Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
20 - 23 Septiembre 2022 - Universidad Nacional del Comahue

Determinación de coeficientes en un problema de Stefan a dos fases con contracción

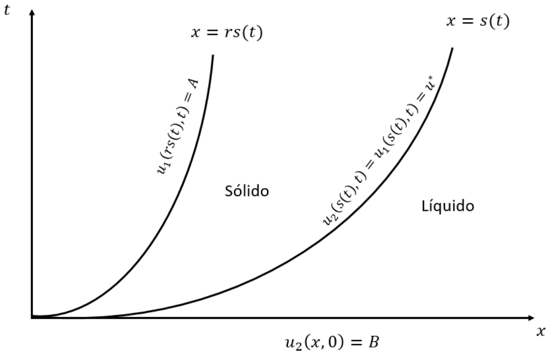
J. Bollati[1,2], M. F. Natale[1], J. Semitiel[1] y D. Tarzia[1,2]

jbollati@austral.edu.ar, fnatale@austral.edu.ar, jsemitiel@austral.edu.ar, dtarzia@austral.edu.ar

[1] Depto. Matemática, FCE - Universidad Austral, Rosario, Argentina
[2] CONICET

Introducción

Se considera un problema de Stefan unidimensional a dos fases que modela el proceso de solidificación de una sustancia que está inicialmente en estado líquido donde la región sólida es un dominio angular, es decir, mientras el líquido se solidifica, se contrae y forma una región vacía entre $x = 0$ y $x = rs(t)$ donde $0 < r < 1$ es el parámetro de contracción y $x = s(t)$ es la posición de la interfase, considerando la conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura en ambas fases.



Problema

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)=\rho_1 c_1(u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+r\dot{s}(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \qquad rs(t)<x<s(t), \quad t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\rho_2 c_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad x>s(t), \quad t>0, \tag{2}$$

$$u_2(+\infty,t)=u_2(x,0)=B \qquad t>0,\ x>s(t) \tag{3}$$

$$u_1(s(t),t)=u_2(s(t),t)=u^*, \qquad t>0, \tag{4}$$

$$k_1(u_1(s(t),t))\frac{\partial u_1}{\partial x}(s(t),t)-k_2(u_2(s(t),t))\frac{\partial u_2}{\partial x}(s(t),t)=\rho_1\ell\dot{s}(t), \qquad t>0, \tag{5}$$

$$u_1(rs(t),t)=A, \tag{6}$$

$$k_1(rs(t),t)\frac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t),t)=\frac{q_0}{\sqrt{t}}, \qquad q_0>0, \tag{7}$$

$u_i=u_i(x,t)$ temperatura de la fase i ($i=1$ sólido , $i=2$ líquido)
$\rho_i>0$: densidad de la región i
$\ell>0$: calor latente de fusión por unidad de masa
u^* : temperatura de cambio de fase en la frontera libre $x=s(t)$ con $A<u^*<B$
$r=1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\in(0,1)$: parámetro de contracción
$q_0>0$: coeficiente que caracteriza al flujo en $x=rs(t)$

Coeficientes térmicos

Calor específico: $c_i(u_i(x,t)) = c_i^* \left(1 + \beta_i \left(\frac{u_i - B}{u^* - B}\right)^{p_i}\right)$

Conductividad térmica: $k_i(u_i(x,t)) = k_i^* \left(1 + \beta_i \left(\frac{u_i - B}{u^* - B}\right)^{p_i}\right)$

donde $\beta_i > 0$ y $p_i \geq 0$, $k_i^* = k_i(u^*)$ es la conductividad térmica de referencia, y $c_i^* = c_i(u^*)$ es el calor específico de referencia

[Kumar-Singh-Rajeev, 2018; Bollati-Natale-Semitiel-Tarzia, 2020]

Difusividad térmica: $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$

$i = 1, 2$ (fase sólida y líquida, respectivamente).

Condición y sobre-condición en el borde $x = rs(t)$

(6):	$u_1(rs(t), t) = A$	Condición de tipo Dirichlet
(7):	$k_1(rs(t), t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t), t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$,	Sobre-condición de tipo Neumann

Objetivo: Determinación de coeficientes

Asumiendo que (1)-(7) es un problema de frontera libre, se determinará

- $u_i = u_i(x,t)$: temperatura en la fase $i = 1, 2$
- $x = s(t)$: frontera libre
- un coeficiente térmico entre $\{\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell\}$.

