Una caracterización de espacios de Sobolev fraccionarios con pesos

Reunión Anual de la UMA - 23 de septiembre de 2022

Irene Drelichman (con G. Acosta y R.G. Durán)

Instituto de Matemática "Luis A. Santaló" (CONICET-UBA) & Universidad Nacional de La Plata

Espacios de Sobolev fraccionarios

Para $0 < s < 1$ y $1 \leq p < \infty$, la seminorma de Gagliardo o de Sobolev fraccionaria se define como

$$|f|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy.$$

El espacio de Sobolev fraccionario $W^{s,p}(\Omega)$ está dado por

$$W^{s,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : |f|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty\}$$

que es una espacio de Banach con la norma

$$\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + |f|^p_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Cuando Ω es bueno se puede caracterizar como espacio de interpolación.

El método de interpolación real

Si $f \in L^p(\Omega)$ y $t > 0$, definimos

$$K(f,t) = \inf_{h \in W^{1,p}(\Omega)} \Big(\|f - h\|_{L^p(\Omega)} + t\|h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \Big).$$

Si $K(f,t) < \varepsilon$ para algún $t > 0$, entonces

- existe una función "pequeña" $h \in W^{1,p}(\Omega)$, es decir $\|h\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon t^{-1}$
- que aproxima a f con error $\|f - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.

Para $0 < s < 1$ el espacio de interpolación real está dado por

$$(L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p} = \Big\{ f \in L^p(\Omega) : \int_0^\infty t^{-sp} K(f,t)^p \,\frac{dt}{t} < \infty \Big\}$$

Se puede ver que, si $0 < s_1 < s_2 < 1$,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset (L^p, W^{1,p})_{s_2,p} \subset (L^p, W^{1,p})_{s_1,p} \subset L^p(\Omega).$$

Además, si $\Omega = \mathbb{R}^n$ o es un dominio de extensión, se sabe que

$$W^{s,p}(\Omega) = (L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega))_{s,p}.$$

- La parte "fácil" es probar que

$$(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n).$$

- Para probar la otra inclusión, para cada $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$ necesitamos una buena aproximación de f, $h_t \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

  La forma usual es tomar $h_t = f * \varphi_t$ con $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\mathrm{sop}(\varphi) \subset B(0,1)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$.

Idea de la prueba de $W^{s,p} \subset (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$

Para cada $f \in W^{s,p}$ y $t > 0$ consideramos

$$h_t(x) = (f * \varphi_t)(x) = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy$$

Entonces

$$f(x) - h_t(x) = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x))\, \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy$$

$$\begin{aligned} \|f(x) - h_t(x)\|_{L_p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|\, \frac{1}{t^n}\, \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy \Big)^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|^p\, \frac{1}{t^n}\, \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy\, dx \end{aligned}$$

Idea de la prueba de $W^{s,p} \subset (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$

En la integral, usamos Hölder, Fubini y el soporte de φ y tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty & t^{-sp} \|f(x) - h_t(x)\|_{L_p}^p \frac{dt}{t} \\
&\leq t^{-sp} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|^p \frac{1}{t^n} \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big) \, dy \, dx \, \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|^p \int_0^\infty t^{-sp} \frac{1}{t^n} \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big) \frac{dt}{t} \, dy \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|^p \int_{|x-y|}^\infty t^{-sp} \frac{1}{t^n} \varphi\Big(\frac{x-y}{t}\Big) \frac{dt}{t} \, dy \, dx \\
&\lesssim \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \, dy \, dx = C|f|_{W^{s,p}}^p
\end{aligned}$$

Idea de la prueba de $W^{s,p} \subset (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$

Por otro lado, $\|h_t\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^1} = \|f\|_{L^p}$ y usando que

$$\frac{\partial h_t}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy$$

y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y}{t}\Big)\, dy = 0$$

con una cuenta similar a la de $f - h_t$ se obtiene

$$\int_0^\infty t^{(1-s)p} \left\|\frac{\partial h_t}{\partial x_i}\right\|_{L^p} \frac{dt}{t} \lesssim \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_\infty |f|^p_{W^{s,p}}.$$

$W^{s,p} \subset (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$

En definitiva,

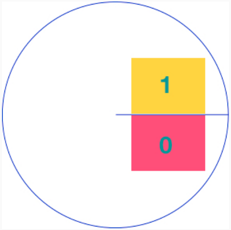
$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{(L^p, W^{1,p})} &= \int_0^\infty t^{-sp} K(f,t)^p \, \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty t^{-sp} \|f - h_t\|^p_{L^p} + t^{(1-s)p} \|h_t\|^p_{W^{1,p}} \, \frac{dt}{t} \\
&\leq C \|f\|^p_{W^{s,p}}.
\end{aligned}$$

Junto a la parte "fácil", resulta $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = (L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{s,p}$.

Esta caracterización de $W^{s,p}$ también es válida si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de extensión, pero no en dominios acotados arbitrarios.

