Sobre la k-upla dominación en grafos de Kneser

UMA 2022 - Neuquén

María Gracia Cornet [1, 2] Pablo Torres [1, 2]

22 de Septiembre de 2022

[1] UNR, Fac. de Ciencias Exactas, Ing. y Agrimensura

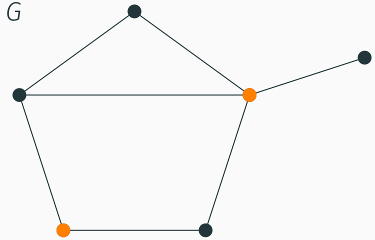
[2] CONICET

Conjuntos dominantes

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que $D \subseteq V$ es un **conjunto dominante** de G si para cada vértice $u \in V$ vale que $|N[u] \cap D| \geq 1$.

El **número de dominación** de G, $\gamma(G)$, es el mínimo cardinal de un conjunto dominante de G.



$\gamma(G) = 2$

Conjuntos k-upla dominantes

Definición (Harary - Haynes, 2000)

Dado un entero positivo k, un **conjunto k-upla dominante** de G es un subconjunto de vértices D tal que, para todo vértice $u \in V$ se verifica $|N[u] \cap D| \geq k$.

El **número de k-upla dominación** de G, $\gamma_{\times k}(G)$, es el mínimo cardinal de un conjunto k-upla dominante de G.

- Si $k = 1$, $\gamma_{\times 1}(G)$ coincide con el número de dominación de G.
- Para que un grafo G admita un conjunto k-upla dominante, es necesario que $\delta(G) \geq k - 1$, o lo que es lo mismo, $k \leq \delta(G) + 1$.
- Si D es un conjunto k-upla dominante de G, entonces D es un conjunto $(k-1)$-upla dominante (no óptimo) de G. En consecuencia

$$\gamma_{\times(k-1)}(G) < \gamma_{\times k}(G)$$

Algunas cotas para $\gamma_{\times k}(G)$

Teorema (Harary - Haynes, 2000)

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $\delta(G) \geq k - 1$, entonces

$$\gamma_{\times k}(G) \geq \frac{k|V(G)|}{\Delta(G)+1}, \qquad \gamma_{\times k}(G) \geq \frac{2k|V(G)| - 2|E(G)|}{k+1}$$

Teorema (Cabrera Martínez, 2022)

Sean $k \geq 2$ y $G = (V, E)$ un grafo con $\delta(G) \geq k$, entonces

$$\gamma_{\times k}(G) \geq \frac{(\delta(G)+k)|V(G)| - 2|E(G)|}{\delta(G)+1}$$

Teorema (Zverovich, 2008)

Sean G un grafo con $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ con $\delta \geq k - 1$, y para $t \leq \delta$
$\hat{d}_t = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{t}/n$, donde d_i es el grado del vértice v_i. Entonces

$$\gamma_{\times k}(G) \leq \frac{\ln(\delta - k + 2) + \ln(\hat{d}_{k-1} + \hat{d}_{k-2}) + 1}{\delta - k + 2}\, n$$

Algunas cotas para $\gamma_{\times k}(G)$

Un conjunto $D \subseteq V(G)$ es un **2-packing** de G si para cada par de vértices $u, v \in D$ vale $N[u] \cap N[v] = \varnothing$.

El **número de 2-packing** de G, $\rho(G)$, es el máximo cardinal de un 2-packing de G.

Teorema (Cabrera Martínez, 2022)

Sean $k \geq 2$ y $G = (V, E)$ un grafo con $\delta(G) \geq k$, entonces

$$k\rho(G) \leq \gamma_{\times k}(G) \leq |V(G)| - \rho(G)$$

Grafos de Kneser

Existen diversos artículos donde se estudian variantes del problema de dominación en Grafos de Kneser, entre ellos

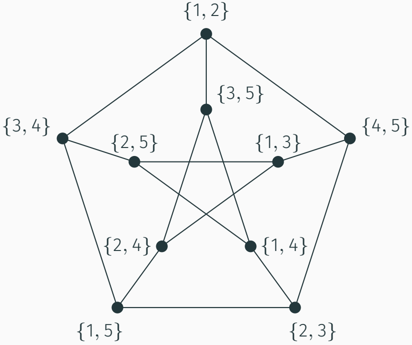
- **Domination on Kneser graphs**
  Jaroslav Ivanco, Bohdan Zelinka (1993)
- **Dominating sets in Kneser graphs**
  Gorodezky (2007)
- **Bounds on the domination number of Kneser graphs**
  Ostergard, Shao, Xu (2014)
- **Grundy domination and zero forcing in Kneser graphs**
  Bresar, Kos, Torres (2019)
- **Total dominator chromatic number of Kneser graphs**
  Behtoei, Jalilolghadr (2020)

Grafos de Kneser

Definición

Dados $n, r \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2r$, el **Grafo de Kneser** $K(n, r)$ es el grafo que tiene como conjunto de vértices los r-subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, y dos vértices u y v son adyacentes si y solo si $u \cap v = \varnothing$.

