Una nueva prueba de completitud para una familia de lógicas de primer orden que provienen de las álgebras de Monteiro

Aldo Figallo-Orellano - Juan Sebastián Slagter
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

UMA

Septiembre 2022

Introducción

Antonio Monteiro desarrolló varias técnicas para el estudio de sistemas algebraicos. Una de los más importantes es la caracterización de las congruencias mediante sistemas deductivos para ciertas variedades semisimples de álgebras, que derivo en la presentación de un Teorema de Representación, que de hecho amplía el correspondiente a las álgebras booleanas. En

A. Monteiro, Sur les algèbres de Heyting simetriques, *Portugaliae Math., 39, 1-4, 1–237, 1980.*

se puede encontrar la noción de **Systèmes deductifs liés à "a"**, donde *a* es un elemento de un álgebra dada. En el caso en el que el retículo sea un álgebra booleana, esta noción de sistema deductivo caracteriza las congruencias máximas.

Introducción

En general, para cada álgebra de una variedad dada queremos tener una implicación primitiva, o derivada en términos de las operaciones del lenguaje, y también que los sistemas deductivos logren caracterizar una congruencia. Monteiro y muchos otros autores han utilizado estas técnicas en algunos sistemas algebraicos; tales como, álgebras de Nelson semisimples, álgebras de Łukasiewicz-Moisil, álgebras modales tetravalentes, álgebras de MV_n, álgebras de Heyting simétricas n valuadas, álgebras de Tarski, álgebras implicativas de Łukasiewicz con n valuadas, Álgebras modales de Hilbert n valuadas y otras. Para estas estructuras, es posible presentar un **Teorema de Representación** de forma unificada.

Introducción

La lógica Łukasiewicz **Ł** de valores infinitos, introducida por razones filosóficas por Jan Łukasiewicz, se encuentra entre las lógicas no clásicas más importantes y estudiadas. Posteriormente, Chang introdujo MV-álgebras para probar la completitud con respecto al cálculo **Ł**. Estas álgebras son equivalentes a las álgebras de Wajsberg.
Recordemos que, dada un álgebra de Wajsberg $\mathcal{A} = \langle A, \Rightarrow, \sim, 1\rangle$, podemos definir otras operaciones en ella. De hecho,

- $0 = \sim 1$,
- $x \oplus y = \sim x \Rightarrow y$,
- $x \odot y = \sim (\sim x \oplus \sim y)$,
- $x \vee y = \sim(\sim x \oplus y) \oplus y = (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$,
- $x \wedge y = \ sim(\sim x \vee \sim y)$,

donde $\wedge$ y $\vee$ son operaciones reticulares.

Introducción

Si consideramos las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como operaciones primitivas, entonces tenemos que $(A, \oplus, \odot, \sim, 0)$ es un álgebra de MV, en la formulación de Chang. Por otro lado, cualquier MV-álgebra en la formulación de Chang produce un álgebra de Wajsberg mediante las definiciones apropiadas de $\sim$ y $\Rightarrow$, donde $x \Rightarrow y = \sim x \oplus y$. Además, es bien sabido que la categoría de MV-álgebras es equivalente a la categoría de l-grupos con unidad fuerte.
Grigolia introdujo la noción de MV_n-álgebras, refiriendose a la variedad de MV-álgebras generadas por una MV-cadena de longitud $n < \omega$. Denotamos por C_n el MV_n-álgebra cuyo universo es

$$\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

dotado de las operaciones $x \Rightarrow y := \min\{1, 1 - x + y\}$, $\sim x := 1 - x$.

Además, es bien sabido que si $(A, \oplus, \sim, 1)$ es un MV_n-álgebra, entonces $Ł_n(A) = \langle A, \wedge, \vee, \sim, \sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Łukasiewicz-Moisil n valuada, donde los operadores $\sigma_i : A \to A$ son ciertos homomorfismos reticulares, para $0 \leq i \leq n-1$, definidos en términos de las operaciones MV y llamados operadores de Moisil. Estos operadores se definen en C_n de la siguiente manera:

$$\sigma_i\left(\frac{j}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } i+j < n \\ 1 & \text{if } i+j \geq n \end{cases}.$$

Resulta interesante notar que el operador σ_0 fue estudiado, bajo el nombre de operador Δ, por Baaz; estudió la versión proposicional y cuantificada de la lógica Gödel expandida por Δ. Posteriormente, Hájek estudió la extensión de la Basic Fuzzy Logic (BL), la lógica Łukasiewicz, la lógica del producto y otras lógicas difusas con el operador Δ. En este escenario, Esteva y Godo introdujeron la lógica MTL y su extensión MTL_Δ por el operador Δ. Además, Hájek y Cintula llamaron a todos estos sistemas Δ-lógicas difusas y presentaron su versión cuantificada (sin identidad) con el respectivo teorema de correctitud y completitud. Su prueba de completitud para estas lógicas de primer orden se obtiene sumando el axioma de *dominios constantes* y usando una estrategia similar a la de Henkin.

Continuando con la teoría de las MV-álgebras, es bien sabido que la implicación de Gödel se puede reescribir con las operaciones de Moisil y de De Morgan, dada una MV_n-álgebra:

$$x \to y = x \vee \sim \sigma_{n-1} y \vee \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n-1} (\sigma_i y \wedge \sigma_i x \wedge \sim \sigma_i y) \right) \vee (\sigma_0 x \wedge \sigma_0 y)$$

Esta implicación fue descubierta por Cignoli en su tesis doctoral. Vale la pena mencionar que Cignoli estudió la lógica Łukasiewicz de primer orden n-valuada. En tu trabajo la presentó como una extensión del cálculo intuicionista y basó su trabajo en el hecho de que MV$_n$-álgebras se pueden definir en términos de álgebras de Heyting simétricas con operaciones de Moisil agregando un conjunto especial de operaciones, a las que llamó álgebras propias de Łukasiewicz n-valuadas. Su trabajo también está basado en un artículo de Iturrioz, donde se demostró que la clase de álgebras de Heyting simétricas, con una familia de operadores, es un término equivalente a la clase de álgebras Łukasiewicz-Moisil.

