Lógicas que preservan grados de verdad con respecto a diferentes estructuras temporales

Aldo V. Figallo, Jonathan Sarmiento, Martín Figallo

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS).

UMA 2022 NEUQUÉN

Lógica que preserva grados de verdad

Lógica que preserva grados de verdad

Existen diferentes maneras de relacionar una lógica con una clase dada de álgebras.

- R. Jansana. Propositional consequence relations and algebraic logic, in E. N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Spring 2011 Edition.

Lógica que preserva grados de verdad

Existen diferentes maneras de relacionar una lógica con una clase dada de álgebras.

- R. Jansana. Propositional consequence relations and algebraic logic, in E. N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Spring 2011 Edition.

El estudio de las lógicas que preservan grados de verdad se remonta a Wójcicki en el contexto de la lógica de Lukasiewicz, en su libro

- R. Wójcicki. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. Vol. 199 of Synthese Library, Kluwer, 1988.

Lógica que preserva grados de verdad

Luego extendido por varios autores, entre ellos.

Lógica que preserva grados de verdad

Luego extendido por varios autores, entre ellos.

- F. Bou, F. Esteva, J. M. Font, A. Gil, L. Godo, A. Torrens and V. Verdú. Logics preserving degrees of truth from varieties of residuated lattices. Journal of Logic and Computation, 19 (2009), 1031-1069.
- J. M. Font. On substructural logics preserving degrees of truth. Bulletin of the Section of Logic, 36 (2007), 117-130.
- J. M. Font, A. Gil, A. Torrens and V. Verdú. On the infinite-valued Lukasiewicz logic that preserves degrees of truth. Archive for Mathematical Logic, 45 (2006), 839-868.
- L. Cantú y M. Figallo. On the logic that preserves degrees of truth associated to involutive Stone algebras. Logic Journal of the IGPL, 28 (2020), 1000-1020.

Lógica que preserva grados de verdad

Esto sigue un patrón muy general que puede ser considerado para cualquier clase de estructura de valores de verdad con un orden definido sobre ellos.

El objetivo es explotar la multiplicidad de valores, considerando una relación de consecuencia que preserve cotas inferiores en lugar de solo preservar el último elemento del orden.

Lógica que preserva grados de verdad

Esto sigue un patrón muy general que puede ser considerado para cualquier clase de estructura de valores de verdad con un orden definido sobre ellos.

El objetivo es explotar la multiplicidad de valores, considerando una relación de consecuencia que preserve cotas inferiores en lugar de solo preservar el último elemento del orden.

En este trabajo consideraremos una variedad $\mathbf{K}$ de F-álgebras tal que toda álgebra de la variedad tiene una estructura subyacente de retículo con último elemento.

Denotaremos con $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, F \rangle$ el álgebra absolutamente libre generada por un conjunto numerable de variables Var.

Lógica que preserva grados de verdad sobre **K**

Definición

La lógica que preserva grados de verdad sobre **K**, *es la lógica proposicional* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}} = \langle Fm, \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \rangle$ *definida como sigue, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*:*

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Definición

La lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$*, es la lógica proposicional* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}} = \langle Fm, \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \rangle$ *definida como sigue, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*:*

(i) *Si* Γ *es finito no vacío,* $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$*,*

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \forall a \in A \text{ si } h(\alpha_i) \geq a \ \text{ p.t } i \leq n, \text{ entonces } h(\alpha) \geq a.$$

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Definición

La lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$*, es la lógica proposicional* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}} = \langle Fm, \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \rangle$ *definida como sigue, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$*:*

(i) *Si* Γ *es finito no vacío,* $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$,

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \forall a \in A$$
$$si\ h(\alpha_i) \geq a\ \ p.t\ i \leq n,\ \ entonces\ h(\alpha) \geq a.$$

(ii) $$\emptyset \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ h(\alpha) = 1.$$

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Definición

La lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$, *es la lógica proposicional* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}} = \langle Fm, \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \rangle$ *definida como sigue, para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm$:

(i) *Si* Γ *es finito no vacío,* $\Gamma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$,

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \forall a \in A$$
$$\text{si } h(\alpha_i) \geq a \ \text{ p.t } i \leq n,\ \text{ entonces } h(\alpha) \geq a.$$

(ii) $\emptyset \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ h(\alpha) = 1.$

(iii) *Si* Γ *es infinito,*

$$\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha \iff \text{existen } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Gamma \text{ tales que } \alpha_1, \cdots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha.$$