Ejemplo: $K(5, 2)$



- Los grafos de Kneser son regulares, y el grado de cada vértice de $K(n, r)$ es $\binom{n-r}{r}$. Luego, el grafo $K(n, r)$ solo admite un conjunto k-upla dominante si vale que

$$k \leq \binom{n-r}{r} + 1$$

- Más aún, si $k = \binom{n-r}{r} + 1$, entonces el único conjunto k-upla dominante de $K(n, r)$ es $V(K(n, r))$, y $\gamma_{\times k}(K(n, r)) = \binom{n}{r}$.
- Además tenemos

$$\gamma_{\times (k-1)}(K(n, r)) < \gamma_{\times k}(K(n, r))$$

Es decir $\gamma_{\times k}(K(n, r))$ es **creciente** respecto a k.

k-upla dominación en grafos de Kneser

- Si $\binom{n-r}{r} \geq k-1$, entonces

$$\gamma_{\times k}(K(n,r)) \geq \frac{k\binom{n}{r}}{\binom{n-r}{r}+1}$$

$$\gamma_{\times k}(K(n,r)) \geq \frac{2k\binom{n}{r} - \binom{n}{r}\binom{n-r}{r}}{k+1}$$

- Si $\binom{n-r}{r} \geq k-1$, entonces

$$\gamma_{\times k}(K(n,r)) \leq \frac{\ln(\delta-k+2) + \ln\left(\binom{\delta}{k-1}+\binom{\delta}{k-2}\right)+1}{\delta-k+2}\binom{n}{r}$$

donde $\delta = \binom{n-r}{r}$

k-upla dominación en grafos de Kneser

- Si $\binom{n-r}{r} \geq k$, entonces

$$k\rho(G) \leq \gamma_{\times k}(G) \leq |V(G)| - \rho(G)$$

$$k\rho(K(n,r)) \leq \gamma_{\times k}(K(n,r)) \leq \binom{n}{r} - \rho(K(n,r))$$

Un **packing** de $K(n,r)$ es un conjunto D de r-subconjuntos de $[n]$ tal que si $u, v \in D$, entonces $1 \leq |u \cap v| \leq (3r-1) - n$

Número de packing en grafos de Kneser

Un **packing** de $K(n,r)$ es un conjunto D de r-subconjuntos de $[n]$ tal que si $u, v \in D$, entonces $1 \leq |u \cap v| \leq (3r-1)-n$

- Si $r = 2$, $\rho(K(n,2)) = 1$ para todo $n \geq 4$.
- Si $n \geq 3r-1$, $\rho(K(n,r)) = 1$.
- Algunas cotas para el número de packing de $K(n,r)$ que surgen de resultados combinatorios:

$$\rho(K(n,r)) \leq \binom{n}{(3r-1)-n}, \qquad \rho(K(n,r)) \leq \sum_{i=0}^{(3r-1)-n} \binom{n-1}{i}$$

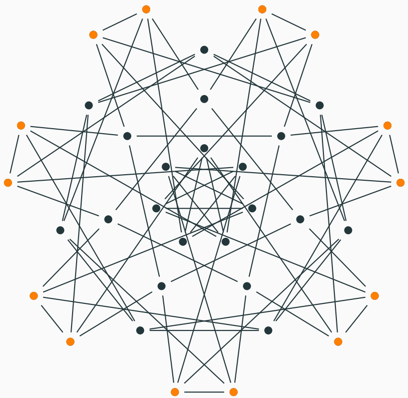
- Si $n = 3r-2$, entonces

$$\rho(K(n,r)) = \begin{cases} 7, & \text{si } r = 3 \\ 5, & \text{si } r = 4 \\ 3, & \text{si } r \geq 5 \end{cases}$$

Ejemplo:

Si $r = 3$ y $n = 3r - 2 = 7$, entonces $\rho(K(7,3)) = 7$. Entonces $\gamma_{\times k}(K(7,3)) \geq 7k$.