Preliminares

Si definimos (variable de similiridad) $\eta = \dfrac{x}{2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}}$ donde $\lambda > 0$ es un coeficiente adimensional a determinar y llamando $y_i(\eta) = \dfrac{u_i(x,t) - B}{u^* - B} \geq 0$, $i = 1, 2$ entonces:

Solución exacta al problema (1)-(6)

La única solución de tipo similaridad al problema (sin sobre-condición) fue obtenida por J. Bollati, M. F. Natale, J. Semitiel y D. A. Tarzia (*Un problema de frontera libre unidimensional a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos variables*, VirtUMA2021) y está pada por:

$$
\begin{aligned}
&u_1(x,t) = (u^* - B)\, y_1(\eta) + B, \quad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0,\\
&u_2(x,t) = (u^* - B)\, y_2(\eta) + B, \quad x > s(t), \quad t > 0,\\
&s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

donde (y_1, y_2, λ) es la única solución del problema funcional:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(y_1(\eta)) &= \mathcal{G}_1(\eta), \qquad r < \eta < 1, && (8)\\
\mathcal{F}_2(y_2(\eta)) &= \mathcal{G}_2(\eta), \qquad \eta > 1, && (9)\\
\mathcal{M}(x) &= \mathcal{N}(x), \qquad x \geq 0 && (10)
\end{aligned}
$$

Solución exacta al problema (1)-(6)

siendo

$$\mathcal{F}_i(x) = x + \frac{\beta_i}{p_i+1} x^{p_i+1}, \qquad x \geq 0, \qquad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$\mathcal{G}_1(\eta) = \left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)\right) \frac{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right)}{\operatorname{erf}\left(\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right), \; \eta \geq 0, \tag{12}$$

$$\mathcal{G}_2(\eta) = \mathcal{F}_2(1)\tfrac{\operatorname{erfc}(\lambda\eta)}{\operatorname{erfc}(\lambda)}, \; \eta \geq 0, \tag{13}$$

$$\mathcal{M}(x) = \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}\tfrac{k_1^*}{k_2^*}\left(\mathcal{F}_1(1) - \mathcal{F}_1\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)\right) \frac{\exp\left(-x^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right)}{\operatorname{erf}\left(x\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)} + \mathcal{F}_2(1)\tfrac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \; x \geq 0, \tag{14}$$

$$\mathcal{N}(x) = -x\tfrac{\sqrt{\pi}}{\mathrm{Ste}}\tfrac{\rho_1}{\rho_2}, \; x \geq 0. \tag{15}$$

Determinación de un coeficiente térmico a través de un problema de frontera libre

Equivalencia con la condición de flujo

De la solución exacta tenemos que la condición de tipo Neumann (7):

$$k_1(rs(t),t)\frac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t),t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}},$$

resulta equivalente a

$$\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\operatorname{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M \tag{16}$$

donde

$$M = (B-u^*)M^*, \quad M^* = \tfrac{A-B}{u^*-B} + \tfrac{\beta_1}{1+p_1}\left(\tfrac{A-B}{u^*-B}\right)^{p_1+1} - 1 - \tfrac{\beta_1}{1+p_1},$$

y $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación (10), es decir

$$\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}}\, M^*\, \mathcal{M}_1\left(x\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) - \left(1+\tfrac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2(x) = \tfrac{x\sqrt{\pi}\ell\rho_1}{c_2^*(B-u^*)\rho_2}, \tag{17}$$

donde

$$\mathcal{M}_1(x) = \tfrac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)}, \qquad \mathcal{M}_2(x) = \tfrac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)},\ x \geq 0. \tag{18}$$

Determinación de un coeficiente térmico a través de un problema de frontera libre

Determinaremos el coeficiente λ que caracteriza a la frontera libre junto con alguno de los siguientes coeficientes térmicos: $\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell$.

