Diferenciabilidad de la norma en espacios de tensores y polinomios homogéneos

UMA 2022 - Neuquén

Martin Mazzitelli

(trabajo en conjunto con S. Dantas, M. Jung y J. T. Rodríguez)

Instituto Balseiro - CONICET y CRUB-UNComa

21 de septiembre de 2022

Plan de la charla

- Motivación (caso lineal).
- Resultados en espacios de polinomios homogéneos.
- Resultados en espacios de tensores.

Planes para la primavera

Motivación

Teo (Pitt ('36), Holub ('73)). Dados $1 < p, q < \infty$, son equivalentes:

(a) Todo $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es compacto.

(b) $q < p$.

(c) $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es reflexivo.

¿Podemos agregar algo (más fuerte que reflexividad) a esta equivalencia?

Motivación

Teo (Pitt ('36), Holub ('73)). Dados $1 < p, q < \infty$, son equivalentes:

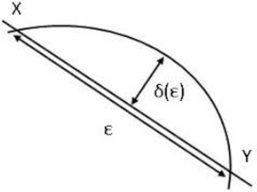
(a) Todo $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es compacto.

(b) $q < p$.

(c) $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es reflexivo.

¿Podemos agregar algo (más fuerte que reflexividad) a esta equivalencia?

Convexidad uniforme



Suavidad uniforme

El límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$$

existe uniformemente en $x \in S_X$ y en $h \in S_X$.

Motivación

Teo (Pitt ('36), Holub ('73)). Dados $1 < p, q < \infty$, son equivalentes:

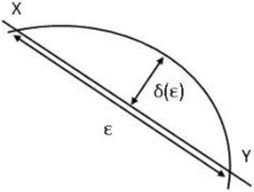
(a) Todo $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es compacto.

(b) $q < p$.

(c) $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es reflexivo.

¿Podemos agregar algo (más fuerte que reflexividad) a esta equivalencia?

Convexidad uniforme



Suavidad uniforme

El límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$$

existe uniformemente en $x \in S_X$ y en $h \in S_X$.

$\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ nunca es UC ni US.....¡bajemos las pretensiones!

Espacios SSD (fuertemente sub-diferenciables)

El límite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t},$$

existe uniformemente en $\cancel{x \in S_X}$ y en $h \in S_X$.

- Ejemplos: finito-dimensionales, uniformemente suaves, c_0, preduales de Lorentz...
- Si X^* es SSD entonces X reflexivo (y no vale la vuelta).
- X^* es SSD $\iff$ si $x^* \in S_{X^*}$ *casi alcanza* su norma en $x \in S_X$ entonces hay un $z \in S_X$ tal que $z \approx x$ y $|x^*(z)| = 1$.

$$(X^* \text{ SSD} \iff X \text{ tiene propiedad } (\star) \text{ para funcionales})$$

Volviendo al principio: ¡algo más que reflexividad!

$$\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q) \text{ es SSD} \iff \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q) \text{ es reflexivo } (\iff 1 < q < p < \infty).$$

Dem.: $\Rightarrow$) $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q) \overset{1}{=} \mathcal{L}(\ell_p \times \ell_{q'}) \overset{1}{=} (\ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_{q'})^*$.

$$\begin{tikzcd}
(x, y) \arrow[d] & \ell_p \times \ell_{q'} \arrow[r, "B_T"] \arrow[d] & \mathbb{K} \\
x \otimes y & \ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_{q'} \arrow[ur, "L_{B_T}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\pi(u) = \inf \left\{ \textstyle\sum_i \|x_i\| \|y_i\| : \; u = \sum_i x_i \otimes y_i \right\}$$

Luego, si $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ es SSD $\Rightarrow$ es reflexivo.

Volviendo al principio: ¡algo más que reflexividad!

$$\mathcal{L}(\ell_p,\ell_q) \text{ es SSD} \iff \mathcal{L}(\ell_p,\ell_q) \text{ es reflexivo } (\iff 1<q<p<\infty).$$

Dem.: $\Rightarrow$) $\mathcal{L}(\ell_p,\ell_q) \overset{1}{=} \mathcal{L}(\ell_p \times \ell_{q'}) \overset{1}{=} (\ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_{q'})^*$.

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[d] \\ x\otimes y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ell_p \times \ell_{q'} \arrow[r, "B_T"] \arrow[d] & \mathbb{K} \\ \ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_{q'} \arrow[ur, "L_{B_T}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\pi(u) = \inf\left\{\textstyle\sum_i \|x_i\|\|y_i\| : \ u = \sum_i x_i \otimes y_i\right\}$$

Luego, si $\mathcal{L}(\ell_p,\ell_q)$ es SSD $\Rightarrow$ es reflexivo.

