Pares de Gelfand generalizados asociados a grupos de Lie m-pasos nilpotentes

Dra. Silvina Campos, Dr. José García, Dra. Linda Saal

UMA 2022, Neuquén

22 de septiembre de 2022

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad.La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad.La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad. La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad.La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad.La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

Motivación

Sea G un grupo de Lie unimodular y K un subgrupo compacto de G y $\mathcal{D}(G/K)$ el espacio de las funciones C^∞ sobre G/K con soporte compacto.

Sea $\hat{G}$ el conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias irreducibles de G. Para una amplia clase de grupos de Lie, si $(\pi, \mathcal{H})$ es una representación unitaria de G entonces

$$\pi = \int_{\widehat{G}} m_\pi(\tau)\tau d\mu(\tau),$$

donde μ es una medida de Borel sobre $\widehat{G}$ y $m_\pi : \widehat{G} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es la multiplicidad.La representación $(\pi, \mathcal{H})$ es multiplicity free si $m_\pi(\tau) \leq 1$ para μ-casi todo $\tau \in \widehat{G}$ (ver Kobayashi).

(K, G) es un par de Gelfand si cualquier representación unitaria de G realizada en $\mathcal{D}'(G/K)$ es multiplicity free.

Benson, Jenkins y Ratcliff probaron que si (K, N) es un par de Gelfand entonces N es abeliano o dos pasos nilpotentes.

El álgebra $(m+2)$-pasos nilpotente $\mathfrak{n}_m$

Sea $\mathfrak{n}_m$ el álgebra de Lie con base $\{e_m, \ldots, e_1, e_x, e_y, e_t\}$ y corchete de Lie definido por

$$\begin{aligned}
[e_i, e_x] &= e_{i-1} \quad \forall i \geq 2 \\
[e_1, e_x] &= e_y \\
[e_x, e_y] &= e_t
\end{aligned}$$

y cero en cualquier otro caso.
Claramente, $\{e_{m-j}, \ldots, e_1, e_y, e_t\}$ es base de $\mathfrak{n}_m^j := [\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_m^{j-1}]$ para todo $j \geq 1$ y entonces $\mathfrak{n}_m$ **es** $(m+2)$**-pasos nilpotente.**

Consideremos el subgrupo de automorfismos θ_s, $s \in \mathbb{R}$, de $\mathfrak{n}_m$ definidos por

$$\theta_s \cdot e_j = e_j \quad \forall j = 1, \ldots, m, \quad \theta_s \cdot e_x = s e_m + e_x, \quad \theta_s \cdot e_y = e_y, \quad \theta_s \cdot e_t = e_t \tag{1}$$

y sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de sus correspondientes derivaciones. El corchete de Lie de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$ viene dado por

$$[(s, n), (s', n')] = (0, s \cdot n' - s' \cdot n + [n, n']) \tag{2}$$

y claramente $\mathfrak{n}_{m+1} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$.

El álgebra $(m+2)$-pasos nilpotente $\mathfrak{n}_m$

Sea $\mathfrak{n}_m$ el álgebra de Lie con base $\{e_m, \ldots, e_1, e_x, e_y, e_t\}$ y corchete de Lie definido por

$$[e_i, e_x] = e_{i-1} \quad \forall i \geq 2$$
$$[e_1, e_x] = e_y$$
$$[e_x, e_y] = e_t$$

y cero en cualquier otro caso.
Claramente, $\{e_{m-j}, \ldots, e_1, e_y, e_t\}$ es base de $\mathfrak{n}_m^j := [\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_m^{j-1}]$ para todo $j \geq 1$ y entonces $\mathfrak{n}_m$ **es $(m+2)$-pasos nilpotente.**

Consideremos el subgrupo de automorfismos θ_s, $s \in \mathbb{R}$, de $\mathfrak{n}_m$ definidos por

$$\theta_s \cdot e_j = e_j \quad \forall j = 1, \ldots, m, \quad \theta_s \cdot e_x = s e_m + e_x, \quad \theta_s \cdot e_y = e_y, \quad \theta_s \cdot e_t = e_t \tag{1}$$

y sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de sus correspondientes derivaciones. El corchete de Lie de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$ viene dado por

$$[(s, n), (s', n')] = (0, s \cdot n' - s' \cdot n + [n, n']) \tag{2}$$

y claramente $\mathfrak{n}_{m+1} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$.