- † Caso 1: Determinación de λ, ρ_1.
- † Caso 2: Determinación de λ, ρ_2.
- † Caso 3: Determinación de λ, c_1^*.
- † Caso 4: Determinación de λ, c_2^*.
- † Caso 5: Determinación de λ, k_1^*.
- † Caso 6: Determinación de λ, k_2^*.
- † Caso 7: Determinación de λ, ℓ.

$$\mathcal{S}) \quad \begin{cases} (A): \quad \dfrac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\operatorname{erf}\left(\lambda\dfrac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M, \\[2ex] (B): \quad \dfrac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}}\, M^*\, \mathcal{M}_1\left(\lambda\dfrac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) - \left(1+\frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2(\lambda) = \dfrac{\lambda\sqrt{\pi}\ell\rho_1}{c_2^*(B-u^*)\rho_2}. \end{cases}$$

$$M = (B-u^*)M^*, \quad M^* = \frac{A-B}{u^*-B} + \frac{\beta_1}{1+p_1}\left(\frac{A-B}{u^*-B}\right)^{p_1+1} - 1 - \frac{\beta_1}{1+p_1},$$

$$\mathcal{M}_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)}, \qquad \mathcal{M}_2(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \ x \geq 0.$$

Teorema (Caso 1: Coeficientes λ, ρ_1)

Sean

$$R_1 = \frac{\sqrt{k_1^* c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} M^*, \qquad Q_1 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* c_2^*}}, \qquad D_1 = \frac{\ell \sqrt{\pi}}{c_2^* \rho_2 (B - u^*)}, \qquad P_1 = \frac{\sqrt{k_1^* c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M.$$

Si $R_1 > \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) P_1$, es decir

$$q_0 > \left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right) \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}}{\sqrt{\pi}} (B - u^*) \tag{19}$$

entonces existe única solición (λ, ρ_1) al sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente λ está dado por:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\rho_1}}{Q_1} \operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{\rho_1} P_1) \tag{20}$$

y $\rho_1 > 0$ es la única solución de la ecuación:

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{R}_1(x), \quad x \geq 0 \tag{21}$$

con

$$\mathcal{L}_1(x) = R_1 \frac{\exp\left(-(\operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x} P_1))^2\right)}{P_1} - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2 \left(\operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x} P_1) \frac{\sqrt{x}}{Q_1}\right)$$
$$\mathcal{R}_1(x) = \frac{D_1}{Q_1} x^{3/2} \operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x} P_1).$$

Demostración:

De $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}} \operatorname{erf}\left(\lambda \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}\right) = M$ se puede explicitar λ en función de ρ_1 y se obtiene

$$\lambda = \frac{\sqrt{\rho_1}}{Q_1} \operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{\rho_1} P_1).$$

Al sustituir este valor en

$$\frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} M^* \mathcal{M}_1 \left(\lambda \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}\right) - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2(\lambda) = \frac{\lambda\sqrt{\pi}\ell\rho_1}{c_2^*(B-u^*)\rho_2}$$

se tiene que ρ_1 debe ser solución de $\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{R}_1(x)$:

- $\mathcal{L}_1(x) = R_1 \frac{\exp\left(-(\operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x}P_1))^2\right)}{P_1} - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2\left(\operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x}P_1)\frac{\sqrt{x}}{Q_1}\right)$
  - $\mathcal{L}_1$ es una función decreciente,
  - $\mathcal{L}_1(0) = \frac{R_1}{P_1} - \mathcal{F}_2(1)$,
  - $\mathcal{L}_1(+\infty) = -\infty$.
- $\mathcal{R}_1(x) = \frac{D_1}{Q_1} x^{3/2} \operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x}P_1)$
  - $\mathcal{R}_1$ es una función creciente,
  - $\mathcal{R}_1(0) = 0$,
  - $\mathcal{R}_1(+\infty) = +\infty$.

Luego, de la hipótesis (19), existe un único $\rho_1 > 0$ solución de $\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{R}_1(x)$.

