Sobre el grupo de estructura de una JB-álgebra

José Alejandro Luna

Trabajo realizado en conjunto con el Dr. Gabriel Larotonda

Instituto Argentino de Matemática (IAM)

Álgebras de Jordan

Definición

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto $\circ$. Decimos que es un *álgebra de Jordan* si $\circ$ es conmutativo y además para todo x, y en V

$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y).$$

Supondremos que las álgebras tienen unidad 1. Notaremos L_x al operador multiplicación.

Álgebras de Jordan

Definición

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto $\circ$. Decimos que es un *álgebra de Jordan* si $\circ$ es conmutativo y además para todo x, y en V

$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y).$$

Supondremos que las álgebras tienen unidad 1. Notaremos L_x al operador multiplicación.

Álgebras de Jordan

Definición

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto $\circ$. Decimos que es un *álgebra de Jordan* si $\circ$ es conmutativo y además para todo x, y en V

$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y).$$

Supondremos que las álgebras tienen unidad 1. Notaremos L_x al operador multiplicación.

Álgebras de Jordan

Las álgebras de Jordan no son asociativas, pero

Proposición

Un álgebra de Jordan V es asociativa por potencias: $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. El álgebra generada por x es asociativa.

Definición

Decimos que x pertenece al centro de V si $[L_x, L_y] = 0$ para todo y.

Álgebras de Jordan

Las álgebras de Jordan no son asociativas, pero

Proposición

Un álgebra de Jordan V es asociativa por potencias: $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. El álgebra generada por x es asociativa.

Definición

Decimos que x pertenece al centro de V si $[L_x, L_y] = 0$ para todo y.

Álgebras de Jordan

Las álgebras de Jordan no son asociativas, pero

Proposición

Un álgebra de Jordan V es asociativa por potencias: $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. El álgebra generada por x es asociativa.

Definición

Decimos que x pertenece al centro de V si $[L_x, L_y] = 0$ para todo y.

Álgebras de Jordan

Las álgebras de Jordan no son asociativas, pero

Proposición

Un álgebra de Jordan V es asociativa por potencias: $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. El álgebra generada por x es asociativa.

Definición

Decimos que x pertenece al centro de V si $[L_x, L_y] = 0$ para todo y.

Álgebras de Jordan

Producto de Jordan

V álgebra asociativa, definimos

$$x \circ y = \frac{xy + yx}{2}$$

llamado el *producto de Jordan*. $(\mathrm{V}, \circ)$ es un álgebra de Jordan.

Decimos que un álgebra es *especial* si es isomorfa a una subálgebra de Jordan de algún álgebra cuyo producto surge de un producto asociativo. En otro caso, decimos que es *excepcional*.

Álgebras de Jordan

Producto de Jordan

V álgebra asociativa, definimos

$$x \circ y = \frac{xy + yx}{2}$$

llamado el *producto de Jordan*. $(V, \circ)$ es un álgebra de Jordan.

Decimos que un álgebra es *especial* si es isomorfa a una subálgebra de Jordan de algún álgebra cuyo producto surge de un producto asociativo. En otro caso, decimos que es *excepcional*.

Álgebras de Jordan

Definición

Dado x en V, definimos

$$\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}.$$

Definimos su linealización

$$\mathrm{U}_{x,y} = \frac{1}{2} D_y \, \mathrm{U}_x = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{x+y} - \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_y) = L_x L_y + L_y L_x - L_{x \circ y}.$$

En álgebras especiales

$$\mathrm{U}_x \, y = xyx \qquad \mathrm{U}_{x,z} \, y = xyz + zyx.$$

Fórmula fundamental

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x y} = \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_y \, \mathrm{U}_x .$$

Álgebras de Jordan

Definición

Dado x en V, definimos

$$\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}.$$

Definimos su linealización

$$\mathrm{U}_{x,y} = \frac{1}{2} D_y \mathrm{U}_x = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{x+y} - \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_y) = L_x L_y + L_y L_x - L_{x \circ y}.$$

