

UN MÉTODO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN SEGMENTARIA APROXIMADA DE DETERMINADAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

Alberto J. Ferrari §, Luis P. Lara ¶,
Mariela C. Olguin §, Eduardo A. Santillan Marcus §

LXXI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas
Neuquén, 20 a 23 de septiembre de 2022



§ Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR)
¶ Universidad del Centro Educativo Latinoamericano

INTRODUCCIÓN

- En **Computing eigenelements of boundary value problems with fractional derivatives** de Odibat, Z.M., se realiza un estudio analítico de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales fraccionarios.
- En trabajos de **Baleanu, Changpin y otros** se desarrollan métodos iterativos variacionales para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales y no lineales.
- Aquí se realiza una variante del trabajo presentado en **Ferrari** (2021), a partir de las funciones de Mittag-Leffler. Se desarrolla un método segmentario para determinar en forma explícita la solución segmentaria aproximada de ecuaciones diferenciales fraccionarias de la forma $D_a^\alpha y(x) = q(x)y(x)$, $1 < \alpha \leq 2$ con condiciones iniciales.

DESARROLLO DE LA EXPOSICIÓN

- 1 Definición de derivada fraccionaria de Caputo.
- 2 Descripción del método de integración segmentaria (**MIS**)
- 3 Se obtiene un resultado de convergencia.
- 4 Se corrobora lo anterior mediante dos ejemplos:
 - ✓ un problema con condiciones iniciales a partir de la ecuación de Mathieu;
 - ✓ un segundo ejemplo a partir de la ecuación de Hermite con condiciones iniciales.
- 5 Se considera un problema en el cual la ecuación que gobierna el sistema es no lineal.
- 6 Finalmente, se establecen las conclusiones.

DEFINICIÓN DE DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO

Sea α un número real positivo y denotemos con $n = \lceil \alpha \rceil$ al menor entero mayor que α .

Se define la derivada fraccionaria de Caputo (Diethelm, Kilbas) de una función $y(x)$ de variable real, n veces derivable y se nota $D_a^\alpha y(x)$, como:

$$D_a^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad (1)$$

donde $y^{(n)}(s)$ indica la derivada clásica n -ésima de la función y y α es el orden de derivación fraccionario.

Como se mencionó en la introducción, se considerará $1 < \alpha \leq 2$, por lo que el único valor posible de n es $n = 2$.

MÉTODO DE INTEGRACIÓN SEGMENTARIA

El objetivo de este trabajo es hallar una solución aproximada del siguiente problema [Narahari,Tofighi]:

$$\begin{cases} D_a^\alpha y(x) = q(x)y(x), & x \in [a,b], \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = y'_a, \end{cases} \quad (2)$$

con $q(x) \in C^1[a,b]$.

Se consideran:

- I) $h = \frac{b-a}{N}$,
- II) $x_k = a + hk$, $k = 0, 1, \dots, N$ para N dado,
- III) $y_k = y(x_k)$, $y'_k = y'(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, N$,
- IV) $I_k = [x_k, x_{k+1})$ para $k = 0, 1, \dots, N-2$, $I_{N-1} = [x_{N-1}, b]$.

En $[a,b]$ se establece la función Q seccionalmente constante tal que $Q(x) = q_k$ si $x \in I_k$ para $k = 0, \dots, N-1$, con q_k definida como:

$$q_k = \frac{1}{h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Ahora, se considera el siguiente problema en I_0 :

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}_0(x) = q_0 \tilde{y}_0(x), & x \in I_0, \\ \tilde{y}_0(a) = y_a, \\ \tilde{y}'_0(a) = y'_a. \end{cases} \quad (4)$$

Y en I_k , con $k = 1, \dots, N-1$, se consideran los problemas:

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}_k(x) = q_k \tilde{y}_k(x), & x \in I_k, \\ \tilde{y}_k(x_k) = \tilde{y}_{k-1}(x_k), \\ \tilde{y}'_k(x_k) = \tilde{y}'_{k-1}(x_k). \end{cases} \quad (5)$$

La solución $\tilde{y}_0(x)$ de (4) y las soluciones $\tilde{y}_k(x)$ de (5) para $k = 1, \dots, N-1$ son de la forma:

$$\tilde{y}_k(x) = c_{1k} E_{\alpha,1}(q_k x^\alpha) + c_{2k} x E_{\alpha,2}(q_k x^\alpha), \quad (6)$$

siendo $E_{\alpha,\beta}$ la función de Mittag-Leffler de dos parámetros.

