El principio de compacidad por concentración en espacios de Orlicz

Analía Silva (UNSL-IMASL)
Trabajo conjunto con:
Julián Fernández Bonder (UBA-IC)
Reunión Anual de la UMA
Neuquén

2022

Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \colon \partial_i f \in L^p(\Omega) \text{ para todo } i = 1, \dots, N\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

y su norma es

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{1,p} = (\|f\|_p^p + \|\nabla f\|_p^p)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty$$

Teorema de inmersión de Sobolev

Sea Ω Lipschitz, se tiene, que para toda $f \in W^{1,p}(\Omega)$, vale la desigualdad

$$\|f\|_q \leq C(p, q, \Omega)\|f\|_{1,p},$$

para $1 \leq q \leq p^*$, donde p^* es llamado exponente crítico de Sobolev dado por $p^* = \frac{Np}{N-p}$.
Mas aún, cuando $q < p^*$ la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ resulta compacta.

Sea

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el operador $p-$laplaciano

Sea

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ es el operador $p-$laplaciano

- $q < p^*$ Caso subcrítico.
- $q = p^*$ Caso crítico.

El principio de compacidad por concentracción [Lions]

Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión débil convergente $W_0^{1,p}(\Omega)$ con limite débil u, tal que:

- $|\nabla u_j|^p \rightharpoonup \mu$ débil-* en el sentido de las medidas.
- $|u_j|^{p^*} \rightharpoonup \nu$ débil-* en el sentido de las medidas.

Entonces, para un conjunto de indices I tenemos:

1. $\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j} \quad \nu_j > 0$
2. $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j} \quad \mu_j > 0 \quad x_j \in \overline{\Omega}$
3. $\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{\mu_j}{S}$

Algunas generalizaciones:

- Caso p y dominios no acotados (Chawroski).
- Caso $p(x)$ y dominio acotado (J.Fernández Bonder, S.).
- Caso $p(x)$ y dominio no acotado (J.Fernández Bonder,N. Saintier, S.).
- Caso Laplaciano Fraccionario y dominio acotado (Palatucci-Pisante).
- Caso p-Laplaciano Fraccionario y dominio acotado (Mosconi-Squassina).
- Caso p-Laplaciano Fraccionario y dominio no acotado (J.Fernández Bonder,N. Saintier, S.).

Algunas generalizaciones:

- Caso p y dominios no acotados (Chawroski).
- Caso $p(x)$ y dominio acotado (J.Fernández Bonder, S.).
- Caso $p(x)$ y dominio no acotado (J.Fernández Bonder,N. Saintier, S.).
- Caso Laplaciano Fraccionario y dominio acotado (Palatucci-Pisante).
- Caso p-Laplaciano Fraccionario y dominio acotado (Mosconi-Squassina).
- Caso p-Laplaciano Fraccionario y dominio no acotado (J.Fernández Bonder,N. Saintier, S.).

y la versión Orlicz??

Definición

Una función $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función de Young si tiene la forma

$$A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq 0,$$

donde $a : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tienen las siguientes propiedades:

(i) $a(0) = 0$,

(ii) $a(s) > 0$ para $s > 0$,

(iii) a es continua a derecha para $s \geq 0$,

(iv) a es no decreciente en $(0,\infty)$.

Definición

Una función $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función de Young si tiene la forma

$$A(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau, \qquad t \geq 0,$$

donde $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tienen las siguientes propiedades:

(i) $a(0) = 0$,

(ii) $a(s) > 0$ para $s > 0$,

(iii) a es continua a derecha para $s \geq 0$,

(iv) a es no decreciente en $(0, \infty)$.

$$p^- \leq \frac{ta(t)}{A(t)} \leq p^+ \quad \text{para } t > 0,$$

donde $1 < p^- \leq p^+ < \infty$.

Se definen los Espacios de Orlicz

$$L^A(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \colon \Phi_{A,\Omega}(u) < \infty\},$$

donde

$$\Phi_{A,\Omega}(u) = \int_\Omega A(|u|)\,dx$$

y su norma es

$$\|u\|_{L^A(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \Phi_{A,\Omega}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Se definen los Espacios de Orlicz

$$L^A(\Omega) := \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \colon \Phi_{A,\Omega}(u) < \infty\},$$

donde

$$\Phi_{A,\Omega}(u) = \int_\Omega A(|u|)\, dx$$

y su norma es

$$\|u\|_{L^A(\Omega)} := \inf \left\{\lambda > 0 : \Phi_{A,\Omega}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Se define los Espacios de Orlicz Sobolev

$$W^{1,A}(\Omega) := \{u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \colon u, |\nabla u| \in L^A(\Omega)\},$$

y su norma es

$$\|u\|_{W^{1,A}(\Omega)} := \|u\|_{L^A(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^A(\Omega)}.$$

