ es un subconjunto cerrado irreducible de X_2, para $x \in X_1$, cuando $R(x) \neq \emptyset$

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{HH}^{\vee}$

Un $\vee$-semi-homomorfismo se llama

$\vee$-**homomorfismo**
si $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios.
$R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-**relación irreducible** si

1. $R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para $U \in \mathcal{K}_2$,
2. $R(x)$ es un subconjunto cerrado irreducible de X_2, para $x \in X_1$, cuando $R(x) \neq \emptyset$

Antecedentes

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{HH}^{\vee}$

Un $\vee$-semi-homomorfismo se llama

$\vee$-**homomorfismo**
si $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios.
$R \subseteq X_1 \times X_2$ es una H-**relación irreducible** si

1. $R^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$, para $U \in \mathcal{K}_2$,
2. $R(x)$ es un subconjunto cerrado irreducible de X_2, para $x \in X_1$, cuando $R(x) \neq \emptyset$

$\mathcal{SR}^{\vee}$

Una H-relación irreducible R es una

H-**relación funcional irreducible**

si $(x, y) \in R$ implica $\exists z \in X_1 : x \leq z$ y $R(z) = [y)$.

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0$,
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b)$,
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$.

Mejorado

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathbf{H}^{\vee}\mathbf{Spaces}^{sm}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios. Una función de preserva el orden $f : X_1 \to X_2$ es

mapeo espectral

si $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$ para todo $U \in \mathcal{K}_2$.

Mejorado

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{HH}^{\vee}$

Un $\vee$-semi-homomorfismo se llama

$\vee$-**homomorfismo**
si $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$

$\mathbf{H}^{\vee}\mathbf{Spaces}^{sm}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios. Una función de preserva el orden $f : X_1 \to X_2$ es

mapeo espectral

si $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$ para todo $U \in \mathcal{K}_2$.

Mejorado

$\mathcal{HS}^{\vee}$

Sean $A, B \in H_0^{\vee}$-álgebras. $h : A \to B$ es un

$\vee$-**semi-homomorfismo** si

1. $h(1) = 1,\ h(0) = 0,$
2. $h(a \to b) \leq h(a) \to h(b),$
3. $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b).$

$\mathcal{HH}^{\vee}$

Un $\vee$-semi-homomorfismo se llama

$\vee$-**homomorfismo**
si $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$

$\mathbf{H}^{\vee}\mathbf{Spaces}^{sm}$

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ $H_0^{\vee}$-espacios. Una función de preserva el orden $f : X_1 \to X_2$ es

mapeo espectral

si $f^{-1}(U) \in \mathcal{K}_1$ para todo $U \in \mathcal{K}_2$.

$\mathbf{H}^{\vee}\mathbf{Spaces}^{pm}$

Un mapeo espectral f es un

p-morfismo

si $[f(x)) = f([x))$, para todo $x \in X_1$.

Mejorado

- Si $A, B \in \mathrm{Hil}_0^{\vee}$ y $h : A \to B$ a $\vee$-semi-homomorfismo. $h_* : X(B) \to X(A)$ tal que

$$h_*(x) = h^{-1}(x)$$

es un mapeo espectral.

Mejorado

- Si $A, B \in \mathrm{Hil}_0^{\vee}$ y $h : A \to B$ a $\vee$-semi-homomorfismo. $h_* : X(B) \to X(A)$ tal que

$$h_*(x) = h^{-1}(x)$$

  es un mapeo espectral.

- Si $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1} \rangle$, $\langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2} \rangle$ son $H^{\vee}$-espacios y $f : X_1 \to X_2$ es un mapeo espectral. Entonces, $f^* : D(X_2) \to D(X_1)$ definido por

$$f^*(U) = f^{-1}(U)$$

  es un $\vee$-semi-homomorfismo.