Lógica que preserva grados de verdad sobre **K**

Proposición

La relación $\models^{\leq}_{\mathbf{K}}$ *verifica las siguientes propiedades. Para todo* $\Gamma \cup \Delta \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq Fm$:

Lógica que preserva grados de verdad sobre **K**

Proposición

La relación $\models^{\leq}_{\mathbf{K}}$ *verifica las siguientes propiedades. Para todo* $\Gamma \cup \Delta \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq Fm$:

(C1) $\alpha \in \Gamma$ *implica* $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$, *(Reflexividad)*

(C2) $\Delta \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$, $\Delta \subseteq \Gamma$ *implica* $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$, *(Monotonía)*

(C3) $\Delta \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$, $\forall \beta \in \Delta(\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \beta)$ *implica* $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$. *(Corte sobre conjuntos)*

(C4) $\Delta \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$, $\Gamma, \alpha \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \beta$ *implica* $\Delta, \Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \beta$. *(Corte sobre fórmulas)*

(C5) $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$ *implica* $\varepsilon(\Gamma) \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \varepsilon(\alpha)$, *para todo endomorfismo* ε *sobre* Fm. *(Estructuralidad)*

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Corolario

$\mathbb{L}_{\mathbf{K}}^{\leq}$ *es una lógica sentencial, es decir,* $\models_{\mathbf{K}}^{\leq}$ *es una relación de consecuencia finitaria definida sobre* Fm.

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Corolario

$\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}}$ es una lógica sentencial, es decir, $\models^{\leq}_{\mathbf{K}}$ es una relación de consecuencia finitaria definida sobre Fm.

Lema

Para todo $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$, $n \geq 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$

(b) $\forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} h(\alpha_i) \leq h(\alpha)$.

Lógica que preserva grados de verdad sobre **K**

Corolario

Para todo $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha\} \subseteq Fm$, $n \geq 1$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$,

(ii) $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \alpha$,

(iii) $\mathbf{K} \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \preccurlyeq \alpha$.

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Observación

- *La equivalencia (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) del Corolario se deduce que la lógica $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}}$ es conjuntiva, esto es: el conectivo $\wedge$ tiene el mismo comportamiento que la conjunción clásica.*
- *La equivalencia (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) expresa que la relación de consecuencia $\models^{\leq}_{\mathbf{K}}$ internaliza la relación de orden de la variedad. Más aún, la lógica $\models^{\leq}_{\mathbf{K}}$ depende solamente de las ecuaciones que verifica la variedad $\mathbf{K}$.*

Lógica que preserva grados de verdad sobre **K**

Finalmente teniendo en cuenta el Lema previo, podemos extender la noción de consecuencia como sigue:

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Finalmente teniendo en cuenta el Lema previo, podemos extender la noción de consecuencia como sigue:

Dados Γ y Δ conjuntos de fórmulas finitos, diremos que Δ es consecuencia de Γ en $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}}$, denotado por $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \Delta$ si,

$$\forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \bigwedge\{h(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \leq \bigvee\{h(\delta) : \delta \in \Delta\}.$$

Lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$

Finalmente teniendo en cuenta el Lema previo, podemos extender la noción de consecuencia como sigue:

Dados Γ y Δ conjuntos de fórmulas finitos, diremos que Δ es consecuencia de Γ en $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{K}}$, denotado por $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{K}} \Delta$ si,

$$\forall A \in \mathbf{K},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \bigwedge\{h(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \leq \bigvee\{h(\delta) : \delta \in \Delta\}.$$

Si Δ es un conjunto con exactamente un elemento, recuperamos la relación de consecuencia dada en la Definición de lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{K}$.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

En lo que sigue vamos a considerar la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$ de las álgebras temporales.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

En lo que sigue vamos a considerar la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T** de las álgebras temporales.

Definición (Álgebra temporal (Kowalski))

Un álgebra temporal es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, H, G, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2,2,1,1,1,0,0)$ *tal que el reducto* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole y las operaciones unarias* H *y* G, *satisfacen las siguientes identidades:*

(T1) $G1 = 1$ *y* $H1 = 1$,

(T2) $G(x \wedge y) = Gx \wedge Gy$ *y* $H(x \wedge y) = Hx \wedge Hy$,

(T3) $\neg x \vee G\neg H\neg x = 1$, $\neg x \vee H\neg G\neg x = 1$.