Posteriormente, M. Canals-Frau y A. V. Figallo introdujeron otra clase semisimple de álgebras. Ellos definieron la clase de álgebras modales de Hilbert $(n+1)$-valuadas en la asignatura $\{\to, \{\sigma_i\}_{0\leq i\leq n-1}, 1\}$ donde los σ_i's son operadores de Moisil. Estas álgebras pueden verse como reducciones de las álgebras estudiadas por Cignoli e Inturrioz antes mencionadas. La clase de álgebras propias de Łukasiewicz n-valuadas permitió a Cignoli presentar teoremas de correctitud y completitud para la lógica Łukasiewicz de primer orden n-valuada, por medio de Técnica de Rasiowa para los modelos estándar. Esta técnica necesita probar la existencia de ciertas estructuras completas como la terminación de Dedekind-MacNeille para álgebras booleanas o álgebras de Heyting para interpretar las fórmulas cuantificadas. Con este método, Cignoli logró encontrar la completitud de las álgebras Łukasiewic n-valuadas.

Por otro lado, Cintula y Noguera generalizaron el trabajo de Rasiowa al contexto de ciertas lógicas algebraizables proporcionando pruebas al estilo de Henkin para los teoremas de correctitud y completitud.

Recordemos que en 1950, Henkin introdujo que las álgebras de Hilbert son considerados como la contrapartida algebraica del fragmento implicativo del cálculo proposicional intuicionista.

Se dice que un álgebra $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert si satisface las siguientes identidades:

(H1) $1 \to x = x$,

(H2) $x \to x = 1$,

(H3) $(x \to (y \to z)) = (x \to y) \to (x \to z)$,

(H4) $x \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$.

Estas ecuaciones, que determinan las álgebras de Hilbert, fueron aportadas por Diego, que también probó que las álgebras de Hilbert son finitamente generadas.

Para cualquier álgebra de Hilbert $\mathbf{A}$, se dice que un subconjunto D es un sistema deductivo de A (d.s., para abreviar) si:

- $1 \in D$,
- $x, x \to y \in D$, luego $y \in D$.

Denotamos por $\mathcal{D}(A)$ el conjunto de sistemas deductivos de A. Es bien sabido que el conjunto de todas las congruencias de A es isomorfo reticularmente al conjunto $\mathcal{D}(A)$ ordenado por la relación de inclusión. Vale la pena señalar que los sistemas deductivos también se conocen como *filtros implicativos* o simplemente *filtros* .

M. Canals-Frau y A. V. Figallo estudiaron el fragmento implicativo n-valuado con los operadores de posibilidad de Moisil. Definieron álgebras modales de Hilbert n-valuadas como una clase en la que cada álgebra

$$\langle A, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$$

como el reducto $\langle A, \to, 1\rangle$, que es un álgebra de Hilbert n-valuado y los operadores $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ verifican las siguientes condiciones:

(HM1) $(\sigma_0 x \to y) \to x = x$,

(HM2) $\sigma_i(x \to y) \to (\sigma_i x \to \sigma_j y) = 1$, para cualquier $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(HM3) $(\sigma_i x \to \sigma_i y) \to ((\sigma_{i+1} x \to \sigma_{i+1} y) \to \cdots ((\sigma_{n-1} x \to \sigma_{n-1} y) \to \sigma_i(x \to y)) \cdots) = 1$,

(HM4) $\sigma_i(x \to \sigma_j y) = x \to \sigma_j y$,

(HM5) $\sigma_{n-1} x = (x \to \sigma_i x) \to \sigma_j x$, para cualquier $0 \leq i \leq j \leq n-1$.

A su vez, un álgebra $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo si $\langle A, \to, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert y $\langle A, \vee, 1\rangle$ es un semirretículo superior con últimio elemento 1, y se cumplen las siguientes condiciones:

($H^{\vee}1$) $x \to (x \vee y) = 1$

($H^{\vee}2$) $(x \to y) \to ((x \vee y) \to y) = 1$, para todo $x, y \in A$

Se dice que un álgebra $\langle A, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert n-valente modal con supremo ($H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra) si el reducto $\langle A, \to, \vee, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert con supremo, $\langle A, \to, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ es un álgebra de Hilbert n-valente modal y satisface lo siguiente:

(HM6) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i x \vee \sigma_i y$ para todo $0 \le i \le n-1$.

Por $\mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$, denotamos la variedad de las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras y, como de costumbre, denotaremos a $\langle A, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1\rangle$ como el $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra A.

Se dice que un subconjunto D de $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ es un sistema deductivo modal (s.d.m.) si:

- $D \in \mathcal{D}(A)$,
- $x \in D$ implica $\sigma_0 x \in D$.

Denotamos por $\mathcal{D}_m(A)$ el conjunto de todos los s.d.m. de la $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra $\mathbf{A}$.

No es difícil probar que para cualquier $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ y cualquier $D \in \mathcal{D}_m(A)$:

- $Con(A) = \{R(D) : D \in \mathcal{D}_m(A)\}$ donde
  $R(D) = \{(x,y) \in A^2 : x \to y, y \to x \in D\}$
- Existe un isomorfismo de retículos entre $Con(A)$ y $D_m(A)$.

Utilizamos la técnica de Monteiro para probar que la variedad $\mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ es semisimple. Consideramos un álgebra modal de Hilbert n-valente con supremo A y podemos definir una nueva operación binaria $\rightarrowtail$ llamada implicación débil tal que: $x \rightarrowtail y = \sigma_0 x \to y$ para $x, y \in A$

Lema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{\mathbf{n}}^{\vee,\sigma}$, *para cualquier* $x, y, z \in A$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

(wi1) $1 \rightarrowtail x = x$,

(wi2) $x \rightarrowtail x = 1$,

(wi3) $x \rightarrowtail \sigma_0 x = 1$,

(wi4) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail z) = (x \rightarrowtail y) \rightarrowtail (x \rightarrowtail z)$,

(wi5) $x \rightarrowtail (y \rightarrowtail x) = 1$,

(wi6) $((x \rightarrowtail y) \rightarrowtail x) \rightarrowtail x = 1$.