Por lo tanto, la solución del problema planteado en (2) es aproximada por la función $\tilde{y}$ definida de modo tal que:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_k(x) \text{ si } x \in I_k \text{ para } k = 0, \dots, N-1.$$

RESULTADOS DE CONVERGENCIA

Aplicando la integral de Riemann-Liouville de orden α en ambos miembros de la Ec. (2), resulta una ecuación integral de Volterra de segunda especie [5]:

$$y(x) = y_a + y'_a(x-a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} q(t) y(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (7)$$

De igual manera, teniendo en cuenta que $\tilde{y}(x)$ por definición satisface el siguiente problema a valores iniciales:

$$\begin{cases} D_a^\alpha \tilde{y}(x) = Q(x) \tilde{y}(x), & x \in [a, b], \\ \tilde{y}(a) = y_a, \\ \tilde{y}'(a) = y'_a, \end{cases} \quad (8)$$

con Q definida a partir de (3), resulta para $\tilde{y}(x)$ la siguiente ecuación integral de Volterra:

$$\tilde{y}(x) = y_a + y'_a(x-a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} Q(t) \tilde{y}(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (9)$$

Trabajando algebraicamente a partir de las Ec. (7) y (9) y aplicando valor absoluto resulta que, dado $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} |\tilde{y}(t) - y(t)| |q(t)| dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Trabajando algebraicamente a partir de las Ec. (7) y (9) y aplicando valor absoluto resulta que, dado $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \underbrace{|x-t|^{\alpha-1}}_{\leq (b-a)^{\alpha-1}} |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \underbrace{|x-t|^{\alpha-1}}_{\leq (b-a)^{\alpha-1}} |\tilde{y}(t) - y(t)| |q(t)| dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Trabajando algebraicamente a partir de las Ec. (7) y (9) y aplicando valor absoluto resulta que, dado $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \underbrace{|x-t|^{\alpha-1}}_{\leq (b-a)^{\alpha-1}} |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \underbrace{|x-t|^{\alpha-1}}_{\leq (b-a)^{\alpha-1}} |\tilde{y}(t) - y(t)| |q(t)| dt.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Dado que $q \in C^1(a, b)$, se tiene que existen constantes positivas K y D tales que:

$$|q(t)| \leq K, \quad |q'(t)| \leq D, \quad \forall t \in [a, b], \tag{11}$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |Q(t) - q(t)| |\tilde{y}(t)| dt \\
 &\quad + \frac{(b-a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Aplicando un desarrollo de Taylor a $q(x)$ alrededor de x_k resulta:

$$|Q(x) - q(x)| \leq \frac{3}{2} Dh, \quad (13)$$

de donde:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - y(x)| &\leq \frac{3}{2} \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Dh \int_a^x |\tilde{y}(t)| dt \\ &+ \frac{(b-a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt. \end{aligned} \quad (14)$$

A partir de la Ec. (9) y aplicando la desigualdad triangular, se tiene:

$$|\tilde{y}(x)| \leq A_1 + B_1 \int_a^x |\tilde{y}(t)| dt, \quad (15)$$

con $A_1 = |y_a| + |y'_a|(b-a)$ y $B_1 = \frac{(b-a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)}$.

Luego, utilizando el Lema de Gronwall en Ec. (15) resulta:

$$|\tilde{y}(x)| \leq A_1 e^{B_1(x-a)} \leq A_1 e^{B_1(b-a)}. \quad (16)$$

Aplicando (16) en la acotación (14), resulta:

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq A_2 h + B_2 \int_a^x |\tilde{y}(t) - y(t)| dt, \quad (17)$$

donde:

- $A_2 = \frac{3}{2} \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} D A_1 e^{B_1(b-a)}(b-a),$
- $B_2 = \frac{(b-a)^{\alpha-1} K}{\Gamma(\alpha)}.$

Aplicando nuevamente el Lema de Gronwall resulta:

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq A_2 h e^{B_2(x-a)} \leq A_2 h e^{B_2(b-a)}. \quad (18)$$

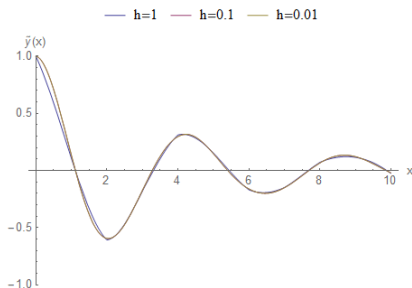
Por lo tanto, el orden de convergencia del **MIS** resulta ser lineal. Más aún, la convergencia es uniforme.