$\Leftarrow$) Dantas ('16) y Dantas-Rueda Zoca ('21):

propiedad $(\star)$ de operadores $+$ cuentas con tensores.

El caso polinomial

Un *polinomio N-homogéneo* $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ es una función de la forma

$$P(x) = \Phi(x, \dots, x) \quad \text{con} \quad \Phi \in \mathcal{L}(X \times \cdots \times X, Y),$$

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|_Y.$$

$P(z) = \Phi(z, z) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} z_i z_j \in \mathcal{P}(^2\mathbb{C}^n)$, $Q(x) = \sum_i x_i^2 \in \mathcal{P}(^2\ell_2)$.

El caso polinomial

Un *polinomio N-homogéneo* $P \in \mathcal{P}(^N X, Y)$ es una función de la forma

$$P(x) = \Phi(x, \dots, x) \quad \text{con} \quad \Phi \in \mathcal{L}(X \times \cdots \times X, Y),$$

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|_Y.$$

$P(z) = \Phi(z, z) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} z_i z_j \in \mathcal{P}(^2\mathbb{C}^n)$, $Q(x) = \sum_i x_i^2 \in \mathcal{P}(^2\ell_2)$.

Se sabe que son equivalentes:

(a) $\mathcal{P}(^N\ell_p, \ell_q)$ es reflexivo.

(b) Todo $P \in \mathcal{P}(^N\ell_p, \ell_q)$ es débil secuencialmente continuo.

(c) $N \cdot q < p$.

Podemos agregar "$\mathcal{P}(^N\ell_p, \ell_q)$ es SSD" a la equivalencia?

Un caso particular

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD} \Leftrightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es reflexivo (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)}$$

Dem.: $\Rightarrow$) $\mathcal{P}(^N\ell_p) \overset{1}{=} (\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{N,s}\ell_p)^*$ es SSD $\Rightarrow$ es reflexivo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ X \otimes \cdots \otimes X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ell_p \arrow[r, "P"] \arrow[d] & \mathbb{K} \\ \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{N,s}\ell_p \arrow[ur, "L_P"'] & \end{tikzcd}$$

$$\pi_s(u) = \inf\left\{\sum_i \|x_i\|^N : \ u = \sum_i \otimes^N x_i\right\}$$

Un caso particular

$$\mathcal{P}({}^N\ell_p) \text{ es SSD} \Leftrightarrow \mathcal{P}({}^N\ell_p) \text{ es reflexivo (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)}$$

Dem.: $\Leftarrow$) Veamos que $\mathcal{P}({}^N\ell_p)$ tiene la propiedad $(\star)$ polinomial:

si $P \in S_{\mathcal{P}({}^N\ell_p)}$ *casi alcanza* su norma en $x \in S_X$ entonces hay un $z \in S_{\ell_p}$ tal que $z \approx x$ y $|P(z)| = 1$.

Un caso particular

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD} \Leftrightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es reflexivo (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)}$$

Dem.: $\Leftarrow$) Veamos que $\mathcal{P}(^N\ell_p)$ tiene la propiedad $(\star)$ polinomial:

si $P \in S_{\mathcal{P}(^N\ell_p)}$ *casi alcanza* su norma en $x \in S_X$ entonces hay un $z \in S_{\ell_p}$ tal que $z \approx x$ y $|P(z)| = 1$.

Supongamos que no:

$$1 \geq |P(x_n)| \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad dist(x_n, \{z : \ |P(z)| = 1\}) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Podemos asumir $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y, por hipótesis, $|P(x_0)| = 1$. Pero

$$\text{si } x_n \xrightarrow{w} x_0 \text{ y } \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\| \text{ entonces } x_n \longrightarrow x_0 \text{ (propiedad de } \ell_p)$$

lo cual es una contradicción.

Un caso particular

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD} \Leftrightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es reflexivo (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)}$$

Dem.: $\Leftarrow$) (continuación)

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ tiene propiedad } (\star) \Rightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD.}$$

Un caso particular

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD} \Leftrightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es reflexivo (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)}$$

Dem.: $\Leftarrow$) (continuación)

$$\mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ tiene propiedad } (\star) \Rightarrow \mathcal{P}(^N\ell_p) \text{ es SSD.}$$

Given $P \in S_{\mathcal{P}(^N X)}$ and $\varepsilon > 0$, we want to find $\delta > 0$ such that

$$\frac{\|P + tQ\| - 1}{t} - \tau(P, Q) < \varepsilon$$

for every $0 < t < \delta$ and every $Q \in S_{\mathcal{P}(^N X)}$. Take $\delta = \frac{\eta(\varepsilon, P)}{2}$.