Sea **A** un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra y supongamos que $D \subseteq A$, decimos que D es un sistema deductivo débil (s.d.d.) si:

- $1 \in D$
- si $x, x \rightarrowtail y \in D$, entonces $y \in D$.

No es difícil ver que el conjunto de sistemas deductivos modales es igual al conjunto de sistemas deductivos débiles.
Denotamos por $\mathcal{D}_w(A)$ el conjunto de sistemas deductivos débiles y por $\mathcal{E}_w(A)$ al conjunto de todos las s.d.d. maximales.
A. Monteiro dio la siguiente definición para caracterizar los sistemas deductivos maximales en cierta clase de álgebras:

Definición

Sean **A** *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra,* $D \in \mathcal{D}_w(A)$ *y* $p \in A$*. Decimos que* D *es un sistema deductivo débil ligado a* p *si* $p \notin D$ *y para cualquier* $D' \in \mathcal{D}_w(A)$ *tal que* $D \subsetneq D'$ *tenemos que* $p \in D'$*.*

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra y* M *un sistema deductivo maximal de* A*. Entonces, por cada* $x \in A \setminus M$*, tenemos que* $\sigma_0 x \to y \in A$ *para cada* $y \in A$*.*

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra, entonces* $\{1\} = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_w(A)} M$ *donde* $\mathcal{E}_w(A)$ *es el conjunto de s.d.d. maximales de* $\mathbf{A}$*.*

En la prueba de este Lema usamos el hecho de que todo sistema deductivo débil maximal es un sistema deductivo débil ligado a algún elemento de A y viceversa.

Consideremos el álgebra cociente A/M definida por $a \equiv_M b$ si, y solo si, $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in M$, y la proyección canónica $q_M : A \rightarrow A/M$ definido por $q_M = |x|_M$, donde $|x|_M$ denota la clase de equivalencia de x generada por M. A partir de los resultados del álgebra universal, tenemos que si M es un sistema deductivo maximal de A, entonces A/M es un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra simple. Decimos que una variedad es semisimple si toda álgebra subdirectamente irreducible es simple; o de manera equivalente, cada álgebra de la variedad es un producto subdirecto de álgebras simples. Ahora, mostraremos que la variedad de $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras es de hecho semisimple. En efecto:

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra. El mapeo* $\Phi : A \longrightarrow \prod_{M \in \mathcal{E}_w(A)} A/M$*, definido por* $\Phi(x)(M) = q_M(x)$*, es un homomorfismo uno a uno.*

La técnica utilizada para demostrar que la variedad es semisimple se puede utilizar en una gran familia de álgebras. Nuestra siguiente tarea fue determinar las álgebras generadoras. Lo que realizamos en primer lugar fue, para una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra dada, determinar la partición asociada a una congruencia.

Lema

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_n^{\vee,\sigma}$ *que contiene más de un elemento y* $M \in \mathcal{E}_w(A)$. *Entonces, la familia* $\mathcal{F}_M = \{E_j^M\}_{0 \leq j \leq m}$, $m \leq n$ *es una partición de* A *donde*

$$E_j^M = \{a \in A : a, \sigma_k a \notin M, 1 \leq k \leq j, \sigma_{j+1} a \in M\}$$

con $1 \leq j \leq n-2$,

$$E_{n-1}^M = \{a \in A : a, \sigma_{n-1} a \notin M\}$$

y $E_0^M = M$.

Necesitamos construir un cierto homomorfismo para determinar las álgebras generadoras de la variedad. Para ello, consideremos el álgebra en la siguiente observación.

Observación

Llamamos $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra estándar al álgebra definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{C_n} = \langle \left\{ , \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}, \rightarrow, \vee, \{\sigma_i\}_{0 \leq i \leq n-1}, 1 \rangle$$

donde $x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y \\ y & de\ lo\ contrario \end{cases}$ *y* $\sigma_i(\frac{j}{n}) = \begin{cases} 0 & si\ i + j < n \\ 1 & sii + j \geq n \end{cases}$.

Es claro que en el álgebra estándar, el operador σ_0 coincide con el operador $\triangle$ de Baaz para álgebras Gödel n-valentes.

Teorema

Sea $\mathbf{A}$ *un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra no trivial,* $M \in \mathcal{E}_w(A)$ *y* $\mathcal{F}_M = \{E_j^M\}_{0\leq j\leq m}$*,* $m \leq n-1$ *la partición asociada con* M*. Entonces, el mapeo* $h : A \longrightarrow \mathbf{C_n}$ *tal que* $h(x) = \dfrac{n-j}{n}$ *si* $x \in E_j^M$ *es un homomorfismo tal que* $h^{-1}(\{1\}) = M$*.*

De este último teorema y resultados bien conocidos del álgebra universal, tenemos que las $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebras simples son $\mathbb{C}_n$ y sus subálgebras; son las únicas álgebras subdirectamente irreducibles salvo isomorfismos.

Recordemos que una lógica definida sobre un lenguaje $\mathcal{S}$ es un sistema $\mathcal{L} = \langle For, \vdash \rangle$ donde *For* es el conjunto de fórmulas sobre $\mathcal{S}$ y la relación $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$ y $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Se dice que la lógica $\mathcal{L}$ es una lógica tarskiana si satisface las siguientes propiedades, para cada conjunto $\Gamma \cup \Omega \cup \{\varphi, \beta\}$ de fórmulas:

(1) Si $\alpha \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$,

(2) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Omega$, entonces $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$

(3) Si $\Omega \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \beta$ por cada $\beta \in \Omega$, luego $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

Se dice que una lógica $\mathcal{L}$ es finita si satisface lo siguiente:

(4) si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que $\Gamma_0 \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$.