RESULTADOS NUMÉRICOS

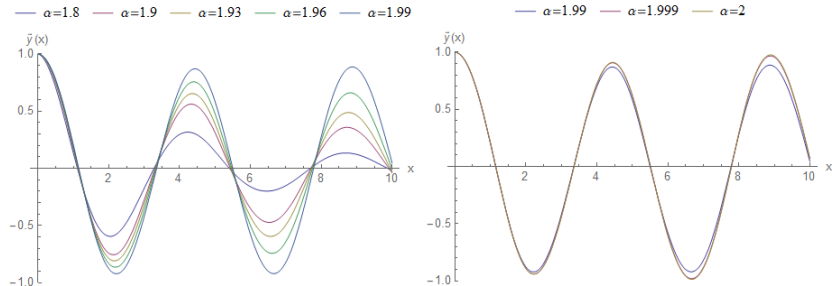
- 1) Se considera en primer lugar un problema en el cual aparece la ecuación de Mathieu [4, 6]:

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(x) + [a - 2b \cos(2x)]y(x) = 0, & x \in (0, 10), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Se obtiene una solución aproximada aplicando el **MIS**, utilizando N intervalos uniformes con $a = 2$, $b = 0.1$ y $\alpha = 1.8$.



A continuación, se visualiza el comportamiento de la solución aproximada para $h = 10^{-1}$, distintos valores de α y comparando con la gráfica de la solución clásica del problema con orden de derivación $\alpha = 2$.

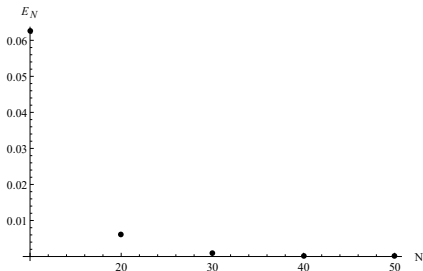


Para tener una idea del comportamiento global del error en la resolución aproximada del problema, se define, para N natural:

$$E_N = \int_0^{10} (\tilde{y}_N(x) - \tilde{y}_{N+10}(x))^2 dx. \quad (20)$$

Considerando en (19) el orden de derivación $\alpha = 1.8$ y $h = \frac{10}{N}$ para diferentes valores de N , en la Tabla se muestran los resultados que además se representan en la Figura.

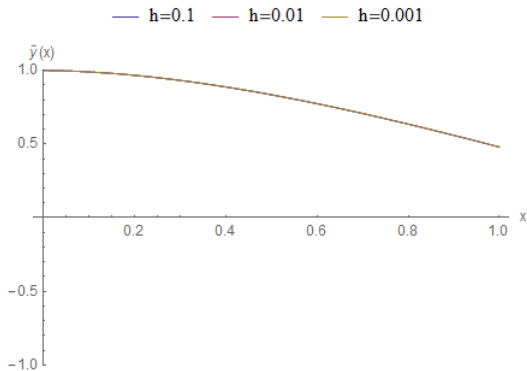
N	E_N
10	$6.253 \cdot 10^{-2}$
20	$6.219 \cdot 10^{-3}$
30	$8.128 \cdot 10^{-4}$
40	$1.721 \cdot 10^{-4}$
50	$5.115 \cdot 10^{-5}$