El álgebra $(m+2)$-pasos nilpotente $\mathfrak{n}_m$

Sea $\mathfrak{n}_m$ el álgebra de Lie con base $\{e_m, \dots, e_1, e_x, e_y, e_t\}$ y corchete de Lie definido por

$$\begin{aligned} [e_i, e_x] &= e_{i-1} \quad \forall i \geq 2 \\ [e_1, e_x] &= e_y \\ [e_x, e_y] &= e_t \end{aligned}$$

y cero en cualquier otro caso.
Claramente, $\{e_{m-j}, \dots, e_1, e_y, e_t\}$ es base de $\mathfrak{n}_m^j := [\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_m^{j-1}]$ para todo $j \geq 1$ y entonces $\mathfrak{n}_m$ **es** $(m+2)$**-pasos nilpotente.**

Consideremos el subgrupo de automorfismos θ_s, $s \in \mathbb{R}$, de $\mathfrak{n}_m$ definidos por

$$\theta_s \cdot e_j = e_j \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \theta_s \cdot e_x = s e_m + e_x, \quad \theta_s \cdot e_y = e_y, \quad \theta_s \cdot e_t = e_t \tag{1}$$

y sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de sus correspondientes derivaciones. El corchete de Lie de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$ viene dado por

$$[(s, n), (s', n')] = (0, s \cdot n' - s' \cdot n + [n, n']) \tag{2}$$

y claramente $\mathfrak{n}_{m+1} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$.

El álgebra $(m+2)$-pasos nilpotente $\mathfrak{n}_m$

Sea $\mathfrak{n}_m$ el álgebra de Lie con base $\{e_m, \dots, e_1, e_x, e_y, e_t\}$ y corchete de Lie definido por

$$\begin{aligned} [e_i, e_x] &= e_{i-1} \quad \forall i \geq 2 \\ [e_1, e_x] &= e_y \\ [e_x, e_y] &= e_t \end{aligned}$$

y cero en cualquier otro caso.
Claramente, $\{e_{m-j}, \dots, e_1, e_y, e_t\}$ es base de $\mathfrak{n}_m^j := [\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_m^{j-1}]$ para todo $j \geq 1$ y entonces $\mathfrak{n}_m$ **es** $(m+2)$**-pasos nilpotente.**

Consideremos el subgrupo de automorfismos θ_s, $s \in \mathbb{R}$, de $\mathfrak{n}_m$ definidos por

$$\theta_s \cdot e_j = e_j \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad \theta_s \cdot e_x = s e_m + e_x, \quad \theta_s \cdot e_y = e_y, \quad \theta_s \cdot e_t = e_t \tag{1}$$

y sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de sus correspondientes derivaciones. El corchete de Lie de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$ viene dado por

$$[(s,n),(s',n')] = (0, s \cdot n' - s' \cdot n + [n, n']) \tag{2}$$

y claramente $\mathfrak{n}_{m+1} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$.

El álgebra $(m+2)$-pasos nilpotente $\mathfrak{n}_m$

Sea $\mathfrak{n}_m$ el álgebra de Lie con base $\{e_m, \ldots, e_1, e_x, e_y, e_t\}$ y corchete de Lie definido por

$$\begin{aligned}
[e_i, e_x] &= e_{i-1} \quad \forall i \geq 2 \\
[e_1, e_x] &= e_y \\
[e_x, e_y] &= e_t
\end{aligned}$$

y cero en cualquier otro caso.
Claramente, $\{e_{m-j}, \ldots, e_1, e_y, e_t\}$ es base de $\mathfrak{n}_m^j := [\mathfrak{n}_m, \mathfrak{n}_m^{j-1}]$ para todo $j \geq 1$ y entonces $\mathfrak{n}_m$ **es** $(m+2)$**-pasos nilpotente.**