Motivación

Álgebras de Hilbert

Motivación

Álgebras de Hilbert $\longrightarrow$ $\{\to, 1\}$-fragmento del **CPI**

Álgebras de Hilbert $\longrightarrow$ $\{\to, 1\}$-fragmento del **CPI**

CPC

Motivación

Álgebras de Hilbert	$\longrightarrow$	$\{\rightarrow, 1\}$-fragmento del **CPI**
CPC	$\longrightarrow$	Lógica Modal **K**

Motivación

Álgebras de Hilbert $\longrightarrow$ $\{\to, 1\}$-fragmento del **CPI**

CPC $\longrightarrow$ Lógica Modal **K**

$\downarrow$

$\Diamond p = \neg \Box \neg p$

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Álgebras de Hilbert Modales

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

Álgebras de Hilbert Modales

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

- *Sea A un álgebra de Hilbert. Un* **operador necesidad** *es una función* $\Box : A \to A$ *tal que:*

  ($\Box$1) $\Box 1 = 1$,

  ($\Box$2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

Álgebras de Hilbert Modales

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

- *Sea A un álgebra de Hilbert. Un* **operador necesidad** *es una función* $\Box : A \to A$ *tal que:*

  ($\Box$1) $\Box 1 = 1$,

  ($\Box$2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

  - $\mathrm{Hil}_{\Box}$*-álgebra:* $\langle A, \Box \rangle$ *donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un operador necesidad definido sobre A.*

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator $\Diamond$.** Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

- *Sea A un álgebra de Hilbert. Un* **operador necesidad** *es una función $\Box : A \to A$ tal que:*
  ($\Box$1) $\Box 1 = 1$,
  ($\Box$2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.
  - $\mathrm{Hil}_{\Box}$*-álgebra: $\langle A, \Box \rangle$ donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un operador necesidad definido sobre A.*
- *Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra. Un* **operador posibilidad** *es una función $\Diamond : A \to A$ tal que:*
  ($\Diamond$1) $\Diamond 0 = 0$,
  ($\Diamond$2) $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

Álgebras de Hilbert Modales

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

- *Sea A un álgebra de Hilbert. Un* **operador necesidad** *es una función $\Box : A \to A$ tal que:*

  ($\Box$1) $\Box 1 = 1$,

  ($\Box$2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

  - $\mathrm{Hil}_{\Box}$*-álgebra: $\langle A, \Box\rangle$ donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un operador necesidad definido sobre A.*

- *Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra. Un* **operador posibilidad** *es una función $\Diamond : A \to A$ tal que:*

  ($\Diamond$1) $\Diamond 0 = 0$,

  ($\Diamond$2) $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

  - $\mathrm{Hil}_{\Diamond}$*-álgebra: $\langle A, \Diamond\rangle$ donde A es un $H_0^{\vee}$-álgebra y $\Diamond$ es un operador posibilidad definido sobre A.*

Álgebras de Hilbert Modales

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a necessity modal operator.** Reports on Mathematical Logic, 49, (2014), pp. 47-77.

S. A. Celani and D.Montangie, **Hilbert Algebras with a modal operator** $\Diamond$. Studia Logica Vol. 103, Issue 3 (2015), pp. 639-662.

Definición

- *Sea A un álgebra de Hilbert. Un* **operador necesidad** *es una función $\Box : A \to A$ tal que:*

  ($\Box$1) $\Box 1 = 1$,

  ($\Box$2) $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$.

  - $\mathrm{Hil}_{\Box}$*-álgebra: $\langle A, \Box \rangle$ donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un operador necesidad definido sobre A.*

- *Sea A un $H_0^{\vee}$-álgebra. Un* **operador posibilidad** *es una función $\Diamond : A \to A$ tal que:*

  ($\Diamond$1) $\Diamond 0 = 0$,

  ($\Diamond$2) $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$.

  - $\mathrm{Hil}_{\Diamond}$*-álgebra: $\langle A, \Diamond \rangle$ donde A es un $H_0^{\vee}$-álgebra y $\Diamond$ es un operador posibilidad definido sobre A.*

Definición

Sea A una $H_0^{\vee}$-álgebra. $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ es una $\mathrm{Hil}_{\Box\Diamond}$-álgebra si $\langle A, \Box \rangle$ es una $\mathrm{Hil}_{\Box}$-álgebra y $\langle A, \Diamond \rangle$ es una $\mathrm{Hil}_{\Diamond}$-álgebra

Definición

Un $\mathrm{Hil}_{\Box\Diamond}$*-álgebra* $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ *es un* **álgebra modal de Hilbert Ficher-Servi,** *o* $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$**-álgebra**, *si se satisface:*

(M1) $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$,

(M2) $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$.

Definición

Un $\mathrm{Hil}_{\Box\Diamond}$*-álgebra* $\langle A, \Box, \Diamond\rangle$ *es un* **álgebra modal de Hilbert Ficher-Servi,** *o* $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$**-álgebra**, *si se satisface:*

(M1) $\Box(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$,

(M2) $\Diamond a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$.