La siguiente condición agrega la *estructuralidad* a una lógica tarskiana:

(5) Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, entonces $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathcal{L}} \sigma(\alpha)$ para cada $\mathcal{L}$-sustitución σ;

Definición

Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y sea Γ un conjunto de fórmulas. Decimos que todo conjunto de fórmulas es una teoría. Además, se dice que Γ es una teoría consistente si existe una fórmula φ tal que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Además, decimos que Γ es una teoría maximal consistente si $\Gamma, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ para cualquier fórmula $\psi \notin \Gamma$; y, en este caso, decimos que Γ es máxima con respecto a φ.

Un conjunto de fórmulas Γ es cerrado en $\mathcal{L}$ si la siguiente propiedad se cumple para cada fórmula φ: $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ si y solo si $\varphi \in \Gamma$. Es fácil ver que cualquier teoría maximal consistente es cerrada.

Lema (Lindenbaum-Łoś)

Sea $\mathcal{L}$ una lógica tarskiana y finitaria y sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas tales que $\Gamma \nvdash_{\mathcal{L}} \varphi$. Entonces, existe un conjunto de fórmulas Ω tal que $\Gamma \subseteq \Omega$ con Ω una teoría maximal consistente con respecto a la fórmula φ en $\mathcal{L}$.

Sea *Var* un conjunto numerable de variables proposicionales. Los símbolos $\to$, $\vee$ y $\sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ se denominan operadores de implicación, supremo y posibilidad de Moisil, respectivamente. Denotamos por *Fm* el conjunto de fórmulas y se define como de manera usual. Además, denotamos por $\mathfrak{Fm} = \langle Fm, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1} \rangle$ el álgebra absolutamente libre generada por el conjunto *Var*.

Definición

Denotamos por $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$*, el cálculo de Hilbert determinado por los siguientes axiomas y reglas de inferencia donde* $\alpha, \beta, \gamma \in Fm$ *:*

Axiomas esquema

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(A3) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$,

(A4) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$,

(A5) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

(A6) $((\sigma_0\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$,

(A7) $\sigma_i(\alpha \to \beta) \to (\sigma_i\alpha \to \sigma_j\beta)$, para todo i, j tal que $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A8) $(\sigma_i\alpha \to \sigma_i\beta) \to ((\sigma_{i+1}\alpha \to \sigma_{i+1}\beta) \to \cdots ((\sigma_{n-1}\alpha \to \sigma_{n-1}\beta) \to \sigma_i(\alpha \to \beta))\cdots)$ para todo i tal que $0 \leq i \leq n-1$,

(A9) $(\sigma_i(\alpha \to \sigma_j\beta)) \leftrightarrow (\alpha \to \sigma_j\beta)$ para todo i, j tal que $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A10) $\sigma_{n-1}\alpha \leftrightarrow ((\alpha \to \sigma_i\alpha) \to \sigma_j\alpha)$, para todo i, j tal que $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

(A11) $\sigma_i(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\sigma_i\alpha \vee \sigma_i\beta)$, para todo i tal que $0 \leq i \leq n-1$,

(A12) $\sigma_0\alpha \to \sigma_i\alpha$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n-1$.

Por $\alpha \leftrightarrow \beta$, denotamos $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$.

Reglas de inferencia

$$\text{(MP)} \quad \frac{\alpha, \;\; \alpha \to \beta}{\beta}$$

$$\text{(NEC)} \quad \frac{\alpha}{\sigma_0 \alpha}.$$

Consideraremos la noción usual de derivación de una fórmula α de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Decimos que α es derivable a partir Γ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$, denotado por $\Gamma \vdash \alpha$, si existe una derivación de α a parir de Γ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Si $\Gamma = \emptyset$, entonces lo denotamos por $\vdash \alpha$. En este caso, decimos que α es un teorema de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$.

Los siguientes resultados se pueden probar de forma estándar.

(P1) $\vdash \alpha \to \alpha$,

(P2) $\{\beta\} \vdash \alpha \to \beta$,

(P3) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P4) $\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$,

(P5) $\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$,

(P6) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$,

(P7) $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$,

(P8) $\{(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\} \vdash \alpha \to (\beta \to \gamma)$,

(P9) $\vdash \sigma_0\alpha \to \alpha$,

(P10) $\dfrac{\vdash \sigma_0\alpha}{\vdash \sigma_i\alpha}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

Lema

$\equiv$ es una congruencia en $\mathfrak{Fm}$, donde $\equiv$ se define como $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \alpha \to \beta$ y $\vdash \beta \to \alpha$.

Del último Lema, es posible considerar el álgebra $\mathfrak{Fm}/\equiv$ que se conoce como álgebra de Lindenbaum-Tarski; además, no es difícil probar que esta álgebra es una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra donde $\overline{\alpha \to \alpha}$ es el mayor elemento y denotamos por $\overline{\alpha}$ la clase de α por $\equiv$.

Consideraremos una *relación de consecuencia* $\models$ de la siguiente manera: para una función $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbb{C}_n$, decimos que v es una valoración para $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ si satisface:

- $v(\alpha \# \beta) = v(\alpha) \# v(\beta)$ con $\# \in \{\to, \vee\}$,
- $v(\sigma_i \alpha) = \sigma_i v(\alpha)$, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Además, decimos que α es una fórmula semánticamente válida si, para toda valoración v, $v(\alpha) = 1$, y lo denotamos por $\models \alpha$. Además, decimos $\Gamma \models \alpha$ si, para toda valoración v, si $v(\beta) = 1$ para todo $\beta \in \Gamma$, entonces $v(\alpha) = 1$

Dada una teoría Γ maximal con respecto a φ, denotamos $\Gamma / \equiv$ el conjunto $\{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$. Está claro que $\Gamma / \equiv$ es un subconjunto del álgebra de Hilbert n-valente modal $\mathfrak{Fm} / \equiv$. Entonces:

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ maximal no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Entonces:

(i) *si $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, entonces $\beta \in \Gamma$;*

(ii) *$\Gamma / \equiv$ es un sistema deductivo modal ligado a $\overline{\varphi}$ de $\mathfrak{Fm} / \equiv$.*

Es importante notar que de este último Teorema, tenemos que $\Gamma / \equiv$ es un sistema deductivo maximal en el sentido de Monteiro, tomando la Definición de Sistemas Deductivos Ligados.