En álgebras especiales

$$\mathrm{U}_x\, y = xyx \qquad \mathrm{U}_{x,z}\, y = xyz + zyx.$$

Fórmula fundamental

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x y} = \mathrm{U}_x \mathrm{U}_y \mathrm{U}_x .$$

Álgebras de Jordan

Definición

Dado x en V, definimos

$$\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}.$$

Definimos su linealización

$$\mathrm{U}_{x,y} = \frac{1}{2} D_y \, \mathrm{U}_x = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{x+y} - \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_y) = L_x L_y + L_y L_x - L_{x \circ y}.$$

En álgebras especiales

$$\mathrm{U}_x \, y = xyx \quad \mathrm{U}_{x,z} \, y = xyz + zyx.$$

Fórmula fundamental

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x y} = \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_y \, \mathrm{U}_x \, .$$

Álgebras de Jordan

Definición

Dado x en V, definimos

$$\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}.$$

Definimos su linealización

$$\mathrm{U}_{x,y} = \frac{1}{2} D_y \, \mathrm{U}_x = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{x+y} - \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_y) = L_x L_y + L_y L_x - L_{x\circ y}.$$

En álgebras especiales

$$\mathrm{U}_x \, y = xyx \qquad \mathrm{U}_{x,z} \, y = xyz + zyx.$$

Fórmula fundamental

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x y} = \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_y \, \mathrm{U}_x \, .$$

Álgebras de Jordan

Definición

Un elemento x en V es inversible si existe y tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$, $\mathrm{U}_x\, y^2 = 1$.

Inversibilidad de x no es equivalente a inversibilidad de L_x. Pero tenemos:

Proposición

Si L_x es inversible, entonces x es inversible.

En álgebras especiales la inversibilidad es la misma que con el producto original.

Proposición

x es inversible si y solo si U_x es inversible.

Definición

Un elemento x en V es inversible si existe y tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$, $\mathrm{U}_x\, y^2 = 1$.

Inversibilidad de x no es equivalente a inversibilidad de L_x. Pero tenemos:

Proposición

Si L_x es inversible, entonces x es inversible.

En álgebras especiales la inversibilidad es la misma que con el producto original.

Proposición

x es inversible si y solo si U_x es inversible.

Álgebras de Jordan

Definición

Un elemento x en V es inversible si existe y tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$, $\mathrm{U}_x\, y^2 = 1$.

Inversibilidad de x no es equivalente a inversibilidad de L_x. Pero tenemos:

Proposición

Si L_x es inversible, entonces x es inversible.

En álgebras especiales la inversibilidad es la misma que con el producto original.

Proposición

x es inversible si y solo si U_x es inversible.

Álgebras de Jordan

Definición

Un elemento x en V es inversible si existe y tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$, $\mathrm{U}_x\, y^2 = 1$.

Inversibilidad de x no es equivalente a inversibilidad de L_x. Pero tenemos:

Proposición

Si L_x es inversible, entonces x es inversible.

En álgebras especiales la inversibilidad es la misma que con el producto original.

Proposición

x es inversible si y solo si U_x es inversible.

Álgebras de Jordan

Definición

Un elemento x en V es inversible si existe y tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$, $\mathrm{U}_x\, y^2 = 1$.

Inversibilidad de x no es equivalente a inversibilidad de L_x. Pero tenemos:

Proposición

Si L_x es inversible, entonces x es inversible.

En álgebras especiales la inversibilidad es la misma que con el producto original.

Proposición

x es inversible si y solo si U_x es inversible.

Álgebras de Jordan

Descomposición de Pierce

Sea e idempotente en V y $e' = 1 - e$. Definimos los *operadores de Pierce* $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathrm{V}_i = E_i(\mathrm{V})$,

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \,.$$

Esta es la *descomposición de Pierce* de V en sus *subespacios de Pierce*.

Proposición

V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

Álgebras de Jordan

Descomposición de Pierce

Sea e idempotente en V y $e' = 1 - e$. Definimos los *operadores de Pierce* $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$.

Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathrm{V}_i = E_i(\mathrm{V})$,

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2 \,.$$

Esta es la *descomposición de Pierce* de V en sus *subespacios de Pierce*.