Ejemplo

Sea $\Omega = B(0,1) \setminus ([0,1] \times \{0\})$



$f \in C^\infty(\Omega)$ y acotada tal que f tiene un salto en el segmento contenido en $(0,1)$. Entonces $f \in W^{1,p}(\Omega)$ pero $W^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(B(0,1))$, y se sabe que una función en este espacio no puede tener un salto si $s > 1/p$.

Por lo tanto, $f \notin W^{s,p}(\Omega)$ si $s > 1/p$.

De alguna manera hay que incorporar la distancia al borde del dominio.

Espacios de Sobolev fraccionarios con pesos

En un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado arbitrario podemos definir $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$, $\delta(x, y) = \min\{d(x), d(y)\}$ y

$$|f|^p_{W^{s,p}(\Omega,\delta^\alpha)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} \delta(x, y)^\alpha \, dy \, dx.$$

El correspondiente espacio fraccionario es

$$W^{s,p}(\Omega, \delta^\alpha) = \{f \in L^p(\Omega) \colon |f|_{W^{s,p}(\Omega,\delta^\alpha)} < \infty\}.$$

Esta seminorma fraccionaria aparece en las llamadas desigualdades de Poincaré fraccionarias mejoradas.

Desigualdades de Poincaré mejoradas

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de John acotado (clase que incluye a los Lipschitz) y $\bar{f}$ el promedio de f, llamamos desigualdad de Poincaré mejorada a

$$\|f - \bar{f}\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|d\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \qquad (1 \leq p < \infty).$$

En el caso fraccionario esta desigualdad se generaliza a

$$\int_\Omega |f - \bar{f}|^p \leq C \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} \, \delta(x, y)^{sp} \, dy \, dx.$$

¿Se puede caracterizar el espacio $W^{s,p}(\Omega, \delta^{sp})$ como espacio de interpolación (incluyendo el peso en alguno de los extremos)?

¡Sí!

Si definimos

$$W^{1,p}(\Omega, d^\alpha) = \{f \in L^p(\Omega) \colon \int_\Omega |\nabla f|^p d^\alpha < \infty\}$$

se puede probar:

Teorema (Acosta, D., Durán)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado arbitrario. Entonces, para $0 < s < 1$,

$$W^{s,p}(\Omega, \delta^{sp}) = (L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega, d^p))_{s,p}$$

Idea de la prueba

La parte "fácil" es otra vez

$$(L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega, d^p))_{s,p} \subset W^{s,p}(\Omega, \delta^{sp})$$

La parte más difícil es nuevamente la otra inclusión:

$$W^{s,p}(\Omega, \delta^{sp}) \subset (L^p(\Omega), W^{1,p}(\Omega, d^p))_{s,p}.$$

Debemos construir, para cada $f \in W^{s,p}(\Omega, \delta^{sp})$, aproximaciones h_t tales que

$$\int_0^\infty t^{-sp}(\|f - h_t\|_p + t\|d\nabla h_t\|_p)^p \frac{dt}{t} \leq C\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega,\delta^{sp})}.$$

Idea de la prueba

Definimos

$$h_t(y) = \sum_j f_{t,j}\varphi_{t,j}(y)$$

donde, para cada t, $\{\varphi_{t,j}\}$ es una partición de la unidad adecuada y $f_{t,j}$ es un promedio suavizado de f sobre $\Omega_{t,j}$ (el soporte de $\varphi_{t,j}$).

Entonces tenemos

$$|(f - h_t)(y)| = |f(y) - \sum_j f_{t,j}\varphi_{t,j}(y)| = |\sum_j (f(y) - f_{t,j})\varphi_{t,j}(y)|$$

$$\Rightarrow \|f - h_t\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_j \|f - f_{t,j}\|^p_{L^p(\Omega_{t,j})}$$

Poincaré nos dice que $\|f - f_{t,j}\|^p_{L^p(\Omega_{t,j})} \leq Ct^{sp}|f|^p_{W^{s,p}(\Omega_{t,j},\delta^{sp})}$ (inútil), pero una modificación cuidadosa de su demostración permite obtener

$$\int_0^\infty t^{-sp}\|f - h_t\|^p_{L^p(\Omega)} \frac{dt}{t} \leq C\|f\|^p_{W^{s,p}(\Omega,\delta^{sp})}.$$

Idea de la prueba

Para el otro término que aparece en el funcional K debemos acotar

$$|(\nabla h_t)(y)| = |\sum_j f_{t,j} \nabla \varphi_{t,j}(y)| = |\sum_j (f(y) - f_{t,j}) \nabla \varphi_{t,j}(y)|$$

Como en el funcional K aparece $\|d\nabla h_t\|_{L^p(\Omega)}$, necesitamos controlar $d\nabla \varphi_{t,j}$. Vagamente hablando, esto permite que los $\Omega_{t,j}$ se achiquen a medida que nos acercamos al borde del dominio.

Es decir que podemos usar las descomposiciones de Whitney y las particiones de la unidad asociadas.

En particular, no necesitamos ninguna hipótesis sobre el dominio, ya que las descomposiciones de Whitney existen en abiertos arbitrarios.

¡Muchas gracias por su atención!

¿Preguntas? ¿comentarios?