Lema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, con Γ máximo no trivial con respecto a φ en $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. Si $\alpha \notin \Gamma$ entonces, $\sigma_0 \alpha \to \beta \in \Gamma$ para cualquier $\beta \in \mathfrak{Fm}$.

(Ver diapositiva 18)

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, *con* Γ *maximal no trivial con respecto a* φ *en* $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$. *Consideremos el mapeo* $v : \mathfrak{Fm} \to \mathbf{C_n}$, *definido por* $v(\alpha) = \dfrac{n-j}{n}$ *si* $\alpha \in E_j^\Gamma$, *donde* $\mathbf{C_n} = \langle \mathbf{C_n}, \to, \vee, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}, 1 \rangle$ *y*

$$E_j^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_k \alpha \notin \Gamma, 0 \leq k \leq j, \sigma_{j+1}\alpha \in \Gamma\}$$

con $0 \leq j < n-1$, $E_0^\Gamma = \Gamma$ *y*

$$E_{n-1}^\Gamma = \{\alpha \notin \Gamma : \sigma_{n-1}\alpha \notin \Gamma\}.$$

Entonces, v *es homomorfismo en* $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$.

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, $\Gamma \vdash \varphi$ *si, y solo si,* $\Gamma \vDash \varphi$.

Teoría de modelos y lógica de primer orden de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$

Supongamos que

- Θ es la asignatura proposicional de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$
- los símbolos $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial), junto con los signos de puntuación (comas y paréntesis)
- *Var* un conjunto numerable de variables individuales.

Como de costumbre, una asignatura de primer orden Σ es un trio $\langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$, donde

- $\mathcal{P}$ denota un conjunto no vacío de símbolos predicados
- $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones
- $\mathcal{C}$ denota un conjunto de constantes individuales

Las nociones de variables ligadas y libres, términos cerrados, oraciones y sustituibilidad también se definen de manera estándar. Denotamos por $\mathfrak{Fm}_\Sigma$ el conjunto de las fórmulas y denotaremos por *Ter* al álgebra absolutamente libre de los términos.

Definición

Una Σ*-estructura* $\mathfrak{A}$ *es un par* $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ *donde*

- $\mathbf{A}$ *es un* $H_n^{\vee,\sigma}$*-álgebra completa*
- $\mathbf{S} = \langle S, \{P_{\mathbf{S}}\}_{P \in \mathcal{P}}, \{f_{\mathbf{S}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \mathcal{C}, \cdot^{\mathfrak{A}} \rangle$
    - S *es un dominio no vacío*
    - $\cdot^{\mathfrak{A}}$ *es el mapeo interpretación que asigna:*
        - *a cada constante individual* $c \in \mathcal{C}$ *el elemento* $c^{\mathfrak{A}}$ *de* S
        - *a cada símbolo de predicado* P *de aridad* n *la función* $P^{\mathfrak{A}} : S^n \to A$
        - *a cada símbolo de función* f*, la función* $f^{\mathfrak{A}} : S^n \to S$

Definición

Sea Σ una asignatura de primer orden. La lógica $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ sobre Σ está definida por el cálculo de Hilbert obtenido al extender $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ expresado en el nuevo lenguaje agregando lo siguiente:

Axiomas Esquemas

(A13) $\varphi(x/t) \to \exists x\varphi$, *si t es un término libre para x en φ,*

(A14) $\forall x\varphi \to \varphi(x/t)$, *si t es un término libre para x en φ,*

(A15) $\sigma_i\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\sigma_i\varphi$, *con $1 \leq i \leq n-1$,*

(A16) $\sigma_i\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\sigma_i\varphi$, *con $1 \leq i \leq n-1$.*

Reglas de Inferencia

($\exists$-In) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x\alpha \to \beta}$, *y x no es libre en β,*

($\forall$-In) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x\beta}$, *y x no es libre en α,* Por $\varphi(x/t)$, denotamos la fórmula que resulta de φ reemplazando simultáneamente todas las ocurrencias libres de la variable x por t.

Denotamos por $\vdash \alpha$ a la derivación de una fórmula α en $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$, y con $\Gamma \vdash \alpha$ la derivación de α a partir del conjunto de premisas Γ. Estas nociones se definen la manera usual. Denotamos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ como una abreviatura de $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$.
Una $\mathfrak{A}$-valuación es una asignación $v : Var \to S$. Por $v[x \to a]$ denotamos la siguiente $\mathfrak{A}$-valuación, $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cualquier $y \in V$ tal que $y \neq x$.

Definición

Sea $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{S}$-valuación. Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{S}$ para una valuación v como sigue:

$$||c||_v^{\mathfrak{S}} = c^{\mathfrak{S}} \text{ si } c \in S,$$

$$||x||_v^{\mathfrak{S}} = v(x) \text{ si } x \in Var,$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = f^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para todo } f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = P^{\mathfrak{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ para todo } P \in \mathcal{P},$$

$$||\alpha \to \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \to ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\alpha \vee \beta||_v^{\mathfrak{S}} = ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}} \vee ||\beta||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\sigma_i \alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \sigma_i ||\alpha||_v^{\mathfrak{S}},$$

$$||\forall x \alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigwedge_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||\exists x \alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigvee_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}}.$$

Es fácil ver que se verifica la siguiente propiedad: $||\varphi(x/t)||_v^{\mathfrak{A}} = ||\varphi||_{v[x \to ||t||_v^{\mathfrak{A}}]}^{\mathfrak{A}}$.