Proposición

V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

Álgebras de Jordan

Descomposición de Pierce

Sea e idempotente en V y $e' = 1 - e$. Definimos los *operadores de Pierce* $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathsf{V}_i = E_i(\mathsf{V})$,

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2 \,.$$

Esta es la *descomposición de Pierce* de V en sus *subespacios de Pierce*.

Proposición

V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

Álgebras de Jordan

Descomposición de Pierce

Sea e idempotente en V y $e' = 1 - e$. Definimos los *operadores de Pierce* $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathrm{V}_i = E_i(\mathrm{V})$,

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2\,.$$

Esta es la *descomposición de Pierce* de V en sus *subespacios de Pierce*.

Proposición

V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

Álgebras de Jordan

Descomposición de Pierce

Sea e idempotente en V y $e' = 1 - e$. Definimos los *operadores de Pierce* $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathsf{V}_i = E_i(\mathsf{V})$,

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2 \,.$$

Esta es la *descomposición de Pierce* de V en sus *subespacios de Pierce*.

Proposición

V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

JB-álgebras

Definición

Decimos que un álgebra de Jordan V con norma $\|\cdot\|$ es una *JB-álgebra* si es un espacio de Banach y

$$\|x \circ y\| \leq \|x\|\|y\| \quad ; \quad \|x^2\| = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad \|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|.$$

Definición

Definimos el *espectro* de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : x - \lambda 1 \text{ es inversible}\}.$$

Decimos que x es positivo si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Notamos al cono de positivos como Ω.

JB-álgebras

Definición

Decimos que un álgebra de Jordan V con norma $\|\cdot\|$ es una *JB-álgebra* si es un espacio de Banach y

$$\|x \circ y\| \leq \|x\|\|y\| \quad ; \quad \|x^2\| = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad \|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|.$$

Definición

Definimos el *espectro* de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : x - \lambda 1 \text{ es inversible}\}.$$

Decimos que x es positivo si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Notamos al cono de positivos como Ω.

JB-álgebras

Definición

Decimos que un álgebra de Jordan V con norma $\|\cdot\|$ es una *JB-álgebra* si es un espacio de Banach y

$$\|x \circ y\| \leq \|x\|\|y\| \quad ; \quad \|x^2\| = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad \|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|.$$

Definición

Definimos el *espectro* de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} : x - \lambda 1 \text{ es inversible}\}.$$

Decimos que x es positivo si $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Notamos al cono de positivos como Ω.

JB-álgebras

Definición

Llamamos $C(x)$ a la subálgebra cerrada mas pequeña que contiene a x.

Teorema

$C(x)$ es isométricamente isomorfo a $C(\sigma(x))$.

Esto nos dice que podemos hacer cálculo funcional en JB-álgebras: dado x en V y f función continua en el espectro de x, entonces $f(x)$ es un elemento bien definido en $C(x) \subset$ V y $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

JB-álgebras

Definición

Llamamos $C(x)$ a la subálgebra cerrada mas pequeña que contiene a x.

Teorema

$C(x)$ es isométricamente isomorfo a $C(\sigma(x))$.

Esto nos dice que podemos hacer cálculo funcional en JB-álgebras: dado x en V y f función continua en el espectro de x, entonces $f(x)$ es un elemento bien definido en $C(x) \subset$ V y $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

JB-álgebras

Definición

Llamamos $C(x)$ a la subálgebra cerrada mas pequeña que contiene a x.

Teorema

$C(x)$ es isométricamente isomorfo a $C(\sigma(x))$.

Esto nos dice que podemos hacer cálculo funcional en JB-álgebras: dado x en V y f función continua en el espectro de x, entonces $f(x)$ es un elemento bien definido en $C(x) \subset \mathrm{V}$ y $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

JB-álgebras

Observación

El cálculo funcional nos dice que

$$\Omega = \{x^2 : x \in V \text{ inversible}\};$$

y que

$$\Omega = \{e^v : v \in V\}.$$

Observación

Dado x positivo existe único y positivo con $y^2 = x$. Lo notamos $y = x^{1/2}$.