Un posible conjunto 2-upla dominante viene dado por



Y resulta $\gamma_{\times 2}(K(7,3)) = 14$

k-upla dominación en grafos de Kneser

Teorema

$\gamma_{\times k}(K(n,r)) = k + r$ si y solo si $n \geq r(k+r)$.

- Si $k = 1$, este es un resultado ya conocido para el número de dominación.
- Si $k > 1$ y D es un conjunto k-upla dominante de tamaño $k + r$, entonces los vértices de D son disjuntos dos a dos.
- La desigualdad $\gamma_{\times k}(K(n,r)) \geq k + r$ es cierta para cualquier valor de n. Luego si $n < r(k+r)$, entonces vale $\gamma_{\times k}(K(n,r)) > k + r$.
- Fijados k y r, solo queda una cantidad finita de valores de n para los cuales determinar $\gamma_{\times k}(K(n,r))$

Grafos de Kneser $K(n,2)$

- Si $n \geq 2(k+2)$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n,2)) = k+2$.
- Si $n < 2(k+2)$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n,2)) > k+2$.
- Si $k = \binom{n-2}{2} + 1$ y $n \geq 4$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n,2)) = \binom{n}{2}$.
- $\gamma_{\times (k-1)}(K(n,2)) < \gamma_{\times k}(K(n,2))$

Teorema

Si D es un conjunto k-upla dominante de $K(n,2)$ con $k \geq 2$, entonces D es un conjunto k-upla dominante de $K(n+1,2)$. En consecuencia, tenemos que

$$\gamma_{\times k}(K(n+1,2)) \leq \gamma_{\times k}(K(n,2))$$

$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3			10	-	-	-	-	-
6	3						15	-	-
7	3								
8	3	4							
9	3	4							
10	3	4	5						
11	3	4	5						
12	3	4	5	6					
13	3	4	5	6					
14	3	4	5	6	7				
15	3	4	5	6	7				
16	3	4	5	6	7	8			
17	3	4	5	6	7	8			
18	3	4	5	6	7	8	9		
19	3	4	5	6	7	8	9		
20	3	4	5	6	7	8	9	10	
21	3	4	5	6	7	8	9	10	
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Grafos de Kneser $K(n, 2)$

Teorema

Para $k \geq 2$, $\gamma_{\times k}(K(n,2)) = k + 3$ si y solo si $n = 2(k+1) + 1$.

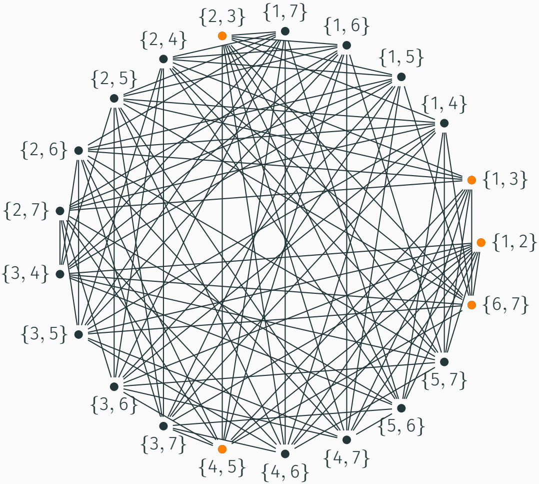
- Si $n = 2(k+1) + 1$ con $k \geq 2$ y D es un conjunto k-upla dominante óptimo en $K(n, 2)$, entonces existe un automorfismo φ tal que

$$\varphi(D) = \{\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\} \cup \{\{2a, 2a+1\} : 2 \leq a \leq k+1\}$$

Ejemplo:

Si $k = 2$ y $n = 2(k+1)+1 = 7$, entonces $\gamma_{\times 2}(K(7,2)) = 5$. Un posible conjunto 2-upla dominante viene dado por

$$D = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\Big\}$$



$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3			10	-	-	-	-	-
6	3						15	-	-
7	3	5							
8	3	4							
9	3	4	6						
10	3	4	5						
11	3	4	5	7					
12	3	4	5	6					
13	3	4	5	6	8				
14	3	4	5	6	7				
15	3	4	5	6	7	9			
16	3	4	5	6	7	8			
17	3	4	5	6	7	8	10		
18	3	4	5	6	7	8	9		
19	3	4	5	6	7	8	9	11	
20	3	4	5	6	7	8	9	10	
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Grafos de Kneser $K(n,2)$

Teorema

Para $k \geq 4$, $\gamma_{\times k}(K(n,2)) = k+4$ si y solo si $k+4 \leq n \leq 2(k+1)$.

