Desigualdades mixtas para operadores y pesos asociados a una función de radio crítico

Pablo Quijano

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (UNL - CONICET)

junto a: Fabio Berra y Gladis Pradolini (FIQ - UNL - CONICET)

Reunión anual de la UMA, Neuquén, septiembre de 2022

Desigualdades en $L^p(w)$

M la maximal de Hardy-Littlewood

- Para $1 < p < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^d} (Mf(x))^p w(x) \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)$

  si y sólo si $\left(⨍_Q w\right)^{1/p} \left(⨍_Q w^{1-p'}\right)^{1/p'} \leq C$
- Para $p = 1$, $w(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| w(x) dx$

  si y solo si $⨍_Q w \leq C \inf_Q w$

Desigualdades mixtas

Una perturbación de M mediante $v \in A_1$

$$Sf(x) = \frac{M(fv)(x)}{v(x)}$$

Si u y $v \in A_1$

$$uv(\{x \in \mathbb{R}^d : Sf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| u(x) v(x) dx$$

- Una motivación: prueba alternativa de la acotación de M en $L^p(w)$
  - Interpolación para obtener el tipo fuerte (p, p) de S
  - Teorema de factorización de Jones

E. Sawyer.
A weighted weak type inequality for the maximal function.
Proc. Amer. Math. Soc., 93(4):610–614, 1985.

Antecedentes

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|u(x)v(x)dx.$$

- Para $T = M$, la maximal de HL, $u \in A_1$ y $v \in A_1$ en [S]
- Para $T = M$, $u \in A_1$ y $v \in A_1$ o $v \in A_\infty(u)$ en [CU-M-P]
- Para T un CZO, $u \in A_1$ y $v \in A_1$ o $v \in A_\infty(u)$ en [CU-M-P]
- Para $T = M$ o T un CZO, $u \in A_1$ y $v \in A_\infty$ en [L-O-P]

D. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez.
Weighted weak-type inequalities and a conjecture of Sawyer.
Int. Math. Res. Not., (30):1849–1871, 2005.

K. Li, S. Ombrosi, and C. Pérez.
Proof of an extension of E. Sawyer's conjecture about weighted mixed weak-type estimates.
Math. Ann., 374(1-2):907–929, 2019.

Funciones de radio crítico

- Consideramos $\mathbb{R}^d$ con una función de radio crítico $\rho : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$, esto es,

$$C_0^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N_0} \leq \rho(y) \leq C_0\,\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{N_0}{N_0+1}}.$$

- Aparecen cuando consideramos un operador de Schrödinger

$$L = -\Delta + V,$$

para un potencial V no negativo, no identicamente nulo y satisfaciendo

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V^q\right)^{1/q} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B V,$$

Z. Shen.
L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials.
Ann. Inst. Fourier (Grenoble)., 45 (1995), no. 2, 513–546..

Operadores asociados a una función de radio crítico

Para $0 < \delta \leq 1$, un operador integral T con núcleo asociado K es un *operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund (SCZO) de tipo* (∞, δ) si

(I) T es acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$;

(II) Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$|K(x,y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^d} \left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-N}, \;\; x \neq y,$$

y existe una constante C tal que

$$|K(x,y) - K(x,y_0)| \leq C \frac{|y-y_0|}{|x-y|^{d+}}, \;\; \text{when } |x-y| > 2|y-y_0|.$$

B. Bongioanni, E. Harboure, and P. Quijano.
Weighted inequalities for Schrödinger type singular integrals.
J. Fourier Anal. Appl., 25 (2019), no. 3, 595–632.

Operadores asociados a una función de radio crítico

Para $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$, un operador integral T con núcleo asociado K es un *operador de Schrödinger-Calderón-Zygmund (SCZO) de tipo* (s, δ) si

$(\mathrm{I_s})$ T es acotado en L^p para $1 < p < s$.

$(\mathrm{II_s})$ Para cada $N > 0$ existe una constante C_N tal que

$$\left(\int_{R<|x_0-x|<2R} |K(x,y)|^s \, dx\right)^{1/s} \leq C_N R^{-d/s'} \left(1 + \frac{R}{\rho(x_0)}\right)^{-N},$$

para $|y - x_0| < R/2$, y existe C tal que

$$\left(\int_{R<|x-y_0|<2R} |K(x,y) - K(x,y_0)|^s \, dx\right)^{1/s} \leq C R^{-d/s'} \left(\frac{r}{R}\right)^{\delta},$$

para $|y - y_0| < r \leq \rho(y_0)$, $r < R/2$.