JB-álgebras

Observación

El cálculo funcional nos dice que

$$\Omega = \{x^2 : x \in \mathrm{V} \text{ inversible}\};$$

y que

$$\Omega = \{e^v : v \in \mathrm{V}\}.$$

Observación

Dado x positivo existe único y positivo con $y^2 = x$. Lo notamos $y = x^{1/2}$.

Observación

El cálculo funcional nos dice que

$$\Omega = \{x^2 : x \in \mathrm{V} \ \text{ inversible}\};$$

y que

$$\Omega = \{e^v : v \in \mathrm{V}\}.$$

Observación

Dado x positivo existe único y positivo con $y^2 = x$. Lo notamos $y = x^{1/2}$.

Observación

El cálculo funcional nos dice que

$$\Omega = \{x^2 : x \in \mathrm{V} \text{ inversible}\};$$

y que

$$\Omega = \{e^v : v \in \mathrm{V}\}.$$

Observación

Dado x positivo existe único y positivo con $y^2 = x$. Lo notamos $y = x^{1/2}$.

Espectro del operador cuadrático

Observación

Sabemos que si L_x es inversible entonces x es inversible. Entoces $\sigma(x) \subset \sigma(L_x)$, pero sabemos que la inversa no es cierta.

Proposición

$co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular, L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Espectro del operador cuadrático

Observación

Sabemos que si L_x es inversible entonces x es inversible. Entoces $\sigma(x) \subset \sigma(L_x)$, pero sabemos que la inversa no es cierta.

Proposición

$co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular, L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Espectro del operador cuadrático

Observación

Sabemos que si L_x es inversible entonces x es inversible. Entoces $\sigma(x) \subset \sigma(L_x)$, pero sabemos que la inversa no es cierta.

Proposición

$co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular, L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Espectro del operador cuadrático

Observación

Sabemos que si L_x es inversible entonces x es inversible. Entoces $\sigma(x) \subset \sigma(L_x)$, pero sabemos que la inversa no es cierta.

Proposición

$co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular, L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Espectro del operador cuadrático

Lema

Para todo v en V
$$e^{2L_v} = \mathrm{U}_{e^v}$$

Corolario

Si x es positivo, entonces U_x es un operador positivo.

Espectro del operador cuadrático

Lema

Para todo v en V

$$e^{2L_v} = \mathrm{U}_{e^v}$$

Corolario

Si x es positivo, entonces U_x es un operador positivo.

Espectro del operador cuadrático

Definición

Una proyección central es un idempotente $p = p^2$ que pertenece al centro de V; una simetría central es una simetría $\varepsilon^2 = 1$ que pertenece al centro de V. p proyección central, entonces $\varepsilon_p = 2p - 1$ es una simetría central.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

El operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y ε una simetría central tales que $x = \varepsilon v$.

Espectro del operador cuadrático

Definición

Una proyección central es un idempotente $p = p^2$ que pertenece al centro de V; una simetría central es una simetría $\varepsilon^2 = 1$ que pertenece al centro de V. p proyección central, entonces $\varepsilon_p = 2p - 1$ es una simetría central.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

El operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y ε una simetría central tales que $x = \varepsilon v$.

Espectro del operador cuadrático

Definición

Una proyección central es un idempotente $p = p^2$ que pertenece al centro de V; una simetría central es una simetría $\varepsilon^2 = 1$ que pertenece al centro de V. p proyección central, entonces $\varepsilon_p = 2p - 1$ es una simetría central.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

El operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y ε una simetría central tales que $x = \varepsilon v$.

Espectro del operador cuadrático

Definición

Una proyección central es un idempotente $p = p^2$ que pertenece al centro de V; una simetría central es una simetría $\varepsilon^2 = 1$ que pertenece al centro de V. p proyección central, entonces $\varepsilon_p = 2p - 1$ es una simetría central.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

El operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y ε una simetría central tales que $x = \varepsilon v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_+ \oplus \mathrm{V}_- \oplus \mathrm{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathrm{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathrm{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathrm{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathrm{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathrm{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_+ \oplus \mathrm{V}_- \oplus \mathrm{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathrm{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathrm{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+x$, $x_- = p_-x$.