Denotaremos con **T** a la variedad de las álgebras temporales.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

En el siguiente Lema vemos formas alternativas de definir dichas álgebras.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

En el siguiente Lema vemos formas alternativas de definir dichas álgebras.

Lema

Sean $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole,* $G, H : A \to A$ *operadores unarios y* F, P *los operadores definidos por:* $F := \neg G \neg$ *y* $P := \neg H \neg$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

En el siguiente Lema vemos formas alternativas de definir dichas álgebras.

Lema

Sean $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole,* $G, H : A \to A$ *operadores unarios y* F, P *los operadores definidos por:* $F := \neg G \neg$ *y* $P := \neg H \neg$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, G, H, 0, 1\rangle$ *es un álgebra temporal.*

(ii) *se verifican:*

(1) $P(x) \leq y$ *si y solo si* $x \leq G(y)$,
(2) $F(x) \leq y$ *si y solo si* $x \leq H(y)$.

(iii) *se verifican:*

(1) G *y* H *son monotonos,*
(2) $x \leq GP(x)$ *y* $x \leq HF(x)$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, H, G\}$ y definamos los conectivos P y F como sigue: $P := \neg H \neg \;\; y \;\; F := \neg G \neg$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T**

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, H, G\}$ y definamos los conectivos P y F como sigue: $P := \neg H \neg \;\; y \;\; F := \neg G \neg$

A continuación presentamos el cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$, donde trataremos con secuentes *multiple conclusioned*, es decir, con secuentes de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son subconjuntos finitos de Fm.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T**

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, H, G\}$ y definamos los conectivos P y F como sigue: $P := \neg H \neg \;\; y \;\; F := \neg G \neg$

A continuación presentamos el cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$, donde trataremos con secuentes *multiple conclusioned*, es decir, con secuentes de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son subconjuntos finitos de Fm.

Los axiomas y reglas de $\mathfrak{T}$ son los siguientes:

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T**

Axiomas

$$\alpha \Rightarrow \alpha \qquad\qquad \bot \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \top$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Axiomas

$$\alpha \Rightarrow \alpha \qquad\qquad \bot \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \top$$

Reglas estructurales

$$[we]_i \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [we]_d \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha} \qquad [cut] \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T**

Reglas lógicas (Fragmento no temporal)

$$[\wedge \Rightarrow] \quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$[\vee \Rightarrow] \quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow \vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$[\neg \Rightarrow] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow \neg] \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

$$[\to\Rightarrow] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\alpha \to \beta, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\to] \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \to \beta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Reglas lógicas (Fragmento temporal)

$$[mG]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{G\Gamma \Rightarrow G\alpha} \qquad [mH]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{H\Gamma \Rightarrow H\alpha}$$

$$[GP]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow GP\alpha} \qquad [HF]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow HF\alpha}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Reglas lógicas (Fragmento temporal)

$$[mG]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{G\Gamma \Rightarrow G\alpha} \qquad [mH]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{H\Gamma \Rightarrow H\alpha}$$

$$[GP]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow GP\alpha} \qquad [HF]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow HF\alpha}$$

Notaremos con $\mathfrak{T} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, para indicar que existe una $\mathfrak{T}$-prueba del secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Definición

Diremos que la regla de secuentes $[r]\ \dfrac{S_1 \ldots S_k}{S}$, *donde* $S_1 \ldots S_k, S$ *son secuentes de* $\mathfrak{T}$, *es derivable si se verifica:* $S_1 \ldots S_k \vdash_{\mathfrak{T}} S$

Es decir, S *es derivable en* $\mathfrak{T}$ *si* S *es probable a partir de* $\{S_1, \ldots, S_k\}$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Definición

Diremos que la regla de secuentes $[r]\ \dfrac{S_1 \ldots S_k}{S}$, *donde* $S_1 \ldots S_k, S$ *son secuentes de* $\mathfrak{T}$, *es derivable si se verifica:* $S_1 \ldots S_k \vdash_{\mathfrak{T}} S$

Es decir, S *es derivable en* $\mathfrak{T}$ *si* S *es probable a partir de* $\{S_1, \ldots, S_k\}$

En lo que sigue denotaremos con $\neg\Gamma$ al conjunto $\{\neg\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad T

Proposición

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Proposición

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}$.

$$[\neg]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\Delta \Rightarrow \neg\Gamma} \qquad [N_d]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\Delta}{\Delta \Rightarrow \neg\Gamma} \qquad [N_i]\ \frac{\neg\Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\Delta \Rightarrow \Gamma}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Proposición