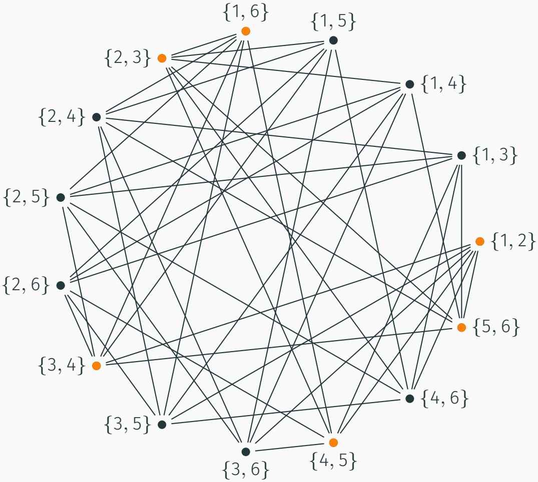
- Para $k=2$ y $n=6$, vale $\gamma_{\times 2}(K(6,2)) = 6$.
- Para $k=3$ y $n=7,8$, vale $\gamma_{\times 3}(K(n,2)) = 7$.
- Si $n \geq k+4$ para $k \geq 2$, entonces un posible conjunto k-upla dominante D viene dado por

$$D = \{\{a, a+1\} : 1 \leq a \leq k+3\} \cup \{\{1, k+4\}\}$$

Ejemplo:

Si $k = 2$ y $n = k + 4 = 6$, entonces $\gamma_{\times 2}(K(6,2)) = 6$. Un posible conjunto 2-upla dominante viene dado por

$$D = \Big\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{1,6\}\Big\}$$



$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3			10	-	-	-	-	-
6	3	6					15	-	-
7	3	5	7						
8	3	4	7	8					
9	3	4	6	8	9				
10	3	4	5	8	9	10			
11	3	4	5	7	9	10	11		
12	3	4	5	6	9	10	11	12	
13	3	4	5	6	8	10	11	12	13
14	3	4	5	6	7	10	11	12	13
15	3	4	5	6	7	9	11	12	13
16	3	4	5	6	7	8	11	12	13
17	3	4	5	6	7	8	10	12	13
18	3	4	5	6	7	8	9	12	13
19	3	4	5	6	7	8	9	11	13
20	3	4	5	6	7	8	9	10	13
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Si $n \leq k+3$ con $k \geq 4$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n,2)) \geq k+5$.

Proposición

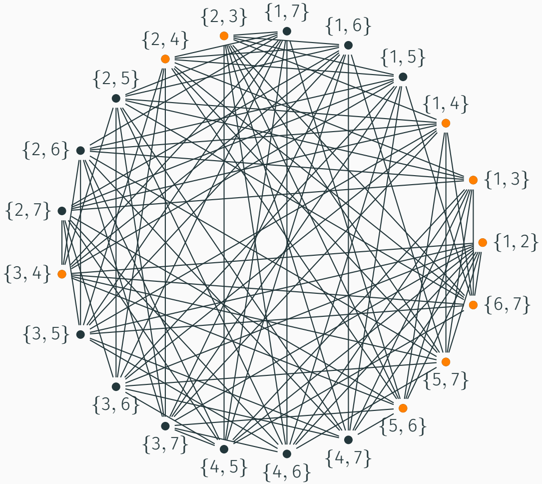
Si $n = k+3$ y $k \geq 4$, entonces $K(n,2)$ tiene un conjunto k-upla dominante de tamaño $k+5$ dado por

$$D = \binom{[4]}{2} \cup \{\{a, a+1\} : 5 \leq a \leq k+2\} \cup \{\{5, k+3\}\}$$

Ejemplo:

Si $k = 4$ y $n = k + 3 = 7$, entonces $\gamma_{\times 4}\left(K(7,2)\right) = 9$. Un posible conjunto 4-upla dominante viene dado por

$$D = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\Big\} \cup \Big\{\{5,6\},\{6,7\},\{5,7\}\Big\}$$



$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3			10	-	-	-	-	-
6	3	6					15	-	-
7	3	5	7	9					
8	3	4	7	8	10				
9	3	4	6	8	9	11			
10	3	4	5	8	9	10	12		
11	3	4	5	7	9	10	11	13	
12	3	4	5	6	9	10	11	12	14
13	3	4	5	6	8	10	11	12	13
14	3	4	5	6	7	10	11	12	13
15	3	4	5	6	7	9	11	12	13
16	3	4	5	6	7	8	11	12	13
17	3	4	5	6	7	8	10	12	13
18	3	4	5	6	7	8	9	12	13
19	3	4	5	6	7	8	9	11	13
20	3	4	5	6	7	8	9	10	13
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Grafos de Kneser $K(n, 2)$