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathsf{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathsf{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+}v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathsf{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathsf{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_+ \oplus \mathrm{V}_- \oplus \mathrm{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathrm{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+, p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathrm{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathrm{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathsf{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathsf{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Espectro del operador cuadrático

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathsf{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathsf{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

Demostración: $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x) = 1 - p_+$; $\chi_\pm$ característica de $\mathbb{R}_\pm$; $x_+ = p_+ x$, $x_- = p_- x$.

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$$

gracias a la descomposición de Pierce para p_+; $\mathsf{V}_\pm$ rango de $\mathrm{U}_{p_\pm}$ y V_0 rango de $2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}$. V_i invariantes para U_x por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x\,|_{\mathsf{V}_0}).$$

El espectro de U_x en $\mathsf{V}_\pm$ es positivo. V_0 es trivial. V_0 trivial es equivalente a p_+ central. $x = \varepsilon_{p_+}(x_+ + x_-) = \varepsilon_{p_+} v$.

El grupo de estructura

Definición

Sea V álgebra de Jordan. Definimos el *grupo de estructura* $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ como el conjunto de g inversibles tal que

$$\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*$$

para alguna g^* inversible.

Observación

El grupo de estructura es un grupo y $*$ es cerrada en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$. Mas aun, $(g^*)^* = g$, por lo que $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ es un grupo con involución $*$.

Observación

$$g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}\,.$$

El grupo de estructura

Definición

Sea V álgebra de Jordan. Definimos el *grupo de estructura* $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ como el conjunto de g inversibles tal que

$$\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*$$

para alguna g^* inversible.

Observación

El grupo de estructura es un grupo y $*$ es cerrada en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$. Mas aun, $(g^*)^* = g$, por lo que $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ es un grupo con involución $*$.

Observación

$$g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}\,.$$

El grupo de estructura

Definición

Sea V álgebra de Jordan. Definimos el *grupo de estructura* $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ como el conjunto de g inversibles tal que

$$\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*$$

para alguna g^* inversible.

Observación

El grupo de estructura es un grupo y $*$ es cerrada en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$. Mas aun, $(g^*)^* = g$, por lo que $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ es un grupo con involución $*$.

Observación

$$g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}\,.$$

El grupo de estructura

Definición

Definimos el *grupo interno de estructura* a

$$\mathtt{InnStr}(\mathrm{V}) = \langle \mathrm{U}_x \rangle_{x \in \mathsf{V} \text{ inversible}}.$$

Definición

Decimos que k es un *automorfismo* si $k(x \circ y) = k(x) \circ k(y)$; notamos $\mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ al conjunto de automorfismos.

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(\mathrm{V}), \mathtt{Aut}(\mathrm{V}) \subset \mathtt{Str}(\mathrm{V}).$$

Mas aún, si $k \in \mathtt{Aut}(\mathrm{V})$, $k^* = k^{-1}$; $\mathrm{U}_x^* = \mathrm{U}_x$.

El grupo de estructura

Definición

Definimos el *grupo interno de estructura* a

$$\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}) = \langle \mathrm{U}_x \rangle_{x \in \mathsf{V} \text{ inversible}}.$$

Definición

Decimos que k es un *automorfismo* si $k(x \circ y) = k(x) \circ k(y)$; notamos $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ al conjunto de automorfismos.

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}), \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V}).$$

Mas aún, si $k \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, $k^* = k^{-1}$; $\mathrm{U}_x^* = \mathrm{U}_x$.

El grupo de estructura

Definición

Definimos el *grupo interno de estructura* a

$$\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}) = \langle \mathrm{U}_x \rangle_{x \in \mathsf{V} \text{ inversible}}.$$

Definición

Decimos que k es un *automorfismo* si $k(x \circ y) = k(x) \circ k(y)$; notamos $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ al conjunto de automorfismos.

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}), \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V})\,.$$

Mas aún, si $k \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, $k^* = k^{-1}$; $\mathrm{U}_x^* = \mathrm{U}_x$.