Consideremos el subgrupo de automorfismos θ_s, $s \in \mathbb{R}$, de $\mathfrak{n}_m$ definidos por

$$\theta_s \cdot e_j = e_j \quad \forall j = 1, \ldots, m, \quad \theta_s \cdot e_x = s e_m + e_x, \quad \theta_s \cdot e_y = e_y, \quad \theta_s \cdot e_t = e_t \tag{1}$$

y sea $\mathfrak{s}$ el álgebra de sus correspondientes derivaciones. El corchete de Lie de $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$ viene dado por

$$[(s,n),(s',n')] = (0, s \cdot n' - s' \cdot n + [n, n']) \tag{2}$$

y claramente $\mathfrak{n}_{m+1} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{n}_m$.

Sea N_m el grupo de Lie simplemente conexo $(m+3)$-dimensional con álgebra de Lie $\mathfrak{n}_m$. Sea S el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente al subgrupo de automorfismos de $\mathfrak{n}_m$ definidos en (1). Entonces, $\mathfrak{n}_{m+1}$ es el álgebra de Lie de $S \ltimes N_m$.

Teorema

La aplicación exponencial $exp : \mathfrak{n}_m \to N_m$ está definida por

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} s_i e_i + x e_x + y e_y + t e_t \\ &\mapsto \left(s_m, \ldots, \sum_{i=0}^{m-j} s_{j+i} \frac{x^i}{i+1!}, \ldots, \sum_{i=0}^{m-1} s_{i+1} \frac{x^i}{i+1!}, x, y + \sum_{i=1}^{m} s_i \frac{x^i}{i+1!}, t + \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{2} s_i \frac{x^{i+1}}{i+2!} \right) \end{aligned}$$

Sea N_m el grupo de Lie simplemente conexo $(m+3)$-dimensional con álgebra de Lie $\mathfrak{n}_m$. Sea S el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente al subgrupo de automorfismos de $\mathfrak{n}_m$ definidos en (1). Entonces, $\mathfrak{n}_{m+1}$ es el álgebra de Lie de $S \ltimes N_m$.

Teorema

La aplicación exponencial $exp : \mathfrak{n}_m \to N_m$ *está definida por*

$$\sum_{i=1}^{m} s_i e_i + x e_x + y e_y + t e_t$$
$$\mapsto \left(s_m, \ldots, \sum_{i=0}^{m-j} s_{j+i} \frac{x^i}{i+1!}, \ldots, \sum_{i=0}^{m-1} s_{i+1} \frac{x^i}{i+1!}, x, y + \sum_{i=1}^{m} s_i \frac{x^i}{i+1!}, t + \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{2} s_i \frac{x^{i+1}}{i+2!} \right)$$

Las órbitas coadjuntas

Dado $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ no trivial; sea $\mathcal{O}_\Lambda = \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N_m\}$ su órbita coadjunta. Denotamos por $\Lambda = (\overline{\alpha}, \mu, \nu, \lambda)$ a los elementos de $\mathfrak{n}_m^*$, donde $\overline{\alpha} = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1) \in \mathbb{R}^m$. Con esta notación, la acción de $\mathfrak{n}_m^*$ sobre $\mathfrak{n}_m$ viene dada por

$$\langle(\alpha_m, ..., \alpha_1, \mu, \nu, \lambda), (s_m, ..., s_1, x, y, t)\rangle = \alpha_m s_m + \cdots + \alpha_1 s_1 + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Teorema

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\lambda \neq 0$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \left(-\frac{(-x)^{m+1}}{m+1!}\lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k}, \ldots, -\frac{x^2}{2!}\lambda + \alpha_1, \mu, x\lambda, \lambda \right) : \mu, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k} + \frac{(-x)^m}{m!}\nu, \ldots, \alpha_2 - x\alpha_1 + \frac{x^2}{2!}\nu, \alpha_1 - x\nu, \beta, \nu, 0 \right) : \beta, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ es

$$\mathcal{O}_{\alpha_m,\mu} = \{(\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)\}$$