Para valores grandes de k tenemos

Proposición

Si $k = \binom{n-2}{2}$ y $n \geq 5$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n, 2)) = \binom{n}{2} - 1$

Proposición

Si $k = \binom{n-2}{2} - 1$ y $n \geq 6$, entonces $\gamma_{\times k}(K(n, 2)) = \binom{n}{2} - 2$

$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3		9	10	-	-	-	-	-
6	3	6			13	14	15	-	-
7	3	5	7	9					19
8	3	4	7	8	10				
9	3	4	6	8	9	11			
10	3	4	5	8	9	10	12		
11	3	4	5	7	9	10	11	13	
12	3	4	5	6	9	10	11	12	14
13	3	4	5	6	8	10	11	12	13
14	3	4	5	6	7	10	11	12	13
15	3	4	5	6	7	9	11	12	13
16	3	4	5	6	7	8	11	12	13
17	3	4	5	6	7	8	10	12	13
18	3	4	5	6	7	8	9	12	13
19	3	4	5	6	7	8	9	11	13
20	3	4	5	6	7	8	9	10	13
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3	6	9	10	-	-	-	-	-
6	3	6	7	10	13	14	15	-	-
7	3	5	7	9					19
8	3	4	7	8	10				
9	3	4	6	8	9	11			
10	3	4	5	8	9	10	12		
11	3	4	5	7	9	10	11	13	
12	3	4	5	6	9	10	11	12	14
13	3	4	5	6	8	10	11	12	13
14	3	4	5	6	7	10	11	12	13
15	3	4	5	6	7	9	11	12	13
16	3	4	5	6	7	8	11	12	13
17	3	4	5	6	7	8	10	12	13
18	3	4	5	6	7	8	9	12	13
19	3	4	5	6	7	8	9	11	13
20	3	4	5	6	7	8	9	10	13
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$\gamma_{\times k}(K(n,2))$ para distintos valores de n y k

n	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$
4	3	6	-	-	-	-	-	-	-
5	3	6	9	10	-	-	-	-	-
6	3	6	7	10	13	14	15	-	-
7	3	5	7	9	≤ 11	≤ 14	≤ 15	≤ 17	19
8	3	4	7	8	10	≤ 12	≤ 13	≤ 16	≤ 17
9	3	4	6	8	9	11	≤ 13		
10	3	4	5	8	9	10	12		
11	3	4	5	7	9	10	11	13	
12	3	4	5	6	9	10	11	12	14
13	3	4	5	6	8	10	11	12	13
14	3	4	5	6	7	10	11	12	13
15	3	4	5	6	7	9	11	12	13
16	3	4	5	6	7	8	11	12	13
17	3	4	5	6	7	8	10	12	13
18	3	4	5	6	7	8	9	12	13
19	3	4	5	6	7	8	9	11	13
20	3	4	5	6	7	8	9	10	13
21	3	4	5	6	7	8	9	10	12
22	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Trabajo a futuro

- Continuar estudiando $\gamma_{\times k}(K(n,2))$.
- ¿Qué sucede para r general?
- Estudiar el número de packing $\rho(K(n,r))$ para $2r+1 \leq n \leq 3r-3$.

¡Gracias!

Bibliografía

Bostjan Bresar, Tim Kos, and Pablo Daniel Torres.
Grundy domination and zero forcing in kneser graphs.
ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA, 17:419–430, 2019.

Igor Gorodezky.
Dominating sets in kneser graphs.
Master's thesis, University of Waterloo, 2007.

Frank Harary and Teresa W Haynes.
Double domination in graphs.
Ars combinatoria, 55:201–213, 2000.

Jaroslav Ivančo and Bohdan Zelinka.
Domination in kneser graphs.
Mathematica Bohemica, 118(2):147–152, 1993.

Parvin Jalilolghadr and Ali Behtoei.
Total dominator chromatic number of kneser graphs.
arXiv preprint arXiv:2001.00221, 2020.

Abel Cabrera Martínez.
A note on the k-tuple domination number of graphs.
ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA, 5, 2022.

Patric RJ Östergård, Zehui Shao, and Xiaodong Xu.
Bounds on the domination number of kneser graphs.
ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA, 9(2):187–195, 2014.

Gurumurthi V Ramanan.
Proof of a conjecture of frankl and füredi.
journal of combinatorial theory, Series A, 79(1):53–67, 1997.

Vadim Zverovich.
The k-tuple domination number revisited.
Applied mathematics letters, 21(10):1005–1011, 2008.