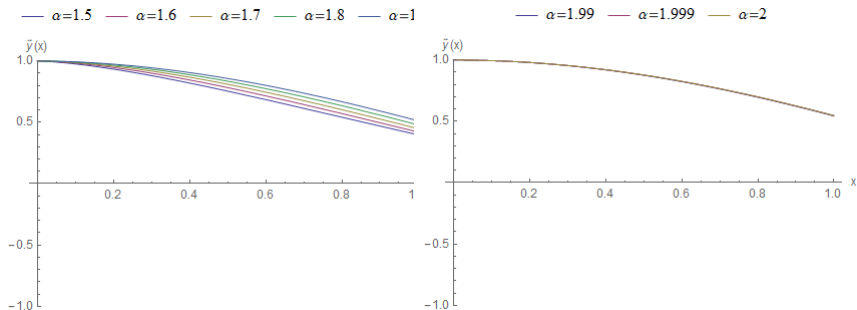
2) Un segundo ejemplo está basado en la ecuación de Hermite [1]:

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(x) + \left(1 - \frac{1}{10}x^2\right) y(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

Se obtiene una solución aproximada aplicando el **MIS**, utilizando N intervalos uniformes con $\alpha = 1.8$.



A continuación, se visualiza el comportamiento de la solución aproximada para $h = 10^{-1}$, distintos valores de α y comparando con la gráfica de la solución clásica del problema con orden de derivación $\alpha = 2$.



MIS APLICADO A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO LINEAL

Se considera el problema de valores iniciales:

$$D_a^\alpha y(x) = F(x, y(x)), \quad y(a) = 1, y'(a) = 0, \quad (22)$$

con $a \leq x \leq b$, $1 < \alpha \leq 2$ y F una función continua. Se supone que la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$D_a^\alpha y(x) = G(x, y(x)).y(x), \quad (23)$$

donde G es una función continua en su dominio. Considerando las definiciones hechas al describir el **MIS**, la solución de la Ec. (23) es aproximada por una función Y tal que en cada intervalo I_k es solución del problema

$$D_a^\alpha y_k(x) = q_k y_k(x), \quad x \in I_k, \quad (24)$$

$$q_k = G(x_k, y_k), \quad (25)$$

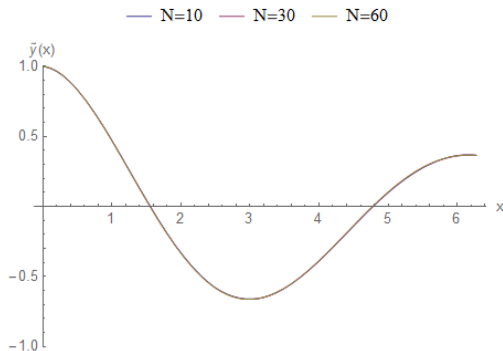
con las condiciones

$$\begin{aligned} y_k(x_{k+1}) &= y_{k+1}(x_{k+1}), \\ y'_k(x_{k+1}) &= y'_{k+1}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (26)$$

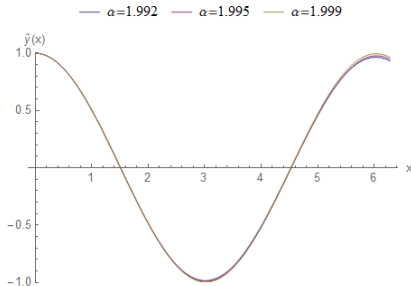
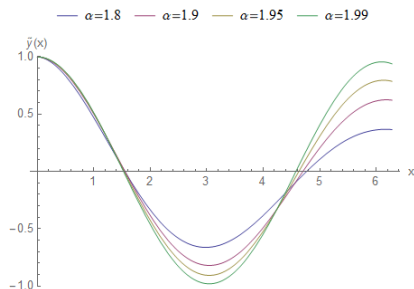
Para ilustrar la descripción anterior, se considera la ecuación homogénea de Duffing:

$$D_0^\alpha y(x) + y(x) + \gamma y^3(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (27)$$

Se obtiene una solución aproximada aplicando el **MIS**, utilizando N intervalos uniformes con $\gamma = 0.1$ y $\alpha = 1.8$.



A continuación, se muestra cómo se comporta la solución aproximada del problema planteado cuando, para $N = 60$, el orden de derivación fraccionario α cambia entre 1.8 y 2.