Las órbitas coadjuntas

Dado $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ no trivial; sea $\mathcal{O}_\Lambda = \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N_m\}$ su órbita coadjunta. Denotamos por $\Lambda = (\overline{\alpha}, \mu, \nu, \lambda)$ a los elementos de $\mathfrak{n}_m^*$, donde $\overline{\alpha} = (\alpha_m, \dots, \alpha_1) \in \mathbb{R}^m$. Con esta notación, la acción de $\mathfrak{n}_m^*$ sobre $\mathfrak{n}_m$ viene dada por

$$\langle (\alpha_m, ..., \alpha_1, \mu, \nu, \lambda), (s_m, ..., s_1, x, y, t) \rangle = \alpha_m s_m + \cdots + \alpha_1 s_1 + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Teorema

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\lambda \neq 0$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \left(-\frac{(-x)^{m+1}}{m+1!}\lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k}, \dots, -\frac{x^2}{2!}\lambda + \alpha_1, \mu, x\lambda, \lambda \right) : \mu, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \dots, m-1\}$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k} + \frac{(-x)^m}{m!}\nu, \dots, \alpha_2 - x\alpha_1 + \frac{x^2}{2!}\nu, \alpha_1 - x\nu, \beta, \nu, 0 \right) : \beta, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\alpha_m, 0, \dots, 0, \mu, 0, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ es

$$\mathcal{O}_{\alpha_m,\mu} = \{(\alpha_m, 0, \dots, 0, \mu, 0, 0)\}$$

Las órbitas coadjuntas

Dado $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ no trivial; sea $\mathcal{O}_\Lambda = \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N_m\}$ su órbita coadjunta. Denotamos por $\Lambda = (\overline{\alpha}, \mu, \nu, \lambda)$ a los elementos de $\mathfrak{n}_m^*$, donde $\overline{\alpha} = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1) \in \mathbb{R}^m$. Con esta notación, la acción de $\mathfrak{n}_m^*$ sobre $\mathfrak{n}_m$ viene dada por

$$\langle (\alpha_m, ..., \alpha_1, \mu, \nu, \lambda), (s_m, ..., s_1, x, y, t) \rangle = \alpha_m s_m + \cdots + \alpha_1 s_1 + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Teorema

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{n}_m^*$ *con* $\lambda \neq 0$ *es*

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \left(-\frac{(-x)^{m+1}}{m+1!}\lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k}, \ldots, -\frac{x^2}{2!}\lambda + \alpha_1, \mu, x\lambda, \lambda \right) : \mu, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ *con* $\nu \neq 0$ *ó* $\alpha_j \neq 0$ *y* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ *para algún* $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ *es*

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k} + \frac{(-x)^m}{m!}\nu, \ldots, \alpha_2 - x\alpha_1 + \frac{x^2}{2!}\nu, \alpha_1 - x\nu, \beta, \nu, 0 \right) : \beta, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ *es*

$$\mathcal{O}_{\alpha_m,\mu} = \{(\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)\}$$

Las órbitas coadjuntas

Dado $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ no trivial; sea $\mathcal{O}_\Lambda = \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N_m\}$ su órbita coadjunta. Denotamos por $\Lambda = (\overline{\alpha}, \mu, \nu, \lambda)$ a los elementos de $\mathfrak{n}_m^*$, donde $\overline{\alpha} = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1) \in \mathbb{R}^m$. Con esta notación, la acción de $\mathfrak{n}_m^*$ sobre $\mathfrak{n}_m$ viene dada por

$$\langle (\alpha_m, ..., \alpha_1, \mu, \nu, \lambda), (s_m, ..., s_1, x, y, t)\rangle = \alpha_m s_m + \cdots + \alpha_1 s_1 + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Teorema