Definición

Diremos que $\mathfrak{A}$ y v **satisfacen** *la fórmula φ, y denotaremos $\mathfrak{A} \models \varphi[v]$, si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$. Además diremos que φ es* **verdadera** *$\mathfrak{S}$ si $||\varphi||_v^{\mathfrak{A}} = 1$ para cada $\mathfrak{A}$-valución v y lo denotaremos $\mathfrak{A} \models \varphi$. Diremos que φ es una* **consecuencia semántica** *de Γ en $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$, si, para toda estructura $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \models \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, implica $\mathfrak{A} \models \varphi$. En este caso lo denotaremos $\Gamma \models \varphi$.*

Lema

Sea **A** *una $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra completa y sea $\{a_i\}_{i\in I}$ el conjunto de elementos de A para cualquier conjunto no vacío I. Entonces, si existe $\bigvee_{i\in I} a_i$ ($\bigwedge_{i\in I} a_i$), entonces existe $\bigvee_{i\in I} \sigma_j a_i$ ($\bigwedge_{i\in I} \sigma_j a_i$), y también se verifica $\bigvee_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigvee_{i\in I} a_i$ y $\bigwedge_{i\in I} \sigma_j a_i = \sigma_j \bigwedge_{i\in I} a_i$, para todo $0 \le j \le n-1$.*

Correctitud

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\Sigma}$, *si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vDash \varphi$

En lo que sigue, probaremos una versión fuerte del Teorema de completitud para $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ usando el álgebra de Łindenbaum-Tarski de manera similar al caso proposicional. Observemos que el álgebra de las fórmulas es un álgebra absolutamente libre generada por las fórmulas atómicas y sus fórmulas cuantificadas.
Consideremos la relación $\equiv$ definida por $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \beta \to \alpha$ y $\vdash \alpha \to \beta$, entonces tenemos que el álgebra $\mathfrak{Fm}_\Sigma / \equiv$ es un $H_n^{\vee,\sigma}$-álgebra y la prueba es exactamente la misma que en el caso proposicional. Por otro lado, está claro que $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ es una lógica tarskiana y finitaria. Entonces, podemos considerar la noción de teorías (maximales) consistentes y cerradas con respecto a alguna fórmula de la misma manera que el caso proposicional. Por lo tanto, tenemos que el Teorema de Lindenbaum-Łoś se cumple para $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$.

Lemma

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_\Sigma$, *con* Γ *maximal no trivial con respecto a* φ *in* $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$. *Sea* $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ *un subconjunto de* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$, *entonces:*

(i) *Si* $\alpha \in \Gamma$ *y* $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, *entonces* $\beta \in \Gamma$. *Mas aún, se verifica que* $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$, *en este caso diremos que es cerrado.*

(ii) $\Gamma/\equiv$ *es un sistema deductivo modal de* $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. *Además, si* $\overline{\varphi} \notin \Gamma/\equiv$ *y* $\overline{D}$ *es un sistema deductivo modal cerrado en el sentido de 1, que contiene propiamente a* $\Gamma/\equiv$, *entonces* $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.

Notemos que para una teoría consistente maximal dada Γ de $\mathfrak{Fm}_\Sigma$ tenemos que $\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal maximal de $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$. Si denotamos $A := \mathfrak{Fm}_\Sigma/\equiv$ y $\theta := \Gamma/\equiv$, mediante resultados bien conocidos del álgebra universal, tenemos el álgebra cociente A/θ es un álgebra simple (ver Teorema 0.8). De esto último y adaptando el primer teorema de isomorfismo, tenemos que A/θ es isomorfa a $\mathfrak{Fm}_\Sigma/\Gamma$, que está definida por la congruencia $\alpha \equiv_\Gamma \beta$ si, y solo si, $\alpha \to \beta, \beta \to \alpha \in \Gamma$.

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de sentencias, si* $\Gamma \vDash \varphi$ *entonces* $\Gamma \vdash \varphi$.

Sea φ una fórmula y supongamos que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es el conjunto de variables de φ, la *clausura universal* de φ está definida por $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$. Así, es claro que si φ es una sentencia, entonces la clausura universal de φ es ella misma.

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas, si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

La $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ lógica con identidad

Presentaremos la versión de primer orden de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ con identidad. Por lo tanto, es deseable que la versión cuantificada $\mathcal{QH}_n^{\vee,\sigma}$ de $\mathcal{H}_n^{\vee,\sigma}$ se expanda con un símbolo de predicado binario que represente la relación de igualdad, satisfaciendo los axiomas usuales. Como tal, el predicado será visto, desde un punto de vista semántico, como un símbolo lógico afín a los conectivos y cuantificadores. Denotamos por $\mathfrak{Fm}_{\approx}$ al álgebra de fórmulas absolutamente libre, donde las fórmulas atómicas se definen como de costumbre para la lógica de primer orden con identidad.

Definición

Sea Σ una asignatura de primer orden con identidad. La lógica $\mathcal{QH}_{n,\approx}^{\vee,\sigma}$ sobre Σ se define mediante el cálculo estilo Hilbert obtenido al extender $\mathcal{QH}_{n}^{\vee,\sigma}$ expresado en el nuevo idioma agregando lo siguiente:

Axiomas Esquema

(A17) $x \approx x$,

Reglas de Inferencia

$(R- \approx)$ $\dfrac{x \approx y}{\varphi \to \varphi(x \wr y)}$ *donde y es una variable libre para x en φ, y $\varphi(x \wr y)$ denota cualquier fórmula obtenida a partir de φ remplazando algunas, y no neceseriamente todas, ocurrencias libres de x por y.*

Para esta lógica de primer orden con igualdad, definimos la relación sintáctica $\vdash$ de la forma habitual. Luego, de los axiomas y la relación sintáctica obtenemos la siguiente Proposición.

Proposición

Sea t_1 un término y x, y, z variables individuales, entonces:

(i) $\vdash \forall x(x \approx x)$,

(ii) $\vdash t_1 \approx t_1$,

(iii) $\{x \approx y\} \vdash y \approx x$,

(iv) $\{x \approx y, y \approx z\} \vdash x \approx z$, Está claro que $\mathcal{QH}_{n,\approx}^{\vee,\sigma}$ es una lógica tarskiana y finitaria. Por lo tanto, se cumple el Lema de Lindenbaum-Łoś). Por otro lado, es posible ver que la relación $\equiv$ es una congruencia en $\mathfrak{Fm}_{\approx}$, donde $\alpha \equiv \beta$ si, y solo si, $\vdash \alpha \to$ *beta* y $\vdash \beta \to \alpha$.