Teorema (Caso 2: Coeficientes λ, ρ_2)

Sean $R_2 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* c_2^*}} M^*$, $Q_2 = \frac{\sqrt{k_2^* c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}$, $D_2 = \frac{\ell \sqrt{\pi} \rho_1}{c_2^* (B - u^*)}$, $P_2 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M$.
Si $P_2 < 1$, es decir

$$q_0 > \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi}} \tag{22}$$

y

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{R_2^3 Q_2 \big(\mathcal{M}_1(\mathrm{erf}^{-1}(P_2))\big)^3}{\mathrm{erf}^{-1}(P_2) D_2} \right)^{1/2} > \left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right) \frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_2) R_2 \mathcal{M}_1(\mathrm{erf}^{-1}(P_2))}{3 Q_2 D_2}\right)}{\mathrm{erfc}\left(\left(\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_2) R_2 \mathcal{M}_1(\mathrm{erf}^{-1}(P_2))}{3 Q_2 D_2}\right)^{1/2}\right)} \tag{23}$$

entonces existe única solución (λ, ρ_2) al sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente ρ_2 está dado por:

$$\rho_2 = \left(\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_2)}{\lambda Q_2} \right)^2 \tag{24}$$

y $\lambda > 0$ es una solución de la ecuación:

$$\mathcal{L}_2(x) = \mathcal{R}_2(x), \quad x \geq 0 \tag{25}$$

con $\mathcal{L}_2(x) = x \frac{Q_2 R_2}{\mathrm{erf}^{-1}(P_2)} \mathcal{M}_1(\mathrm{erf}^{-1}(P_2)) - x^3 \frac{Q_2^2 D_2}{(\mathrm{erf}^{-1}(P_2))^2}$, $\mathcal{R}_2(x) = \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2(x)$.

Demostración:

De $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\operatorname{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right)=M$, se obtiene $\rho_2=\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)}{\lambda Q_2}\right)^2$ donde es necesario que $P_2<1$ para que la expresión esté bien definida.

Sustituyendo este valor en (B) se sigue que $\lambda>0$ debe ser solución de $\mathcal{L}_2(x)=\mathcal{R}_2(x)$:

- $\mathcal{R}_2(x)=\mathcal{F}_2(1)\mathcal{M}_2(x)$
  - $\mathcal{R}_2$ es una función creciente,
  - $\mathcal{R}_2(0)=1+\frac{\beta_2}{1+p_2}$,
  - $\mathcal{R}_2(+\infty)=+\infty$.
- $\mathcal{L}_2(x)=x\frac{Q_2R_2}{\operatorname{erf}^{-1}(P_2)}\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))-x^3\frac{Q_2^2D_2}{(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))^2}$
  - $\mathcal{L}_2(0)=0$,
  - $\mathcal{L}_2(+\infty)=-\infty$,
  - Sean $\lambda^*>0$ y $0<\overline{\lambda}<\lambda^*$ los valores tales que $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_2'$ se anulan, es decir $\lambda^*=\left(\frac{R_2\operatorname{erf}^{-1}(P_2)\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}{Q_2D_2}\right)^{1/2}$ $\overline{\lambda}=\left(\frac{R_2\operatorname{erf}^{-1}(P_2)\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_2))}{3Q_2D_2}\right)^{1/2}$.

De la hipótesis (23) se tiene que $\mathcal{L}_2(\overline{\lambda})>\mathcal{R}_2(\overline{\lambda})$. Luego existe al menos una solución de la ecuación $\mathcal{L}_2(x)=\mathcal{R}_2(x)$.

Teorema (Caso 3: Coeficientes λ, c_1^*)

Sean $R_3 = \frac{\sqrt{k_1^*\rho_1}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}} M^*$, $Q_3 = \frac{\sqrt{k_2^*\rho_2}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}$, $D_3 = \frac{\ell\sqrt{\pi}}{c_2^*\rho_2(B-u^*)}$, $P_3 = \frac{\sqrt{k_1^*\rho_1}}{q_0\sqrt{\pi}} M$.