(M1) $\Leftrightarrow \Diamond(a \to b) \leq \Box a \to \Diamond b$

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle, \langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebras.*

Álgebras de Hilbert Ficher Servi

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$, $\langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebras.*

- *Un* $\vee$*-semi-homomorfismo* $h : A \to B$ *es un* $\Box\Diamond$-**semi-homomorfismo**, *si para* $a \in A$*:*

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle, \langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-*álgebras.*

- *Un* $\vee$-*semi-homomorfismo* $h : A \to B$ *es un* $\Box\Diamond$-**semi-homomorfismo**, *si para* $a \in A$:
  1. $h(\Box a) = \Box h(a)$,
  2. $h(\Diamond a) = \Diamond h(a)$.

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle, \langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebras.*

- *Un* $\vee$*-semi-homomorfismo* $h : A \to B$ *es un* $\Box\Diamond$**-semi-homomorfismo**, *si para* $a \in A$*:*
  1. $h(\Box a) = \Box h(a)$,
  2. $h(\Diamond a) = \Diamond h(a)$.
- *Un* $\Box\Diamond$*-semi-homomorfismo es un* $\Box\Diamond$**-homomorfismo** *si* $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$, *para* $a, b \in A$.

Álgebras de Hilbert Ficher Servi

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle, \langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebras.*

- *Un* $\vee$*-semi-homomorfismo* $h : A \to B$ *es un* $\Box\Diamond$**-semi-homomorfismo**, *si para* $a \in A$:
  1. $h(\Box a) = \Box h(a)$,
  2. $h(\Diamond a) = \Diamond h(a)$.
- *Un* $\Box\Diamond$*-semi-homomorfismo es un* $\Box\Diamond$**-homomorfismo** *si* $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$, *para* $a, b \in A$.

Categoría

FSSemHil

$\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebras

$\Box\Diamond$-semi-homomorfismos

Definición

Sean $\langle A, \Box, \Diamond \rangle, \langle B, \Box, \Diamond \rangle$ $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebras.*

- *Un* $\vee$*-semi-homomorfismo* $h : A \to B$ *es un* $\Box\Diamond$**-semi-homomorfismo**, *si para* $a \in A$*:*
  1. $h(\Box a) = \Box h(a)$,
  2. $h(\Diamond a) = \Diamond h(a)$.
- *Un* $\Box\Diamond$*-semi-homomorfismo es un* $\Box\Diamond$**-homomorfismo** *si* $h(a) \to h(b) \leq h(a \to b)$*, para* $a, b \in A$*.*

Categoría

FSHomHil

$\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebras

$\Box\Diamond$-homomorfismos

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(*FSHil-**espacio***) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R \rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(FSHil-***espacio***) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R \rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

(FS1) $R = (\leq \circ R) \cap (R \circ \leq^{-1})$,

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(*FSHil-**espacio***) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R \rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

(FS1) $R = (\leq \circ R) \cap (R \circ \leq^{-1})$,

(FS2) $\Box_{\leq \circ R}(U), \Diamond_R(U) \in D(X)$, *para* $U \in D(X)$,

FSHil-espacios

Sea $\langle X, \mathcal{K} \rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(*FSHil-**espacio***) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R \rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

(FS1) $R = (\leq \circ R) \cap (R \circ \leq^{-1})$,

(FS2) $\Box_{\leq \circ R}(U), \Diamond_R(U) \in D(X)$, *para* $U \in D(X)$,

(FS3) $(\leq \circ R)(x)$ *es un cerrado* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle$, *para* $x \in X$, Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(FSHil-**espacio**) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R\rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

(FS1) $R = (\leq \circ R) \cap (R \circ \leq^{-1})$,

(FS2) $\Box_{\leq \circ R}(U), \Diamond_R(U) \in D(X)$, *para* $U \in D(X)$,

(FS3) $(\leq \circ R)(x)$ *es un cerrado* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, *para* $x \in X$,

(FS4) $(R \circ \leq^{-1})(x)$ *es un saturado básico para* $x \in X$, Sea $\langle X, \mathcal{K}\rangle$ un $H_0^{\vee}$-espacio, $R \subseteq X \times X$ y $U \in D(X)$. Consideremos:

$$\Box_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}$$

$$\Diamond_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

Definición

Un **espacio de Hilbert Fischer-Servi** *(*FSHil-**espacio***) es* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R\rangle$ *donde* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$ *es un* $H_0^{\vee}$*-espacio, y* $R \subseteq X \times X$*:*

(FS1) $R = (\leq \circ R) \cap (R \circ \leq^{-1})$,

(FS2) $\Box_{\leq \circ R}(U)$,$\Diamond_R(U) \in D(X)$, *para* $U \in D(X)$,

(FS3) $(\leq \circ R)(x)$ *es un cerrado* $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}\rangle$, *para* $x \in X$,

(FS4) $(R \circ \leq^{-1})(x)$ *es un saturado básico para* $x \in X$,

(FS5) $(\leq \circ R \circ \leq) \subseteq (\leq \circ R)$.