Lemma

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\approx}$, con Γ maximal no trivial con respecto aφ en $\mathcal{QH}_{n,\approx}^{\vee,\sigma}$. Sea $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \Gamma\}$ $(|\alpha| = \overline{\alpha})$ un subconjunto del $H_{n,\approx}^{\vee,\sigma}$-álgebra $\mathfrak{Fm}_{\approx}/\equiv$, entonces:

(i) *Si $\alpha \in \Gamma$ y $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, entonces $\beta \in \Gamma$. Mas aún, se verifica que $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$, en este caso diremos que es cerrado.*

(ii) *$\Gamma/\equiv$ es un sistema deductivo modal de $\mathfrak{Fm}_{\Sigma}/\equiv$. Además, si $\overline{\varphi} \notin \Gamma/\equiv$ y $\overline{D}$ es un sistema deductivo modal cerrado en el sentido de 1, que contiene propiamente a $\Gamma/\equiv$, entonces $\overline{\varphi} \in \overline{D}$.*

Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{A}$-valuación.

Definición

Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{A}$ para una valoración v extendiendo la Definición anterior, añadiendo la siguiente condición: $||t_1 \approx t_2||_v^{\mathfrak{A}} = 1$ si, y solo si, $||t_1||_v^{\mathfrak{A}} = ||t_2||_v^{\mathfrak{A}}$. Para un conjunto dado de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\}$, la consecuencia semántica de α a partir de Γ, que denotamos por $\Gamma \vDash \alpha$, se define como en la Definición anterior.

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathfrak{Fm}_{\approx}$, $\Gamma \vdash \alpha$ si, y solo si, $\Gamma \vDash \alpha$.

Presentaremos una clase de álgebras donde sus pruebas de primer orden asociadas nos permiten probar el Teorema de completitud a través del método presentado.
Primero, consideremos la clase de álgebras de Monteiro (o M-álgebras) donde cada álgebra $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$ tiene un conjunto finito de símbolos de operaciones finitarias denotados por F y supongamos que la clase esta caracterizada por el conjunto $\mathfrak{C}$ de ecuaciones; es decir, la clase de M-álgebras constituye una variedad. Además, supongamos que tenemos una operación binaria $\to$ primitiva o derivada del lenguaje F que verifica lo siguiente:

(I$_1$) $x \to (y \to x) = 1$;

(I$_2$) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$;

(I$_3$) $x \to y = 1$, $y \to x = 1$ implica $x = y$;

(I$_4$) $((x \to y) \to x) \to x = 1$.

Además, para cualquier M-álgebra $\mathbf{A}$ consideraremos la noción de sistema deductivo. Para una M-álgebra $\mathbf{A}$ y $D \subseteq A$, decimos que D es un sistema M-deductivo si:

- D es un sistema deductivo
- para x_i, y_i en A con $1 \leq i \leq n$ se cumple la siguiente condición

(m) $x_i \to y_i \in D$ implica $\circ(x_1, \cdots, x_n) \to \circ(y_1, \cdots, y_n) \in D$, para cualquier operación n-aria $\circ$ de F.

Supondremos que toda M-álgebra verifica la condición (m). Denotamos por $\mathcal{D}_M(A)$ el conjunto de M-sistemas deductivos.

Proposición

Sea **A** *un M-álgebra. Las siguientes propiedades se cumplen para todo* $x, y, z \in A$*:*

I_5. $1 \to x = x$;

I_6. *Si* $x = 1$ *y* $x \to y = 1$, *entonces* $y = 1$;

I_7. $x \to x = 1$;

I_8. $x \to 1 = 1$;

I_9. *La relación* $\leq$, *definida como* $x \leq y$ *si, y solo si,* $x \to y = 1$, *es un orden en* A *y* 1 *es el último elemento;*

I_{10}. *Si* $x \leq y$, *entonces* $y \to z \leq x \to z$;

I_{11}. $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

I_{12}. $x \to (x \to y) = x \to y$.

Para un M-álgebra $\mathbf{A}$, todo sistema deductivo D de A tiene asociada una congruencia $R(D) = \{(x, y) : x \to y, y \to x \in D\}$ y viceversa. Además, es posible probar que existe una isomorfismo de retículos entre $\mathcal{D}_M(A)$ y el conjunto de congruencias de A. Ahora, recordemos que para una M-álgebra $\mathbf{A}$, decimos que un M-sistema deductivo M es máximo si M es propio y para cualquier $D \in \mathcal{D}_M(A)$, $M \subseteq D$ implica $D = A$ o $M = D$.

Definición

Sea $\mathbf{A}$ un M-álgebra, $D \in \mathcal{D}_M(A)$ y $p \in A \backslash D$. Diremos que D es ligado a p si $p \notin D$ y para todo $D' \in \mathcal{D}_M(A)$ tal que $D \subsetneq D'$, tenemos que $p \in D'$.

Lema

Sea $\mathbf{A}$ un M-álgebra y M un M-sistema deductivo maximal A. Entonces, para cada $x \in A \setminus M$, tenemos que $x \to y \in A$ para todo $y \in A$.

Para una M-álgebra $\mathbf{A}$ dada y gracias al Lema anterior y $(\mathbf{I}_4)$, podemos probar que cada M-sistema deductivo ligado a algún elemento de A es maximal y viceversa. Además, es posible ver que todo M-sistema deductivo D es la intersección de todos los sistemas deductivos que contienen D; y además tenemos que $\{1\} = \bigcap_{M \in \mathcal{E}(A)} M$ donde $\mathcal{E}(A)$ es el conjunto de todos los M-sistemas deductivos maximales.
Consideremos ahora el álgebra del cociente A/T definida por $a \equiv_T b$ si, y solo si, $a \to b, b \to a \in T$, y la proyección canónica $q_T : A \to A/T$ definida por $q_T = |x|_T$, donde $|x|_T$ denota la clase de equivalencia de x generada por T.