$G(\Omega)$

Definición

Definimos al *grupo que fija el cono* Ω como

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) : g(\Omega) = \Omega\}.$$

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(V), \mathtt{Aut}(V) \subset G(\Omega).$$

Mas aún, si $g \in G(\Omega)$ existe x positivo y k automorfismo tal que $g = \mathrm{U}_x\, k$.

Corolario

$$G(\Omega) \subset \mathtt{Str}(V).$$

$G(\Omega)$

Definición

Definimos al *grupo que fija el cono* Ω como

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) : g(\Omega) = \Omega\}.$$

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(V), \mathtt{Aut}(V) \subset G(\Omega)\,.$$

Mas aún, si $g \in G(\Omega)$ existe x positivo y k automorfismo tal que $g = \mathrm{U}_x\, k$.

Corolario

$$G(\Omega) \subset \mathtt{Str}(V)\,.$$

$G(\Omega)$

Definición

Definimos al *grupo que fija el cono* Ω como

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) : g(\Omega) = \Omega\}.$$

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(V), \mathtt{Aut}(V) \subset G(\Omega) .$$

Mas aún, si $g \in G(\Omega)$ existe x positivo y k automorfismo tal que $g = \mathrm{U}_x\, k$.

Corolario

$$G(\Omega) \subset \mathtt{Str}(V) .$$

$\mathrm{G}(\Omega)$

Definición

Definimos al *grupo que fija el cono* Ω como

$$\mathrm{G}(\Omega) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}) : g(\Omega) = \Omega\}.$$

Proposición

$$\mathtt{InnStr}(\mathrm{V}), \mathtt{Aut}(\mathrm{V}) \subset \mathrm{G}(\Omega)\,.$$

Mas aún, si $g \in \mathrm{G}(\Omega)$ existe x positivo y k automorfismo tal que $g = \mathrm{U}_x\, k$.

Corolario

$$\mathrm{G}(\Omega) \subset \mathtt{Str}(\mathrm{V})\,.$$

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Teorema

$\mathtt{Aut}(V)$ es un retracto por deformación fuerte de $G(\Omega)$. En particular $G(\Omega)$ y $\mathtt{Aut}(V)$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Proposición

$\mathtt{Str}(V)_0$, la componente conexa de la identidad de $\mathtt{Str}(V)$, está contenida en $G(\Omega)$. En particular $G(\Omega)$ es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathtt{Str}(V)$.

Teorema

$G(\Omega) = \bigsqcup_i \mathtt{Str}(V)_0 \cdot k_i$, donde cada k_i pertenece a una componente conexa distinta de $\mathtt{Aut}(V)$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Teorema

$\mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathrm{G}(\Omega)$. En particular $\mathrm{G}(\Omega)$ y $\mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Proposición

$\mathtt{Str}(\mathrm{V})_0$, la componente conexa de la identidad de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$, está contenida en $\mathrm{G}(\Omega)$. En particular $\mathrm{G}(\Omega)$ es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$.

Teorema

$\mathrm{G}(\Omega) = \bigsqcup_i \mathtt{Str}(\mathrm{V})_0 \cdot k_i$, donde cada k_i pertenece a una componente conexa distinta de $\mathtt{Aut}(\mathrm{V})$.

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Teorema

$\mathtt{Aut}(V)$ es un retracto por deformación fuerte de $G(\Omega)$. En particular $G(\Omega)$ y $\mathtt{Aut}(V)$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Proposición

$\mathtt{Str}(V)_0$, la componente conexa de la identidad de $\mathtt{Str}(V)$, está contenida en $G(\Omega)$. En particular $G(\Omega)$ es un subgrupo abierto y cerrado de $\mathtt{Str}(V)$.

Teorema

$G(\Omega) = \bigsqcup_i \mathtt{Str}(V)_0 \cdot k_i$, donde cada k_i pertenece a una componente conexa distinta de $\mathtt{Aut}(V)$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Proposición

Sea $p \in \mathrm{V}$ una proyección central, entonces $S_p = L_{\varepsilon_p} \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ con $S_p^* = S_p$.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

Sea $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$. Entonces existe v en Ω, una proyección central p en V y un automorfismo k tales que

$$g = \mathrm{U}_v \, S_p k = S_p \, \mathrm{U}_v \, k.$$

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Proposición

Sea $p \in \mathrm{V}$ una proyección central, entonces $S_p = L_{\varepsilon_p} \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ con $S_p^* = S_p$.