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\lambda \neq 0$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \left(-\frac{(-x)^{m+1}}{m+1!}\lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k}, \ldots, -\frac{x^2}{2!}\lambda + \alpha_1, \mu, x\lambda, \lambda \right) : \mu, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k} + \frac{(-x)^m}{m!}\nu, \ldots, \alpha_2 - x\alpha_1 + \frac{x^2}{2!}\nu, \alpha_1 - x\nu, \beta, \nu, 0 \right) : \beta, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ es

$$\mathcal{O}_{\alpha_m,\mu} = \{(\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)\}$$

Las órbitas coadjuntas

Dado $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ no trivial; sea $\mathcal{O}_\Lambda = \{Ad^*(n)\Lambda : n \in N_m\}$ su órbita coadjunta. Denotamos por $\Lambda = (\overline{\alpha}, \mu, \nu, \lambda)$ a los elementos de $\mathfrak{n}_m^*$, donde $\overline{\alpha} = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1) \in \mathbb{R}^m$. Con esta notación, la acción de $\mathfrak{n}_m^*$ sobre $\mathfrak{n}_m$ viene dada por

$$\langle(\alpha_m, ..., \alpha_1, \mu, \nu, \lambda), (s_m, ..., s_1, x, y, t)\rangle = \alpha_m s_m + \cdots + \alpha_1 s_1 + \mu x + \nu y + \lambda t.$$

Teorema

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\lambda \neq 0$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \left(-\frac{(-x)^{m+1}}{m+1!}\lambda + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k}, \ldots, -\frac{x^2}{2!}\lambda + \alpha_1, \mu, x\lambda, \lambda \right) : \mu, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ es

$$\mathcal{O}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-x)^k}{k!}\alpha_{m-k} + \frac{(-x)^m}{m!}\nu, \ldots, \alpha_2 - x\alpha_1 + \frac{x^2}{2!}\nu, \alpha_1 - x\nu, \beta, \nu, 0 \right) : \beta, x \in \mathbb{R} \right\}$$

La órbita coadjunta de $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0) \in \mathfrak{n}_m^*$ es

$$\mathcal{O}_{\alpha_m,\mu} = \{(\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)\}$$

Representación irreducible de N_m

Calculamos explícitamente la representación irreducible de N_m correspondiente a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda$ para cada Λ en $\mathfrak{n}_m^*$. En efecto, sea B_Λ la forma skew-symmetric definida por

$$B_\Lambda(u;v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}_m.$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un subespacio maximal isotrópico de $\mathfrak{n}_m$, y $M_\Lambda = exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definiendo sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(exp(u)) = e^{i\Lambda u}$, la representación irreducible de N_m correspondiente a $\mathcal{O}_\Lambda$ es la representación inducida $(\rho_\Lambda, H_\Lambda)$ donde H_Λ es la completación de

$$\{f \in C_c(N_m) : f(gh) = \chi_\Lambda(h^{-1})f(g) \text{ for all } h \in M_\Lambda,\ g \in N_m\}$$

con respecto al producto escalar

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{N_m/M_\Lambda} f_1(u)\overline{f_2(u)}du,$$

y la acción es la representación regular a izquierda, esto es

$$\left[\rho_\Lambda(g)f\right](g') = f(g^{-1}g'), \quad g,g' \in N_m.$$

Representación irreducible de N_m

Calculamos explícitamente la representación irreducible de N_m correspondiente a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda$ para cada Λ en $\mathfrak{n}_m^*$. En efecto, sea B_Λ la forma skew-symmetric definida por

$$B_\Lambda(u;v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}_m.$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un subespacio maximal isotrópico de $\mathfrak{n}_m$, y $M_\Lambda = exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definiendo sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(exp(u)) = e^{i\Lambda u}$, la representación irreducible de N_m correspondiente a $\mathcal{O}_\Lambda$ es la representación inducida $(\rho_\Lambda, H_\Lambda)$ donde H_Λ es la completación de

$$\{f \in C_c(N_m) : f(gh) = \chi_\Lambda(h^{-1})f(g) \text{ for all } h \in M_\Lambda,\ g \in N_m\}$$

con respecto al producto escalar

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{N_m/M_\Lambda} f_1(u)\overline{f_2(u)}du,$$