Representación Topológica

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ un $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra.

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ un $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra.

- Definimos en $X(A)$:

$$(x, y) \in R_A \Longleftrightarrow \Box^{-1}(x) \subseteq y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$$

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ un $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra.

- Definimos en $X(A)$:

$$(x, y) \in R_A \Longleftrightarrow \Box^{-1}(x) \subseteq y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$$

Proposición

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ *un* $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebra. Entonces,* $\left\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, R_A \right\rangle$ *es un* FSHil*-espacio.*

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ un $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra.

- Definimos en $X(A)$:

$$(x, y) \in R_A \iff \Box^{-1}(x) \subseteq y \subseteq \Diamond^{-1}(x)$$

Proposición

Sea $\langle A, \Box, \Diamond \rangle$ *un* $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebra. Entonces,* $\left\langle X(A), \mathcal{T}_{\mathcal{K}_A}, R_A \right\rangle$ *es un* FSHil*-espacio.*

Proposición

Sea $\langle X, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}, R \rangle$ *un* FSHil*-espacio. Entonces,* $\left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R \right\rangle$ *es un* $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$*-álgebra.*

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$-**mapeo** *si:*

Dualidad Topológica

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$-**mapeo** *si:*
  (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,

Dualidad Topológica

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil*-espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-mapeo** *si:*
  (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,
  (2) *Si* $(f(x), y) \in (\leq \circ R_2)$, *existe* $z \in (\leq \circ R_1)(x)$ *tal que* $f(z) \leq y$,

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-mapeo** *si:*
  - (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,
  - (2) *Si* $(f(x), y) \in (\leq \circ R_2)$, *existe* $z \in (\leq \circ R_1)(x)$ *tal que* $f(z) \leq y$,
  - (3) *si* $(f(x), y) \in R_2$, *existe* $z \in R_1(x)$ *tal que* $y \leq f(z)$.

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$-**mapeo** *si:*
  (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,
  (2) *Si* $(f(x), y) \in (\leq \circ R_2)$, *existe* $z \in (\leq \circ R_1)(x)$ *tal que* $f(z) \leq y$,
  (3) *si* $(f(x), y) \in R_2$, *existe* $z \in R_1(x)$ *tal que* $y \leq f(z)$.
- *Si* f *es un p-morfismo de Hilbert que satisface* (1), (2) *y* (3), f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$-**morfismo.**

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1\rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2\rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-mapeo** *si:*
  - (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,
  - (2) *Si* $(f(x), y) \in (\leq \circ R_2)$, *existe* $z \in (\leq \circ R_1)(x)$ *tal que* $f(z) \leq y$,
  - (3) *si* $(f(x), y) \in R_2$, *existe* $z \in R_1(x)$ *tal que* $y \leq f(z)$.
- *Si* f *es un p-morfismo de Hilbert que satisface* (1), (2) *y* (3), f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-morfismo.**

Categoría

FSSemHilSpaces

FSHil-espacios

$FS_{\Box\Diamond}$-mapeos

Definición

Sean $\langle X_1, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_1}, R_1 \rangle, \langle X_2, \mathcal{T}_{\mathcal{K}_2}, R_2 \rangle$ *dos* FSHil-*espacios*

- *Sea* $f : X_1 \to X_2$ *un mapeo espectral,* f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-mapeo** *si:*
  (1) $(x, y) \in R_1$ *implica* $(f(x), f(y)) \in R_2$,
  (2) *Si* $(f(x), y) \in (\leq \circ R_2)$, *existe* $z \in (\leq \circ R_1)(x)$ *tal que* $f(z) \leq y$,
  (3) *si* $(f(x), y) \in R_2$, *existe* $z \in R_1(x)$ *tal que* $y \leq f(z)$.
- *Si* f *es un p-morfismo de Hilbert que satisface* (1), (2) *y* (3), f *es un* $FS_{\Box\Diamond}$**-morfismo.**