Si $\frac{R_3}{P_3} - \left(1+\frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\sqrt{\pi}P_3}{2Q_3}\right) > \frac{D_3\sqrt{\pi}P_3}{2Q_3}$, es decir

$$\ell < \left[\frac{q_0\sqrt{\pi}M^*}{\sqrt{k_2^* c_2^*\rho_2}M} - \left(1+\frac{\beta_2}{p_2+1}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{k_1^*\rho_1 M\sqrt{c_2^*}}{2q_0\sqrt{k_2^*\rho_2}}\right)\right]\frac{2(B-u^*)\rho_2 q_0\sqrt{c_2^* k_2^*\rho_2}}{\sqrt{\pi}\rho_1^2 k_1^* M} \tag{26}$$

entonces existe una única solución (λ, c_1^*) al sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente λ está dado por

$$\lambda = \frac{\operatorname{erf}^{-1}\left(P_3\sqrt{c_1^*}\right)}{\sqrt{c_1^*}Q_3} \tag{27}$$

y c_1^* es la única solución en el intervalo $\left[0, \frac{1}{P_3^2}\right]$ de la ecuación

$$\mathcal{L}_3(x) = \mathcal{R}_3(x), \quad x \geq 0 \tag{28}$$

con

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{R_3}{P_3}\exp\left(-\left(\operatorname{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})\right)^2\right) - \left(1+\frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})}{\sqrt{x}Q_3}\right)$$

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{D_3}{Q_3}\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Demostración:

De $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\,\mathrm{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M$ se obtiene el valor de λ que está dado por $\lambda = \frac{\mathrm{erf}^{-1}\left(P_3\sqrt{c_1^*}\right)}{\sqrt{c_1^*}Q_3}$ donde $0 \leq c_1^* \leq \frac{1}{P_3^2}$ para que la expresión esté bien definida.

Reemplazando este valor de λ en (B) se sigue que $c_1^* \in \left[0, \frac{1}{P_3^2}\right]$ debe ser solución de la ecuación $\mathcal{L}_3(x) = \mathcal{R}_3(x)$:

- $\mathcal{L}_3(x) = \frac{R_3}{P_3}\exp\left(-\left(\mathrm{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})\right)^2\right) - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})}{\sqrt{x}Q_3}\right)$
  - $\mathcal{L}_3$ es una función decreciente,
  - $\mathcal{L}_3(0) = \frac{R_3}{P_3} - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\sqrt{\pi}P_3}{2Q_3}\right)$,
  - $\mathcal{L}_3\left(\frac{1}{P_3^2}\right) = -\infty$.
- $\mathcal{R}_3(x) = \frac{D_3}{Q_3}\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
  - $\mathcal{R}_3$ es una función creciente,
  - $\mathcal{R}_3(0) = \frac{D_3\sqrt{\pi}P_3}{2Q_3}$,
  - $\mathcal{R}_3\left(\frac{1}{P_3^2}\right)$.

Por lo tanto, de la hipótesis (26) se puede asegurar que existe un único $c_1^* \in \left[0, \frac{1}{P_3^2}\right]$ solución de la ecuación $\mathcal{L}_3(x) = \mathcal{R}_3(x)$.

Teorema (Caso 4: Coeficientes λ, c_2^*)

Sean $R_4 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2}} M^*$, $Q_4 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1}}$, $D_4 = \frac{\ell \sqrt{\pi} \rho_1}{c_2^* \rho_2 (B - u^*)}$, $P_4 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M$.

Si $P_4 < 1$ y $\left[R_4 \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_4)) - \frac{D_4}{Q_4} \operatorname{erf}^{-1}(P_4) \right] \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}{Q_4} > 0$, es decir

$$q_0 > \frac{M \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi}} \tag{29}$$

$$\ell < \frac{\exp\left(- \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} M}{q_0 \sqrt{\pi}} \right) \right]^2 \right)}{\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*} M}{q_0 \sqrt{\pi}} \right)} \frac{(B - u^*) q_0 \rho_2 M^* \sqrt{c_1^*}}{\rho_1 M \sqrt{k_1^* \rho_1}} \tag{30}$$

entonces exsite una única solución (λ, c_2^*) al sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente c_2^* está dado por

$$c_2^* = \left(\frac{\lambda Q_4}{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)} \right)^2 \tag{31}$$

y $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{R}_4(x), \quad x \geq 0 \tag{32}$$

con $\mathcal{L}_4 = \left[R_4 \mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_4)) - \frac{D_4}{Q_4} \operatorname{erf}^{-1}(P_4) \right] \frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}{Q_4}$, $\qquad \mathcal{R}_4(x) = \left(1 + \frac{\beta_2}{1 + p_2} \right) \mathcal{M}_2(x) x$.