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}$.

$$[\neg]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\Delta \Rightarrow \neg\Gamma} \qquad [N_d]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\Delta}{\Delta \Rightarrow \neg\Gamma} \qquad [N_i]\ \frac{\neg\Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\Delta \Rightarrow \Gamma}$$

$$[RG]\ \frac{\Rightarrow \alpha}{\Rightarrow G\alpha} \qquad [RH]\ \frac{\Rightarrow \alpha}{\Rightarrow H\alpha}$$

$$[mF]\ \frac{\beta \Rightarrow \Delta}{F\beta \Rightarrow F\Delta} \qquad [mP]\ \frac{\beta \Rightarrow \Delta}{P\beta \Rightarrow P\Delta}$$

$$[FH]\ \frac{\beta \Rightarrow \Delta}{FH\beta \Rightarrow \Delta} \qquad [PG]\ \frac{\beta \Rightarrow \Delta}{PG\beta \Rightarrow \Delta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **T**

Proposición

Los siguientes secuentes son probables en $\mathfrak{T}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{T}$

Proposición

Los siguientes secuentes son probables en $\mathfrak{T}$.

(1) $G\top \Leftrightarrow \top$ y $H\top \Leftrightarrow \top$,

(2) $F\bot \Leftrightarrow \bot$ y $P\bot \Leftrightarrow \bot$,

(3) $G(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow G\alpha \wedge G\beta$ y $H(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow H\alpha \wedge H\beta$,

(4) $F(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow F\alpha \vee F\beta$ y $P(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow P\alpha \vee P\beta$,

(5) $G(\alpha \to \beta) \Rightarrow G\alpha \to G\beta$ y $H(\alpha \to \beta) \Rightarrow H\alpha \to H\beta$,

(6) $G(\alpha \to \beta) \Rightarrow F\alpha \to F\beta$ y $H(\alpha \to \beta) \Rightarrow P\alpha \to P\beta$,

(7) $\alpha \Rightarrow GP\alpha$ y $\alpha \Rightarrow HF\alpha$,

(8) $PG\alpha \Rightarrow \alpha$ y $FH\alpha \Rightarrow \alpha$,

Correctitud

Correctitud

Para poder probar el teorema de Correctitud es necesario especificar cuando un secuente del cálculo $\mathfrak{T}$ es *válido*.

Correctitud

Para poder probar el teorema de Correctitud es necesario especificar cuando un secuente del cálculo $\mathfrak{T}$ es *válido*.

Definición

Sean Γ, Δ *subconjuntos finitos de* Fm*. Diremos que el secuente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *de* $\mathfrak{T}$ *es válido si se verifica:*

$$\forall A \in \mathbf{T},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \bigwedge\{h(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \leq \bigvee\{h(\delta) : \delta \in \Delta\}.$$

Correctitud

Para poder probar el teorema de Correctitud es necesario especificar cuando un secuente del cálculo $\mathfrak{T}$ es *válido*.

Definición

Sean Γ, Δ subconjuntos finitos de Fm. Diremos que el secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ de $\mathfrak{T}$ es válido si se verifica:

$$\forall A \in \mathbf{T},\ \forall h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A),\ \bigwedge\{h(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \leq \bigvee\{h(\delta) : \delta \in \Delta\}.$$

En la definición anterior está implicito el siguiente resultado

Correctitud

Proposición

Un secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *de* $\mathfrak{T}$ *es válido si, y solo si,* $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{T}} \Delta$

Correctitud

Proposición

Un secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *de* $\mathfrak{T}$ *es válido si, y solo si,* $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{T}} \Delta$

Además, diremos que una regla de secuentes $\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Gamma_k \Rightarrow \Delta_k}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

preserva validez si se verifica que

$$\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i \text{ es válido para } 1 \leq i \leq k \text{ implica } \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ es válido:}$$

Correctitud

Lema

Todas las reglas de $\mathfrak{T}$ (estructurales y lógicas) preservan validez.

Correctitud

Lema

Todas las reglas de $\mathfrak{T}$ (estructurales y lógicas) preservan validez.

Teorema (Correctitud)

Todo secuente probable en $\mathfrak{T}$ es válido.

Correctitud

Lema

Todas las reglas de $\mathfrak{T}$ (estructurales y lógicas) preservan validez.

Teorema (Correctitud)

Todo secuente probable en $\mathfrak{T}$ es válido.

Dem.