y la acción es la representación regular a izquierda, esto es

$$[\rho_\Lambda(g)f](g') = f(g^{-1}g'), \quad g, g' \in N_m.$$

Representación irreducible de N_m

Calculamos explícitamente la representación irreducible de N_m correspondiente a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda$ para cada Λ en $\mathfrak{n}_m^*$. En efecto, sea B_Λ la forma skew-symmetric definida por

$$B_\Lambda(u;v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}_m.$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un subespacio maximal isotrópico de $\mathfrak{n}_m$, y $M_\Lambda = exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definiendo sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(exp(u)) = e^{i\Lambda u}$, la representación irreducible de N_m correspondiente a $\mathcal{O}_\Lambda$ es la representación inducida $(\rho_\Lambda, H_\Lambda)$ donde H_Λ es la completación de

$$\{f \in C_c(N_m) : f(gh) = \chi_\Lambda(h^{-1})f(g) \text{ for all } h \in M_\Lambda,\ g \in N_m\}$$

con respecto al producto escalar

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{N_m/M_\Lambda} f_1(u)\overline{f_2(u)}du,$$

y la acción es la representación regular a izquierda, esto es

$$[\rho_\Lambda(g)f](g') = f(g^{-1}g'),\quad g,g' \in N_m.$$

Representación irreducible de N_m

Calculamos explícitamente la representación irreducible de N_m correspondiente a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda$ para cada Λ en $\mathfrak{n}_m^*$. En efecto, sea B_Λ la forma skew-symmetric definida por

$$B_\Lambda(u;v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}_m.$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un subespacio maximal isotrópico de $\mathfrak{n}_m$, y $M_\Lambda = exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definiendo sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(exp(u)) = e^{i\Lambda u}$, la representación irreducible de N_m correspondiente a $\mathcal{O}_\Lambda$ es la representación inducida $(\rho_\Lambda, H_\Lambda)$ donde H_Λ es la completación de

$$\{f \in C_c(N_m) : f(gh) = \chi_\Lambda(h^{-1})f(g) \text{ for all } h \in M_\Lambda,\ g \in N_m\}$$

con respecto al producto escalar

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{N_m/M_\Lambda} f_1(u)\overline{f_2(u)}du,$$

y la acción es la representación regular a izquierda, esto es

$$[\rho_\Lambda(g)f](g') = f(g^{-1}g'), \quad g,g' \in N_m.$$

Representación irreducible de N_m

Calculamos explícitamente la representación irreducible de N_m correspondiente a la órbita $\mathcal{O}_\Lambda$ para cada Λ en $\mathfrak{n}_m^*$. En efecto, sea B_Λ la forma skew-symmetric definida por

$$B_\Lambda(u;v) := \Lambda([u,v]),\ u,v \in \mathfrak{n}_m.$$

Sea $\mathfrak{M}_\Lambda$ un subespacio maximal isotrópico de $\mathfrak{n}_m$, y $M_\Lambda = exp(\mathfrak{M}_\Lambda)$. Definiendo sobre M_Λ el caracter $\chi_\Lambda(exp(u)) = e^{i\Lambda u}$, la representación irreducible de N_m correspondiente a $\mathcal{O}_\Lambda$ es la representación inducida $(\rho_\Lambda, H_\Lambda)$ donde H_Λ es la completación de

$$\{f \in C_c(N_m) : f(gh) = \chi_\Lambda(h^{-1})f(g) \text{ for all } h \in M_\Lambda,\ g \in N_m\}$$

con respecto al producto escalar

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{N_m/M_\Lambda} f_1(u)\overline{f_2(u)}du,$$

y la acción es la representación regular a izquierda, esto es

$$\left[\rho_\Lambda(g)f\right](g') = f(g^{-1}g'), \quad g, g' \in N_m.$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$. Un subespacio isotrópico maximal asociado a Λ viene dado por

$$\mathfrak{M}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i e_i + y e_y + t e_t \in \mathfrak{n}_m : s_i, y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos identificar H_Λ con $L^2(\mathbb{R})$ via la asignación $(\bar{0}, u, 0, 0) \mapsto u$. Así, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, x, 0, 0) f\right](u) = f(u - x),$$