Lema

Sea $\mathbf{A}$ *un* M*-álgebra. Luego, el mapeo* $\Phi : A \longrightarrow \prod_{T \in \mathcal{E}(A)} A/T$, *definido por* $\Phi(x)(T) = q_T(x)$, *es un homomorfismo uno a uno; es decir, la clase de las* M*-álgebras es semisimple.*

Análogamente, consideramos la asignatura de primer orden $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \rangle$ y el conjunto *Var* de variables. Además, decimos que una estructura Σ es un par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es una M-álgebra y $\mathbf{S}$ se define como lo hicimos anteriormente. Además, denotamos por $\mathfrak{Fm}$ al álgebra absoluta libre de fórmulas de primer orden con igualdad. Es importante señalar que tenemos un conjunto de ecuaciones que caracterizan al álgebra. De acuerdo con eso, y con la relación definida en (I_9), podemos caracterizar al álgebra con otro conjunto de ecuaciones, todas ellas iguales a 1. Denotamos $\mathfrak{C}_{\mathfrak{Fm}}$ la interpretación de estas ecuaciones en el conjunto Fm.

Definición

Sea Σ una asignatura de primer orden con igualdad. La lógica $\mathcal{M}$ sobre Σ se define mediante el Cálculo estilo Hilbert sobre el lenguaje $\mathcal{L}_\Sigma$ añadiendo lo siguiente:

Axiomas Esquemas

(Ax1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(Ax2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(Ax3) α, *con* $\alpha \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{Fm}}$,

(Ax4) $\alpha(x/t) \to \exists x \alpha$, *si* t *es un término libre para* x *en* α,

(Ax5) $\forall x \alpha \to \alpha(x/t)$, *si* t *es un término libre para* x *en* α,

(Ax6) $\forall x (x \approx x)$,

Reglas de Inferencia

(R1) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$

(R2) $\dfrac{\alpha_1 \to \beta_1, \beta_1 \to \alpha_1, \cdots, \alpha_k \to \beta_k, \beta_k \to \alpha_k}{\circ(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \to \circ(\beta_1, \cdots, \beta_k)}$,

(R3) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\exists x \alpha \to \beta}$, y x no ocurre libre en β,

(R4) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha \to \forall x \beta}$, y x no ocurre libre en α,

(R5) $\dfrac{x \approx y}{\varphi \to \varphi(x \wr y)}$ donde y es una variable libre para x en φ, y $\varphi(x \wr y)$ denota cualquier fórmula obtenida a partir de φ remplazando algunas, y no neceseriamente todas, ocurrencias libres de x por y.

Consideremos ahora la Σ-estructura $\mathfrak{A}$ que resulta ser el par $\langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es una M-álgebra y

$$\mathbf{S} = \langle S, \{P_{\mathbf{S}}\}_{P \in \mathcal{P}}, \{f_{\mathbf{S}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \mathcal{C} \rangle,$$

donde S es un dominio no vacío, $P_{\mathbf{S}}$ es una función $S^n \to \mathbf{A}$, para todo símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, y $f_{\mathbf{S}}$ es una función $S^n \to S$, para todo símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ el conjunto de constantes individuales. Más aún, una $\mathfrak{A}$-valuación v es una función de Var en A: donde $v[x \to a]$ denota una $\mathfrak{A}$-valuación en la que $v[x \to a](x) = a$ y $v[x \to a](y) = v(y)$ para cada variable $y \neq x$.

Definición

Sea $\mathfrak{S} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{S} \rangle$ una Σ-estructura y v una $\mathfrak{S}$-valuación. Definimos los valores de los términos y los valores de verdad de las fórmulas en $\mathfrak{A}$ para una valoración v como sigue:

$$||c||_v^{\mathfrak{S}} = c^{\mathfrak{S}} \text{ si } c \in S,$$

$$||x||_v^{\mathfrak{S}} = v(x) \text{ si } x \in Var,$$

$$||f(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = f_{\mathbf{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}}) \text{ para cada } f \in \mathcal{F},$$

$$||P(t_1, \cdots, t_n)||_v^{\mathfrak{S}} = P_{\mathbf{S}}(||t_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||t_n||_v^{\mathfrak{S}} \text{ para cada } P \in \mathcal{P},$$

$$|| \circ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)||_v^{\mathfrak{S}} = \circ(||\alpha_1||_v^{\mathfrak{S}}, \cdots, ||\alpha_n||_v^{\mathfrak{S}}), \text{ donde } \circ \text{ es un operador n-ario de } F,$$

$$||(\forall x)\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigwedge_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||(\exists x)\alpha||_v^{\mathfrak{S}} = \bigvee_{a \in S} ||\alpha||_{v[x \to a]}^{\mathfrak{S}},$$

$$||t_1 \approx t_2||_v^{\mathfrak{S}} = 1 \text{ si, y solo si, } ||t_1||_v^{\mathfrak{S}} = ||t_2||_v^{\mathfrak{S}}.$$

Si el ínfimo o supremo no existe, tomamos el valor como indefinido. Para un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\}$, la consecuencia semántica de α a partir Γ, que denotamos por $\Gamma \vDash \varphi$ se define de la forma usual.

Es claro que la relación $\equiv$ es una congruencia en $\mathcal{M}$. Además, el álgebra de Lindenbaum-Tarski $\mathfrak{Fm}/\equiv$ es un M-álgebra. Notemos también que $\mathcal{M}$ es una lógica tarskiana y finitaria.

Lema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$ una teoría maximal consistente, y sea $\Gamma/\equiv$ el subconjunto $\{|\alpha| : \alpha \in \Gamma\}$ del M-álgebra $\mathfrak{Fm}/\equiv$. Se verifica que $\Gamma/\equiv = \{\overline{\alpha} : \Gamma \vdash \alpha\}$; y en este caso decimos que es cerrado. Luego, $\Gamma/\equiv$ es un M-sistema deductivo cerrado ligado a algún elemento de $\mathfrak{Fm}/\equiv$.

Teorema

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$. $\Gamma \vDash \varphi$ si, y solo si $\Gamma \vdash \varphi$.

El contenido de esta presentación fue publicado en:

- Aldo Figallo-Orellano, Juan Sebastián Slagter, *Monteiro's algebraic notion of maximal consistent theory for Tarskian logics*, **Fuzzy Sets and Systems**, Volume 445, 2022, Pages 90-122, ISSN 0165-0114.

GRACIAS