La demostración consiste en probar que todo secuente final en una $\mathfrak{T}$-prueba es válido, usando inducción en el número de secuentes en la prueba. El caso base, se reduce a probar que todo secuente inicial es válido, lo cual es inmediato, el paso inductivo resulta del Lema anterior.

Completitud

Ahora vamos a probar el Teorema de Completitud, usando el método de Lindenbaum-Tarski.

Completitud

Ahora vamos a probar el Teorema de Completitud, usando el método de Lindenbaum-Tarski. De manera se definen las relaciones $\prec$ y $\equiv$ sobre Fm como sigue:

$$\alpha \prec \beta \quad \text{si y solo si} \quad \mathfrak{T} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$$

$$\alpha \equiv \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \prec \beta \;\; y \;\; \beta \prec \alpha$$

Completitud

Ahora vamos a probar el Teorema de Completitud, usando el método de Lindenbaum-Tarski. De manera se definen las relaciones $\prec$ y $\equiv$ sobre Fm como sigue:

$$\alpha \prec \beta \quad \text{si y solo si} \quad \mathfrak{T} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$$

$$\alpha \equiv \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \prec \beta \;\; y \;\; \beta \prec \alpha$$

Lema

$\mathfrak{Fm}_{\equiv} = \langle Fm/{\equiv}, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, G, H, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ es un ágebra temporal. Donde $\mathbf{1} = [\top]$ y $\mathbf{0} = [\bot]$

Completitud

Teorema (Completitud)

Todo secuente válido de $\mathfrak{T}$ es probable en $\mathfrak{T}$.

Completitud

Teorema (Completitud)

Todo secuente válido de $\mathfrak{T}$ es probable en $\mathfrak{T}$.

Corolario

Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $\mathfrak{T} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. *(* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es probable en* $\mathfrak{T}$*)*

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es válido.*

(iii) $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{T}} \Delta$. *(* Δ *es consecuencia de* Γ *en* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{T}}$*)*

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

A continuación presentaremos un cálculo alternativo al cálculo $\mathfrak{T}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

A continuación presentaremos un cálculo alternativo al cálculo $\mathfrak{T}$.

Consideremos ahora el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, P, G\}$ y definamos los conectivos F y H como sigue: $F := \neg G \neg$ y $H := \neg P \neg$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

A continuación presentaremos un cálculo alternativo al cálculo $\mathfrak{T}$.

Consideremos ahora el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \to, \neg, P, G\}$ y definamos los conectivos F y H como sigue: $F := \neg G \neg \ y \ H := \neg P \neg$

Sea $\mathfrak{T}^{PG}$ el cálculo de secuentes que se obtiene a partir de $\mathfrak{T}$ eliminando las reglas:

$$[mG] \ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{G\Gamma \Rightarrow G\alpha} \qquad\qquad [mH] \ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{H\Gamma \Rightarrow H\alpha}$$

$$[GP] \ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow GP\alpha} \qquad\qquad [HF] \ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow HF\alpha}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

y agregando las siguientes reglas:

$$[P \Rightarrow] \quad \frac{\alpha \Rightarrow G\beta}{P\alpha \Rightarrow \beta} \qquad\qquad [\Rightarrow G] \quad \frac{P\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow G\beta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

y agregando las siguientes reglas:

$$[P \Rightarrow] \quad \frac{\alpha \Rightarrow G\beta}{P\alpha \Rightarrow \beta} \qquad\qquad [\Rightarrow G] \quad \frac{P\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow G\beta}$$

Teorema

Un secuente S es probable en $\mathfrak{T}$ si, y solo si, S es probable en $\mathfrak{T}^{PG}$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}^{PG}$

y agregando las siguientes reglas:

$$[P \Rightarrow] \quad \frac{\alpha \Rightarrow G\beta}{P\alpha \Rightarrow \beta} \qquad\qquad [\Rightarrow G] \quad \frac{P\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow G\beta}$$

Teorema

Un secuente S es probable en $\mathfrak{T}$ si, y solo si, S es probable en $\mathfrak{T}^{PG}$

Dem.

Para la demostración es suficiente verificar lo siguiente:

- *Las reglas $[P \Rightarrow]$ y $[\Rightarrow G]$ son derivables en $\mathfrak{T}$*
- *Las reglas $[mG]$, $[mH]$, $[GP]$ y $[HF]$ son derivables en $\mathfrak{T}^{PG}$*

Lógica minimal temporal

Para concluir esta sección, establecemos la relación entre la lógica $\mathbb{L}_{\mathbf{T}}^{\leq}$ y la bien conocida lógica temporal minimal a la que da lugar el sistema K_t introducido por E. J. Lemmon en 1965.