Teorema (Larotonda, Luna; 2022)

Sea $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$. Entonces existe v en Ω, una proyección central p en V y un automorfismo k tales que

$$g = \mathrm{U}_v\, S_p k = S_p\, \mathrm{U}_v\, k.$$

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1}\, g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $V^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'}\, h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(V)$ y p es central. Obtenemos $g = S_p\, \mathrm{U}_v\, k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $V^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'} h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(V)$ y p es central. Obtenemos $g = S_p \mathrm{U}_v k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $V^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'} h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(V)$ y p es central. Obtenemos $g = S_p \mathrm{U}_v k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(V)$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $V^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'} h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(V)$ y p es central. Obtenemos $g = S_p \mathrm{U}_v k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $\mathrm{V}^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'} h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ y p es central. Obtenemos $g = S_p \mathrm{U}_v k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1}\, g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $\mathrm{V}^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'}\, h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ y p es central. Obtenemos $g = S_p\, \mathrm{U}_v\, k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $\mathrm{V}^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'} h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ y p es central. Obtenemos $g = S_p \mathrm{U}_v k$.

Componentes de $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$

Demostración (Idea): $p = \chi_+(g(1))$, $p' = 1 - p$,
$|g(1)| = pg(1) + p'g(1)$; $v = \sqrt{|g(1)|}$.
Sea $h = \mathrm{U}_v^{-1}\, g$, basta ver que $h = S_p k$. Consideramos $\mathrm{V}^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'}\, h$; $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Escribimos $k = \alpha + i\beta$; tomamos la descomposición de Pierce por p y gracias a ella probamos que $k \in \mathtt{Aut}(\mathrm{V})$ y p es central. Obtenemos $g = S_p\, \mathrm{U}_v\, k$.

Consecuencias

Proposición

Si S_p y S_q están en la misma coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ entonces $p = q$.

Corolario

Existe una coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ por cada proyección central p en V.

Corolario

U_x es positivo si y solo si existe $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ y $z \in \Omega$ tal que $g(z) = x$.

Corolario

$g^* = g^{-1}$ si y solo si $g = S_p k$ con p proyección central y k automorfismo.

Consecuencias

Proposición

Si S_p y S_q están en la misma coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ entonces $p = q$.

Corolario

Existe una coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ por cada proyección central p en V.

Corolario

U_x es positivo si y solo si existe $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ y $z \in \Omega$ tal que $g(z) = x$.

Corolario

$g^* = g^{-1}$ si y solo si $g = S_p k$ con p proyección central y k automorfismo.

Consecuencias

Proposición

Si S_p y S_q están en la misma coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ entonces $p = q$.

Corolario

Existe una coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ por cada proyección central p en V.

Corolario

U_x es positivo si y solo si existe $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ y $z \in \Omega$ tal que $g(z) = x$.

Corolario

$g^* = g^{-1}$ si y solo si $g = S_p k$ con p proyección central y k automorfismo.

Consecuencias

Proposición

Si S_p y S_q están en la misma coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ entonces $p = q$.

Corolario

Existe una coclase de $\mathrm{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathrm{V})$ por cada proyección central p en V.

Corolario

U_x es positivo si y solo si existe $g \in \mathtt{Str}(\mathrm{V})$ y $z \in \Omega$ tal que $g(z) = x$.

Corolario

$g^* = g^{-1}$ si y solo si $g = S_p k$ con p proyección central y k automorfismo.

- McCrimmon, Kevin. *A taste of Jordan algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Hanche-Olsen, Harald; Stormer, Erling. *Jordan operator algebras*. Monographs and Studies in Mathematics, 21. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.
- G. Larotonda, J. Luna, *On the structure group of an infinite dimensional JB-algebra* (2022). 32 páginas, preprint.
- G. Larotonda, J. Luna, *Finsler geometry of the positive cone of a JB-algebra and of its structure group* (2022). 34 páginas, preprint.