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, y, 0) f\right](u) = e^{-i\lambda u y} f(u),$$

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, 0, t) f\right](u) = e^{i\lambda t} f(u),$$

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, s_j, \bar{0}) f\right](u) = e^{i s_j \left(\sum\limits_{i=1}^{j} \alpha_i \frac{u^{j-i}}{j-i!} - \lambda \frac{u^{j+1}}{j+1!} \right)} f(u), \quad j = 1, \ldots, m.$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$. Un subespacio isotrópico maximal asociado a Λ viene dado por

$$\mathfrak{M}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i e_i + y e_y + t e_t \in \mathfrak{n}_m : s_i, y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos identificar H_Λ con $L^2(\mathbb{R})$ via la asignación $(\bar{0}, u, 0, 0) \mapsto u$. Así, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, x, 0, 0) f\right](u) = f(u - x),$$
$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, y, 0) f\right](u) = e^{-i\lambda u y} f(u),$$
$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, 0, t) f\right](u) = e^{i\lambda t} f(u),$$

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, s_j, \bar{0}) f\right](u) = e^{i s_j \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i \frac{u^{j-i}}{j-i!} - \lambda \frac{u^{j+1}}{j+1!} \right)} f(u), \quad j = 1, \ldots, m.$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$. Un subespacio isotrópico maximal asociado a Λ viene dado por

$$\mathfrak{M}_{\overline{\alpha},\lambda} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i e_i + y e_y + t e_t \in \mathfrak{n}_m : s_i, y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos identificar H_Λ con $L^2(\mathbb{R})$ via la asignación $(\bar{0}, u, 0, 0) \mapsto u$. Así, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, x, 0, 0) f\right](u) &= f(u - x), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, y, 0) f\right](u) &= e^{-i\lambda u y} f(u), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, 0, 0, t) f\right](u) &= e^{i\lambda t} f(u), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\lambda}(\bar{0}, s_j, \bar{0}) f\right](u) &= e^{i s_j \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i \frac{u^{j-i}}{j-i!} - \lambda \frac{u^{j+1}}{j+1!} \right)} f(u), \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Podemos elegir como subespacio isotrópico maximal asociado a Λ,

$$\mathfrak{M}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i e_i + y e_y + t e_t \in \mathfrak{n}_m : s_i, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con cálculos similiares al caso anterior, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, x, 0, 0) f\right](u) &= f\left(u - x\right) \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, 0, y, 0) f\right](u) &= e^{i\nu y} f(u), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, 0, 0, t) f\right](u) &= f(u),
\end{aligned}$$

$$\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, s_j, \bar{0}) f\right](u) = e^{i s_j \left(\sum\limits_{i=1}^{j} \alpha_i \frac{u^{j-i}}{j-i!} + \nu \frac{u^j}{j!} \right)} f(u), \quad j = 1, \ldots, m.$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, \ldots, \alpha_1, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$ ó $\alpha_j \neq 0$ y $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Podemos elegir como subespacio isotrópico maximal asociado a Λ,

$$\mathfrak{M}_{\overline{\alpha},\nu} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i e_i + y e_y + t e_t \in \mathfrak{n}_m : s_i, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Con cálculos similiares al caso anterior, para $f \in L^2(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, x, 0, 0) f\right](u) &= f\left(u - x\right) \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, 0, y, 0) f\right](u) &= e^{i\nu y} f(u), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, 0, 0, t) f\right](u) &= f(u), \\
\left[\rho_{\bar{\alpha},\nu}(\bar{0}, s_j, \bar{0}) f\right](u) &= e^{i s_j \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i \frac{u^{j-i}}{j-i!} + \nu \frac{u^j}{j!} \right)} f(u), \quad j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \ \chi_\beta \ d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta\cdot\mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \; \chi_\beta \; d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta\cdot\mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \; \chi_\beta \; d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta \cdot \mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \; \chi_\beta \; d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta \cdot \mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \; \chi_\beta \; d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta \cdot \mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