Lema

La lógica que preserva grados de verdad sobre $\mathbf{T}$, es precisamente la lógica K_t.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Trataremos ahora con $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{MT}} = \langle Fm, \models^{\leq}_{\mathbf{MT}} \rangle$, es decir, la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **MT**, de las álgebras de De Morgan temporales.

A continuación damos la definición de álgebra de De Morgan temporal y formas alternativas de definir dichas álgebras.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Definición (Álgebra de De Morgan temporal (Figallo A-Pelaitay G))

Un álgebra de De Morgan temporal (o MT-álgebra) es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, G, H, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0)$ *tal que el reducto* $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan y las operaciones unarias* G, H *satisfacen para todo* $x, y \in A$*:*

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Definición (Álgebra de De Morgan temporal (Figallo A-Pelaitay G))

Un álgebra de De Morgan temporal (o MT-álgebra) es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, G, H, 0, 1\rangle$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, 1, 0, 0)$ *tal que el reducto* $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de De Morgan y las operaciones unarias* G, H *satisfacen para todo* $x, y \in A$*:*

(T1) $G(1) = 1$ *y* $H(1) = 1$,

(T2) $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$ *y* $H(x \wedge y) = H(x) \wedge H(y)$,

(T3) $x \leq GP(x)$ *y* $x \leq HF(x)$,

donde $F(x) :=\sim G(\sim x)$, $P(x) :=\sim H(\sim x)$,

(T4) $G(x \vee y) \leq G(x) \vee F(y)$ *y* $H(x \vee y) \leq H(x) \vee P(y)$.

Notaremos con **MT** a la variedad de las álgebras de De Morgan temporales.

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Lema

Sean $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 1, 0\rangle$ *un álgebra de De Morgan,* $G, H : A \to A$ *operadores unarios y* F, P *los operadores definidos por:* $F := \sim G \sim$ *y* $P := \sim H \sim$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

Lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Lema

Sean $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 1, 0\rangle$ *un álgebra de De Morgan,* $G, H : A \to A$ *operadores unarios y* F, P *los operadores definidos por:* $F := \sim G \sim$ *y* $P := \sim H \sim$*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, G, H, 1, 0\rangle$ *es un álgebra de De Morgan temporal.*

(ii) *se verifican:*
  (1) $P(x) \leq y$ *si y solo si* $x \leq G(y)$,
  (2) $F(x) \leq y$ *si y solo si* $x \leq H(y)$,
  (3) $G(x \vee y) \leq G(x) \vee F(y)$ *y* $H(x \vee y) \leq H(x) \vee P(y)$.

(iii) *se verifican:*
  (1) G *y* H *son monotonos,*
  (2) $x \leq GP(x)$ *y* $x \leq HF(x)$,
  (3) $G(x \vee y) \leq G(x) \vee F(y)$ *y* $H(x \vee y) \leq H(x) \vee P(y)$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad **MT**

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \sim, H, G\}$ y definamos los conectivos P y F como sigue: $P := \sim H \sim \;\; y \;\; F := \sim G \sim$

A continuación presentamos el cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$, al igual que antes trataremos con secuentes *multiple conclusioned*, es decir, con secuentes de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son subconjuntos finitos de Fm.

Los axiomas y reglas de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ son los siguientes:

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad $\mathbf{MT}$

Axiomas

$$\alpha \Rightarrow \alpha \qquad\qquad \sim\top \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \top$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ para la lógica que preserva grados de verdad sobre la variedad MT

Axiomas

$$\alpha \Rightarrow \alpha \qquad\qquad \sim \top \Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow \top$$