Teorema (Cianchi)

Sea A una función de Young que satisface ciertas propiedades. Entonces $W_0^{1,A}(\Omega) \hookrightarrow L^{A_n}(\Omega)$ es continua. Finalmente, dada B una función de Young, la inclusión $W_0^{1,A}(\Omega) \hookrightarrow L^B(\Omega)$ es compacta si $B \ll A_n$. Donde

$$A_n(t) = A \circ H^{-1}(t),$$

con

$$H(t) = \left(\int_0^t \left(\frac{\tau}{A(\tau)} \right)^{\frac{1}{n-1}} d\tau \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Teorema (J.Fernández Bonder-S.)

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,A}(\Omega)$ una sucesión tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $W^{1,A}(\Omega)$. Entonces existe un conjunto numerable I, números positivos $\{\mu_i\}_{i\in I}$ y $\{\nu_i\}_{i\in I}$ tal que

- $A_n(|u_k|)dx \rightharpoonup \nu = A_n(|u|)\,dx + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}$.
- $A(|\nabla u_k|)\,dx \rightharpoonup \mu \geq A(|\nabla u|)\,dx + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}$.
- $C\frac{1}{M_n^{-1}(\frac{1}{\nu_i})} \leq \frac{1}{A_\infty^{-1}(\frac{1}{\mu_i})}$.

donde C es constante que depende sólo de A y n, $M_n(t) = M(t, A_n)$ es la función de Matuszewska-Orlicz de A_n y A_∞ se define como $A_\infty(t) = \max\{t^{p^+}, t^{p^-}\}$.

Dada una función de Young A, se define la función de Matuszewska-Orlicz

$$M(t, A) := \limsup_{s\to\infty} \frac{A(st)}{A(s)}.$$

Ideas de la prueba

- Paso 1: ($u = 0$) Reverse Hölder.

$$\|\phi\|_{M_n,\nu} \leq C\|\phi\|_{A_\infty,\mu},$$

Ideas de la prueba

- Paso 1: ($u = 0$) Reverse Hölder.

$$\|\phi\|_{M_n,\nu} \leq C\|\phi\|_{A_\infty,\mu},$$

- Paso 2: ($u = 0$) Lema de descomposición.

Ideas de la prueba

- Paso 1: ($u = 0$) Reverse Hölder.

$$\|\phi\|_{M_n,\nu} \leq C\|\phi\|_{A_\infty,\mu},$$

- Paso 2: ($u = 0$) Lema de descomposición.
- Paso 3: Caso general.

Ideas de la prueba

- Paso 1: ($u = 0$) Reverse Hölder.

$$\|\phi\|_{M_n,\nu} \leq C\|\phi\|_{A_\infty,\mu},$$

- Paso 2: ($u = 0$) Lema de descomposición.
- Paso 3: Caso general.
- Paso 4: Relación entre los pesos.

Ideas de la prueba

- Paso 1: ($u = 0$) Reverse Hölder.

$$\|\phi\|_{M_n,\nu} \leq C\|\phi\|_{A_\infty,\mu},$$

- Paso 2: ($u = 0$) Lema de descomposición.
- Paso 3: Caso general.
- Paso 4: Relación entre los pesos.

Consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_a u = \frac{A_n'(|u|)}{|u|} u + \lambda \frac{F'(|u|)}{|u|} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta_a u = \text{div}(\frac{a(|\nabla u|)\nabla u}{|\nabla u|})$ y $F << A_n$.

Consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_a u = \frac{A_n'(|u|)}{|u|} u + \lambda \frac{F'(|u|)}{|u|} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta_a u = \operatorname{div}(\frac{a(|\nabla u|)\nabla u}{|\nabla u|})$ y $F << A_n$.
Su funcional asociado es

$$\mathcal{F}_\lambda(u) = \int_\Omega A(|\nabla u|) - A_n(|u|) - \lambda F(|u|)\, dx.$$

Consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_a u = \frac{A_n'(|u|)}{|u|} u + \lambda \frac{F'(|u|)}{|u|} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Delta_a u = \mathrm{div}(\frac{a(|\nabla u|)\nabla u}{|\nabla u|})$ y $F << A_n$.
Su funcional asociado es

$$\mathcal{F}_\lambda(u) = \int_\Omega A(|\nabla u|) - A_n(|u|) - \lambda F(|u|)\, dx.$$

Necesiamos una condición extra

$$c_1 \leq \frac{A(t)}{t^p} \leq c_2$$

para $t \geq t_0$ y algún exponente $p_- \leq p \leq p_+$.

Muchas gracias