El subgrupo K_m de $Aut(N_m)$ y su representación

Consideremos el subgrupo $\overline{K}_m$ de $Aut(\mathfrak{n}_m)$, isomorfo a $\mathbb{R}^{m+1}$, dado por

$$\overline{K}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & k_{m-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & k_t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{m+3}(\mathbb{R}) : (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t) \in \mathbb{R}^{m+1} \right\}$$

Sea $K_m = \left\{ exp \circ \mathbf{k} \circ exp^{-1} : \mathbf{k} \in \overline{K}_m \right\}$ el subgrupo de $Aut(N_m)$ correspondiente a $\overline{K}_m$.

Ya que K_m es abeliano, cualquier representación $(\omega, \mathcal{H})$ de K_m es una verdadera representación. Así, se descompone de un *unico* modo como una integral directa de representaciones irreducibles, las cuales son unidimensionales, esto es

$$\omega = \int_{\mathcal{J}} m_\beta \; \chi_\beta \; d\mu(\beta)$$

donde $\beta = (\beta_{m-1}, \dots, \beta_1, \beta_y, \beta_t) \in \mathcal{J}$, μ es una medida de Borel sobre $\mathcal{J}$, χ_β es el caracter definido por $\chi_\beta(\mathbf{k}) = e^{i\beta \cdot \mathbf{k}}$, con $\mathbf{k} = (k_{m-1}, \dots, k_1, k_y, k_t)$ y m_β es la multiplicidad de χ_β in ω.

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)} \, d\mu(u)$$

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)} \, d\mu(u)$$

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)} \, d\mu(u)$$

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)} \, d\mu(u)$$

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)}\, d\mu(u)$$

Además, para $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, es fácil ver que

$$K_m^\Lambda = \{k \in K_m : k \cdot \Lambda \in \mathcal{O}_\Lambda\} = K_m.$$

La representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ satisface

$$\rho_\Lambda^{\mathbf{k}}(g)\omega_\Lambda(\mathbf{k}) = \omega_\Lambda(\mathbf{k})\rho_\Lambda(g) \quad \text{para todo } \mathbf{k} \in K_m \text{ y } g \in N_m.$$

El criterio de Mokni-Thomas implica que (K_m, N_m) es un par de Gelfand generalizado si y solo si para cada $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$, la representación metapléctica ω_Λ de K_m^Λ es multiplicity free.

Teorema

Para todo $\Lambda \in \mathfrak{n}_m^*$ la representación ω_Λ de K_m es multiplicity free.

Proof. • Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, \lambda)$ con $\lambda \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_0 \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, k_t) \in \overline{K}_m$. Obtenemos,

$$\omega_\Lambda \downarrow K_0 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left(-\frac{u^2}{2}\lambda, u\lambda\right)} \, d\mu(u)$$

- Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \; d\mu(u)$$

- Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \; d\mu(u)$$

- Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.■

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \; d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \; d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.■

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.■

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.■

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \; d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \; d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.$\blacksquare$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, \nu, 0)$ con $\nu \neq 0$: Sea $\mathbf{k}_y \in K_m$ el automorfismo correspondiente a $(0, \ldots, 0, k_y, 0) \in \overline{K}_m$. Tenemos que

$$\omega_\Lambda \downarrow K_y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\nu} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\overline{\alpha}, 0, 0, 0)$ con $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{j-1} = 0$ y $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots m-1\}$: Sea $\mathbf{k}_j = exp \circ (\overline{0}, k_j, 0, \ldots, 0) \circ exp^{-1} \in K_m$. Entonces

$$\omega_\Lambda \downarrow K_j = \int_{\mathbb{R}} \chi_{-u\alpha_j} \, d\mu(u)$$

• Caso $\Lambda = (\alpha_m, 0, \ldots, 0, \mu, 0, 0)$: En este caso $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{n}_m$ and ρ_Λ es un caracter.$\blacksquare$

GRACIAS!!!