Reglas estructurales

$$[we]_i \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [we]_d \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha} \qquad [cut] \; \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Reglas lógicas (Fragmento no temporal)

$$[\sim\sim\Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim\sim \alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\sim\sim]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim\sim \alpha}$$

$$[\wedge \Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow \wedge]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$[\sim \wedge \Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \sim \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \sim \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\sim \wedge]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim \alpha, \sim \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim (\alpha \wedge \beta)}$$

$$[\vee \Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow \vee]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$[\sim \vee \Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \sim \alpha, \sim \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\sim \vee]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \sim \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim (\alpha \vee \beta)}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Reglas lógicas (Fragmento temporal)

$$[G\sim\sim\Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, G\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, G\sim\sim\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow G\sim\sim]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, G\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, G\sim\sim\alpha}$$

$$[\sim G\sim\sim\Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \sim G\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim G\sim\sim\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\sim G\sim\sim]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim G\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim G\sim\sim\alpha}$$

$$[H\sim\sim\Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, H\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, H\sim\sim\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow H\sim\sim]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, H\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, H\sim\sim\alpha}$$

$$[\sim H\sim\sim\Rightarrow]\quad \frac{\Gamma, \sim H\alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \sim H\sim\sim\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [\Rightarrow\sim H\sim\sim]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim H\alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \sim H\sim\sim\alpha}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

$$[mGgen] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{G\Gamma \Rightarrow F\Delta, G\alpha} \qquad [mHgen] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{H\Gamma \Rightarrow P\Delta, H\alpha}$$

$$[cmGgen] \quad \frac{\Gamma, \sim \alpha \Rightarrow \Delta}{G\,\Gamma, \sim G\alpha \Rightarrow \ F\Delta} \qquad [cmHgen] \quad \frac{\Gamma, \sim \alpha \Rightarrow \Delta}{H\,\Gamma, \sim H\alpha \Rightarrow \ P\Delta}$$

$$[GP] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow GP\alpha} \qquad [HF] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow HF\alpha}$$

$$[cGP] \quad \frac{\sim \alpha \Rightarrow \Delta}{\sim GP\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [cHF] \quad \frac{\sim \alpha \Rightarrow \Delta}{\sim HF\alpha \Rightarrow \Delta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

$$[mGgen]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{G\Gamma \Rightarrow F\Delta, G\alpha} \qquad [mHgen]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{H\Gamma \Rightarrow P\Delta, H\alpha}$$

$$[cmGgen]\ \frac{\Gamma, \sim \alpha \Rightarrow \Delta}{G\,\Gamma, \sim G\alpha \Rightarrow\ F\Delta} \qquad [cmHgen]\ \frac{\Gamma, \sim \alpha \Rightarrow \Delta}{H\,\Gamma, \sim H\alpha \Rightarrow\ P\Delta}$$

$$[GP]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow GP\alpha} \qquad [HF]\ \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow HF\alpha}$$

$$[cGP]\ \frac{\sim \alpha \Rightarrow \Delta}{\sim GP\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad [cHF]\ \frac{\sim \alpha \Rightarrow \Delta}{\sim HF\alpha \Rightarrow \Delta}$$

Notaremos con $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, para indicar que existe una $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$-prueba del secuente $\Gamma \Rightarrow \Delta$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Lema

Los siguientes secuentes son probables en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

(1) $G\alpha \Leftrightarrow G \sim\sim \alpha, \quad H\alpha \Leftrightarrow H \sim\sim \alpha,$

(2) $\sim G\alpha \Leftrightarrow \sim G \sim\sim \alpha, \quad \sim H\alpha \Leftrightarrow \sim H \sim\sim \alpha,$

(3) $F \sim \alpha \Leftrightarrow \sim G\alpha, \quad P \sim \alpha \Leftrightarrow \sim H\alpha,$

(4) $F\alpha \Leftrightarrow F \sim\sim \alpha, \quad P\alpha \Leftrightarrow P \sim\sim \alpha,$

(5) $G \sim \alpha \Leftrightarrow \sim F\alpha, \quad H \sim \alpha \Leftrightarrow \sim P\alpha,$

(6) $\alpha \Rightarrow GP\alpha, \quad \alpha \Rightarrow HF\alpha,$

(7) $G(\alpha \vee \beta) \Rightarrow G\alpha \vee F\beta, \quad H(\alpha \vee \beta) \Rightarrow H\alpha \vee P\beta,$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Proposición

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{D}\mathfrak{M}}$.

$$[mG] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{G\Gamma \Rightarrow G\beta} \qquad\qquad [mH] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{H\Gamma \Rightarrow H\beta}$$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Proposición

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{D}\mathfrak{M}}$.

$$[mG]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{G\Gamma \Rightarrow G\beta} \qquad\qquad [mH]\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{H\Gamma \Rightarrow H\beta}$$

Nuestro próximo objetivo es mostrar que la regla $[\sim]\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim\Delta \Rightarrow \sim\Gamma}$ del sistema de Font y Rius es admisible en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Definición