Categoría

FDHomHilSpaces

$$\begin{cases} \text{FSHil-espacios} \\ FS_{\Box\Diamond}\text{-morfismos.} \end{cases}$$

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\rightarrow$ **FSSemHil** definido por

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\rightarrow$ **FSSemHil** definido por $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \big\langle D(X), \Box_{\leq\circ R}, \Diamond_R, \big\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**
  si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A\rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A \rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond \rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  si h es un $\Box\Diamond$-semi-homomorfismo

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A\rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  $\mathbb{X}(h) = h^{-1}$, si h es un $\Box\Diamond$-semi-homomorfismo

- $\mathbb{D}$: **FSSemiHilSpaces** $\to$ **FSSemHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \left\langle D(X), \Box_{\leq \circ R}, \Diamond_R, \right\rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-mapeo.

- $\mathbb{X}$: **FSSemHil** $\to$ **FSSemiHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A \rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond \rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  $\mathbb{X}(h) = h^{-1}$, si h es un $\Box\Diamond$-semi-homomorfismo

Teorema

Las categorías **FSSemHil** *y* **FSSemiHilSpaces** *son dualmente esquivalentes.*

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\rightarrow$ **FSHomHil** definido por

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\rightarrow$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\rightarrow$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,
  si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\rightarrow$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\to$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{X}$: **FSHomHil** $\to$ **FSHomHilSpaces**

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\to$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{X}$: **FSHomHil** $\to$ **FSHomHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A\rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\rightarrow$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{X}$: **FSHomHil** $\rightarrow$ **FSHomHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A\rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  si h es un $\Box\Diamond$-homomorfismo

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\to$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R \rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{X}$: **FSHomHil** $\to$ **FSHomHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A \rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond \rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  $\mathbb{X}(h) = h^{-1}$, si h es un $\Box\Diamond$-homomorfismo

- $\mathbb{D}$: **FSHomHilSpaces** $\to$ **FSHomHil** definido por
  $\mathbb{D}(\mathbf{X}) = \langle D(X), \Box_R, \Diamond_R, \rangle$ si $\mathbf{X} = \langle X, \mathcal{K}, R\rangle$ es un FSHil-espacio,
  $\mathbb{D}(f) = f^{-1}$ si f es una $FS_{\Box\Diamond}$-morfismo.

- $\mathbb{X}$: **FSHomHil** $\to$ **FSHomHilSpaces**
  $\mathbb{X}(\boldsymbol{A}) = \langle X(A), \mathcal{K}_A, R_A\rangle$, si $\boldsymbol{A} = \langle A, \Box, \Diamond\rangle$ es una $\mathrm{FSMHil}_{\Box\Diamond}$-álgebra,
  $\mathbb{X}(h) = h^{-1}$, si h es un $\Box\Diamond$-homomorfismo

Teorema

Las categorías **FSHomHil** *y* **FSHomHilSpaces** *son dualmente esquivalentes.*

Trabajo futuro

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

Trabajo futuro

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

$$\Box \longrightarrow \Diamond$$

$$\blacksquare \longrightarrow \blacklozenge$$

Trabajo futuro

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

$$\Box \longrightarrow \Diamond$$

$$\blacksquare \longrightarrow \blacklozenge$$

$$\Diamond a \leq b \Leftrightarrow a \leq \Box b$$

$$\blacklozenge a \leq b \Leftrightarrow a \leq \blacksquare b$$

Trabajo futuro

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

$$\begin{tikzcd} \Box \arrow[dr] & \Diamond \\ \blacksquare \arrow[ur] & \blacklozenge \end{tikzcd}$$

Trabajo futuro

Hil2GC-álgebras: $\langle A, \vee, \rightarrow, 0, 1, \Box, \Diamond, \blacksquare, \blacklozenge \rangle$ donde

$$
\begin{tikzcd}
\Box \arrow[drr] & & \Diamond \\
\blacksquare \arrow[urr] & & \blacklozenge
\end{tikzcd}
$$

(M1) $\Box(a \to b) \leq \blacklozenge a \to \blacklozenge b$,

(M2) $\blacklozenge a \to \Box b \leq \Box(a \to b)$.

(M1) $\blacksquare(a \to b) \leq \Diamond a \to \Diamond b$,

(M2) $\Diamond a \to \blacksquare b \leq \blacksquare(a \to b)$.

Muchas gracias por su atención!!!