If $(P + tQ)(x_t) = \|P + tQ\|$, then $P(x_t) > 1 - 2t > 1 - \eta(\varepsilon, P)$. By hypothesis, there exist $z \in S_X$ such that

$$\widehat{\otimes^N z}(P) = P(z) = 1 \quad \text{and} \quad \|z - x_t\| < \varepsilon.$$

Then,

$$\begin{aligned} \frac{\|P + tQ\| - 1}{t} - \tau(P, Q) &\leq \frac{[(P + tQ)(x_t)] - [P(x_t)]}{t} - \tau(P, Q) \\ &= [Q(x_t)] - \tau(P, Q) \\ &\leq [Q(x_t)] - [Q(z)] \leq \|x_t - z\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Teorema (Dantas-Jung-M.-Rodríguez)

Sean X reflexivo + propiedad de aproximación + Kadec-Klee secuencial e Y uniformemente suave. Son equivalentes:

(a) $\mathcal{P}(^N X, Y)$ es SSD.

(b) $\mathcal{P}(^N X, Y)$ es reflexivo.

(c) $\mathcal{P}(^N X, Y) = \mathcal{P}_{wsc}(^N X, Y)$.

(d) $\mathcal{P}(^N X, Y)$ tiene la propiedad $(\star)$ para polinomios.

Como consecuencia:

(i) $\mathcal{P}(^N \ell_p, \ell_q)$ es SSD $\iff N \cdot q < p$.

(ii) $\mathcal{P}(^N l_{M_1}, l_{M_2})$ es SSD $\iff N \cdot \beta_{M_2} < \alpha_{M_1}$.

(iii) $\mathcal{P}(^N d(w, p))$ es SSD $\iff N < p$.

¿Y en espacios de tensores?

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] \\ x \otimes \cdots \otimes x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d] & \mathbb{K} \\ \widehat{\bigotimes}^{N,s}_{\pi_s} X \arrow[ur, "L_P"'] & \end{tikzcd}$$

$$\pi_s(u) = \inf \left\{ \sum_i \|x_i\|^N : \; u = \sum_i \otimes^N x_i \right\}$$

¿Y en espacios de tensores?

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x\otimes\cdots\otimes x \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "P"] \arrow[d] & \mathbb{K} \\
\widehat{\bigotimes}^{N,s}_{\pi_s} X \arrow[ur, "L_P"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\pi_s(u) = \inf\left\{\sum_i \|x_i\|^N : \ u = \sum_i \otimes^N x_i\right\}$$

Sub-diferenciabilidad de $\mathcal{P}(^N X) \longleftrightarrow$ propiedad $(\star)$ polinomial,

$\widehat{\bigotimes}^{N,s}_{\pi_s} X$ es el predual de $\mathcal{P}(^N X)\ldots$

¿sub-diferenciabilidad de $\widehat{\bigotimes}^{N,s}_{\pi_s} X \longleftrightarrow$ propiedad $(\star)$-dual polinomial?

$(\star)$-dual polinomial: si $P \in S_{\mathcal{P}(^N X)}$ *casi alcanza* su norma en $x_0 \in S_X$ entonces hay un $Q \in S_{\mathcal{P}(^N X)}$ tal que $Q \approx P$ y $|Q(x_0)| = 1$

Resultados positivos (Dantas-Mingu-M.-Rodríguez)

(i) $\mathcal{P}(^N\ell_2)$ tiene propiedad $(\star)$-dual polinomial.
(ii) $\mathcal{P}(^2c_0)$ tiene propiedad $(\star)$-dual polinomial (en el caso complejo).

$\mathcal{P}(^N X)$ tiene $(\star)$-dual $\Leftrightarrow$ *(linealizamos a ver qué pasa)*

Resultados positivos (Dantas-Mingu-M.-Rodríguez)

(i) $\mathcal{P}(^N\ell_2)$ tiene propiedad $(\star)$-dual polinomial.
(ii) $\mathcal{P}(^2c_0)$ tiene propiedad $(\star)$-dual polinomial (en el caso complejo).

$\mathcal{P}(^NX)$ tiene $(\star)$-dual $\Leftrightarrow$ *(linealizamos a ver qué pasa)*

¿Qué pasa? $\widehat{\otimes}^N_{\pi_s} X$ tiene $(\star)$-dual en tensores elementales.
Y esto equivale a...

$$\ldots\widehat{\otimes}^N_{\pi_s} X \text{ es SSD en } U_s = \{\otimes^N x : \ \|x\| = 1\}.$$

Como consecuencia:
(i) $\widehat{\otimes}^N_{\pi_s} \ell_2$ es SSD en $U_s = \{\otimes^N x : \ \|x\| = 1\}$.
(ii) $\widehat{\otimes}^2_{\pi_s} c_0$ es SSD en $U_s = \{\otimes^2 x : \ \|x\| = 1\}$ (en el caso complejo).

¡Gracias!