Diremos que la regla de secuentes $[r]\ \dfrac{S_1 \ldots S_k}{S}$, *donde* $S_1 \ldots S_k, S$ *son secuentes de* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$, *es admisible si se verifica:*

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash S_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ implica } \mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash S$$

Es decir, si todos los $S_i's$ *son probables en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$, *entonces* S *es probable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Necesitaremos algunos resultados técnicos:

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Lema

Sean $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n\} \cup \Pi \subseteq Fm$. *Entonces*

(1) *Si* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \beta_i \Rightarrow \alpha_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\dfrac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \Pi}{\beta_1, \ldots, \beta_n \Rightarrow \Pi}$ *es derivable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

(2) *Si* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \beta_i \Rightarrow \alpha_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\dfrac{\Pi \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n}{\Pi \Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ *es derivable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

(3) *Si* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \alpha_i \Rightarrow \beta_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\dfrac{\beta_1, \ldots, \beta_n \Rightarrow \Pi}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \Rightarrow \Pi}$ *es derivable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

(4) *Si* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \alpha_i \Rightarrow \beta_i$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\dfrac{\Pi \Rightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\Pi \Rightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n}$ *es derivable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Corolario

Sea $\Gamma \cup \Delta \subseteq Fm$, entonces las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$.

(1*) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \sim\sim \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ *y* $\dfrac{\sim\sim \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$.

(2*) $\dfrac{G \sim \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim F\,\Gamma \Rightarrow \Delta}$ *y* $\dfrac{H \sim \Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim P\,\Gamma \Rightarrow \Delta}$.

(3*) $\dfrac{\Delta \Rightarrow F \sim \Gamma}{\Delta \Rightarrow \sim G\,\Gamma}$ *y* $\dfrac{\Delta \Rightarrow P \sim \Gamma}{\Delta \Rightarrow \sim H\,\Gamma}$.

donde $\# \sim \Gamma = \{\# \sim \gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *y* $\sim \#\Gamma = \{\sim \#\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, *para* $\# \in \{G, H, F, P\}$

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Proposición

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ *implica* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \sim \Delta \Rightarrow \sim \Gamma$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Proposición

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ *implica* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \sim \Delta \Rightarrow \sim \Gamma$.

Dem.

Dado $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ *y* $\mathcal{P}$ *una* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{D}\mathfrak{M}}$*-prueba del secuente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$. *La demostración usa inducción sobre el número* n *de inferencias en* $\mathcal{P}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Corolario

La regla $[\sim]$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim \Delta \Rightarrow \sim \Gamma}$ *es admisible en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$.

Cálculo de secuentes $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$

Corolario

La regla $[\sim]$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\sim \Delta \Rightarrow \sim \Gamma}$ *es admisible en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$.

Corolario

Las siguientes reglas son derivables en $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$.

(1) $[mFgen]$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{G\Gamma, F\alpha \Rightarrow F\Delta}$ $[mPgen]$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{H\Gamma, P\alpha \Rightarrow P\Delta}$

(2) $[mF]$ $\dfrac{\alpha \Rightarrow \Delta}{F\alpha \Rightarrow F\Delta}$ $[mP]$ $\dfrac{\alpha \Rightarrow \Delta}{P\alpha \Rightarrow P\Delta}$

(3) $[PG]$ $\dfrac{\alpha \Rightarrow \Delta}{PG\alpha \Rightarrow \Delta}$ $[FH]$ $\dfrac{\alpha \Rightarrow \Delta}{FH\alpha \Rightarrow \Delta}$

Correctitud y completitud

En forma análoga a lo hecho en la sección anterior se prueban lo siguiente

Correctitud y completitud

En forma análoga a lo hecho en la sección anterior se prueban lo siguiente

Teorema

Para todo secuente S de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ se verifica:

$$S \text{ es probable en } \mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \text{ si, y solo si, } S \text{ es válido.}$$

Correctitud y completitud

En forma análoga a lo hecho en la sección anterior se prueban lo siguiente

Teorema

Para todo secuente S de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$ se verifica:

$$S \textit{ es probable en } \mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \textit{ si, y solo si, } S \textit{ es válido.}$$

Corolario

Las siguientes condiciones son equivalentes

(i) $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. *(* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es probable en* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M}}$*)*

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *es válido.*

(iii) $\Gamma \models^{\leq}_{\mathbf{MT}} \Delta$. *(* Δ *es consecuencia de* Γ *en* $\mathbb{L}^{\leq}_{\mathbf{MT}}$*)*

¡Muchas gracias por su atención!