Pesos asociados a una función de radio crítico

- Para $1 < p < \infty$, $A_p^\rho = \bigcup_{\theta \geq 0} A_p^{\rho,\theta}$ y $w \in A_p^{\rho,\theta}(u)$ si existe $C > 0$,

$$\left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q wu \right)^{1/p} \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q w^{1-p'} u \right)^{1/p'} \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^\theta$$

- Para $p = 1$, $A_1^\rho = \bigcup_{\theta \geq 0} A_1^{\rho,\theta}$ y $w \in A_1^{\rho,\theta}(u)$ si existe $C > 0$,

$$\frac{1}{u(Q)} \int_Q wu \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)} \right)^\theta \inf_Q w,$$

B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas.
Classes of weights related to Schrödinger operators.
J. Math. Anal. Appl., 373(2):563–579, 2011.

Resultado

Teorema: Sea ρ una función de radio crítico, $u \in A_1^\rho$ y $v \in A_\infty^\rho(u)$. Si $0 < \delta \leq 1$ y T es un SCZO de tipo (∞, δ), entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|u(x)v(x)dx.$$

Teorema: Sea ρ una función de radio crítico, $1 < s < \infty$ y $0 < \delta \leq 1$. Sea T un SCZO de tipo (s, δ). Si u es un peso tal que $u^{s'} \in A_1^\rho$ y $v \in A_\infty^\rho(u^\beta)$ para algún $\beta > s'$, entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|u(x)v(x)dx.$$

Observación: En ambos casos tomando $v = 1$ recuperamos las desigualdades de tipo débil conocidas para estos operadores

F. Berra, G. Pradolini, and P. Quijano.

Mixed inequalities for operators associated to critical radius functions with applications to Schrödinger type operators

To appear in Potential Analysis

Técnicas

- **Cubrimiento del espacio por cubos críticos** $\{Q_j = Q(x_j, \rho(x_j))\}$ tales que
  - $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j = \mathbb{R}^d$.
  - $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{X}_{\sigma Q_j} \leq C\sigma^{N_1}$
- **Descomposición local-global**

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \frac{|T(fv)(x)|}{v(x)} > t\right\}\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} uv\left(\left\{x \in Q_j : \frac{|T(f\mathcal{X}_{2Q_j}v)(x)|}{v(x)} > \frac{t}{2}\right\}\right) + \sum_{j\in\mathbb{N}} uv\left(\left\{x \in Q_j : \frac{|T(f\mathcal{X}_{(2Q_j)^c}v)(x)|}{v(x)} > \frac{t}{2}\right\}\right)$$

- Para la **parte gobal** usamos el tamaño del núcleo y $u \in A_1^\rho$
- Para la **parte local** adaptamos las técnicas clasicas [CU-M-P]

Aplicaciones: transformadas de Riesz-Schrödinger

Consideramos $L = -\Delta + V$, en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 3$ $V \geq 0$, $V \in \mathrm{RH}_q$ para $q > d/2$.

En este caso

$$\rho(x) = \sup \left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V(x)\, dx \leq 1 \right\}.$$

Obtenemos desigualdades mixtas para

- $\mathcal{R}_1 = \nabla L^{-1/2}$
- $\mathcal{R}_2 = \nabla^2 V^{-1}$
- $T_\gamma = V^\gamma L^{-\gamma}$ para $0 < \gamma < d/2$
- $S_\gamma = V^{\gamma - 1/2} \nabla L^{-\gamma}$ para $1/2 \leq \gamma < 1$

Trabajo en progreso

- Otros operadores relacionados:
  - Maximales e integrales fraccionarias asociadas a L,
  - Conmutadores.
- Otras hipótesis sobre los pesos
  - ¿$u \in A_1^\rho$ y $v \in A_1^\rho$?
  - ¿$u \in A_1^\rho$ y $v \in A_\infty^\rho$?
- Las técnicas desarrolladas en la partel local no imponen condiciones sobre el peso v.

¡Gracias!