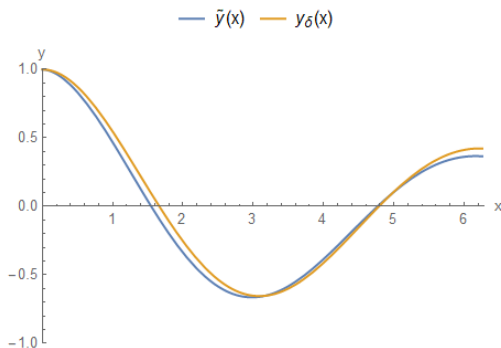


Es interesante remarcar que si se considera el problema con derivada clásica y se incluye un término disipativo:

$$y''(x) + \delta y'(x) + y(x) + \gamma y^3(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (28)$$

con $\delta > 0$, se puede estimar un valor de δ de manera que la solución $\tilde{y}(x)$ de (27) y la solución $y_\delta(x)$ de (28) **no difieran significativamente**.

Mediante experimentos numéricos, considerando $N = 60$ y $\alpha = 1.8$, se obtuvo que para $\delta = 0.28$ las soluciones de ambos problemas resultan muy similares.



CONCLUSIONES

- ❶ En este trabajo se desarrolló un **método de integración segmentaria (MIS)** para hallar la solución explícita aproximada de una **ecuación diferencial fraccionaria**.
- ❷ Se consideró un problema con condiciones iniciales. Se presentó un estudio de convergencia obteniendo **convergencia uniforme lineal**.
- ❸ Se corroboró lo obtenido mediante dos ejemplos:
 - ✓ un problema con condiciones iniciales a partir de la ecuación de Mathieu y en el que además se mostró gráficamente el comportamiento de la solución aproximada con respecto a cambios en el orden de derivación fraccionario en la ecuación;
 - ✓ un segundo ejemplo a partir de la ecuación de Hermite con condiciones iniciales en el que se repitió este estudio.
- ❹ Se consideró además un problema en el cual la ecuación que gobierna el sistema es no lineal con condiciones iniciales comprobando una vez más el buen desempeño del método numérico presentado.



¡Muchas gracias por su atención!

BIBLIOGRAFÍA



Abramowitz, M. y Stegun, I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.



Baleanu D., Diethelm K., Scalas E. y Trujillo J., *Fractional Calculus, Models and Numerical Methods*, Word Scientific, New Jersey, 2012.



Changpin L. y Fanhai Z., *Numerical Methods for Fractional Calculus*, Taylor and Francis Group, 2015.



Chicone, C., *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1991.



Diethelm K., *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer-Verlag, Braunschweig, Germany, 2010.



Farkas, M., *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.



Ferrari A., Gadella M., Lara L. y Santillan Marcus E., Approximate solutions of one dimensional systems with fractional derivative, *International Journal of Modern Physics C*, 31(7), 2020.



Ferrari A., Lara L. y Santillan Marcus E., Convergence analysis and parity conservation of a new form of a quadratic explicit spline with applications to integral equations, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 28(30), 2020.



Ferrari A., Lara L., Olguin M. y Santillan Marcus E., Oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional con memoria, *Mecánica Computacional (MECOM) 2021*, páginas 159-166, 2021.



Ferrari, A., Lara, L., and Olguin, M. y Santillan Marcus, E., Comparative study of some numerical schemes for a fractional order model of HIV infection treatment, *Trends in Computational and Applied Mathematics* (aceptado), 2022.

BIBLIOGRAFÍA



Ghorbani, A., Toward a new analytical method for solving nonlinear fractional differential equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4173-4179, 2008.



Khana, Y., Faraz, N., Yildirim, A. y Wua, Q., Fractional variational iteration method for fractional initial-boundary value problems arising in the application of nonlinear science, *Computers and Mathematics with Applications*, 62:2273-2278, 2011.



Kilbas, A., Srivastava, H. y Trujillo, J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.



Lara, L.P., One-step recursive method for solving systems of differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216:210-216, 2008.



Narahari R., Hanneken J., Enck T. y Clarke T, Dynamics of the fractional oscillator, *Physica A*, 297:361-367, 2001.



Odibat, Z.M., Computing eigenelements of boundary value problems with fractional derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, 215:3017-3028, 2009.



Odibat, Z.M., Analytic study on linear systems of fractional differential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 59:1171-1183, 2010.



Tofighi A., The intrinsic damping of the fractional oscillator, *Physica A*, 329:29-34, 2003.



Wu, G., A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 61:2186-2190, 2011.