Demostración:

De la ecuación $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\operatorname{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M$ y teniendo en cuenta la hipótesis (29) se tiene

$$c_2^* = \left(\frac{\lambda Q_4}{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}\right)^2.$$

Al sustituir este valor en

$$\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}}\, M^*\, \mathcal{M}_1\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) - \left(1+\frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2(\lambda) = \frac{\lambda\sqrt{\pi}\ell\rho_1}{c_2^*(B-u^*)\rho_2}$$

se sigue que $\lambda > 0$ debe ser solución de $\mathcal{L}_4 = \mathcal{R}_4(x)$:

- $\mathcal{R}_4(x) = \mathcal{F}_2(1)x\mathcal{M}_2(x)$
    - $\mathcal{R}_4$ es una función creciente,
    - $\mathcal{R}_4(0) = 0$,
    - $\mathcal{R}_4(+\infty) = +\infty$.
- $\mathcal{L}_4 = \left[R_4\mathcal{M}_1(\operatorname{erf}^{-1}(P_4)) - \frac{D_4}{Q_4}\operatorname{erf}^{-1}(P_4)\right]\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_4)}{Q_4}$

Teniendo en cuenta la hipótesis $\ell < \dfrac{\exp\left(-\left[\operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}M}{q_0\sqrt{\pi}}\right)\right]^2\right)}{\operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}M}{q_0\sqrt{\pi}}\right)}\dfrac{(B-u^*)q_0\rho_2 M^*\sqrt{c_1^*}}{\rho_1 M\sqrt{k_1^*\rho_1}}$,

resulta $\mathcal{L}_4 > 0$, por lo que $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación $\mathcal{L}_4 = \mathcal{R}_4(x)$.

Teorema (Caso 5: Coeficientes λ, k_1^*)

Sean $R_5 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} M^*$, $Q_5 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{\rho_1 c_2^*}}$, $D_5 = \frac{\ell \sqrt{\pi} \rho_1}{c_2^* \rho_2 (B - u^*) \rho_2}$, $P_5 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M$.
Si $\frac{R_5}{P_5} - 1 - \frac{\beta_2}{1+p_2} > 0$, es decir

$$q_0 > \left(1 + \frac{\beta_2}{p+1}\right) \frac{M}{M^*} \frac{\sqrt{k_2^* c_2^* \rho_2}}{\sqrt{\pi}}, \tag{33}$$

entonces existe única solución (λ, k_1^*) al sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente λ está dado por:

$$\lambda = \frac{\sqrt{k_1^*}}{Q_5} \operatorname{erf}^{-1}\left(\sqrt{k_1^*} P_5\right) \tag{34}$$

y k_1^* es la única solución en el intervalo $\left[0, \frac{1}{P_5^2}\right]$ de la ecuación

$$\mathcal{L}_5(x) = \mathcal{R}_5(x), \quad x \geq 0 \tag{35}$$

donde

$$\mathcal{L}_5(x) = \frac{R_5}{P_5} \exp\left(-\left(\operatorname{erf}^{-1}\left(\sqrt{x} P_5\right)\right)^2\right) - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2 \left(\frac{\sqrt{x} \operatorname{erf}^{-1}(\sqrt{x} P_5)}{Q_5}\right)$$
$$\mathcal{R}_5(x) = \frac{D_5}{Q_5} \sqrt{x} \operatorname{erf}^{-1}\left(\sqrt{x} P_5\right).$$

Demostración:

De la ecuación $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\,\mathrm{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M$, se sigue que $\lambda = \frac{\sqrt{k_1^*}}{Q_5}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\sqrt{k_1^*}P_5\right)$, donde $0 \leq k_1^* \leq \frac{1}{P_5^2}$ para que la expresión esté bien definida.
Sustituyendo este valor en la ecuación (B), resulta que k_1^* debe ser solución de la ecuación $\mathcal{L}_5(x) = \mathcal{R}_5(x)$:

- $\mathcal{R}_5(x) = \frac{D_5}{Q_5}\sqrt{x}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\sqrt{x}P_5\right)$
  - $\mathcal{R}_5$ es una función creciente,
  - $\mathcal{R}_5(0) = 0$,
  - $\mathcal{R}_5(\frac{1}{P_5^2}) = +\infty$.
- $\mathcal{L}_5(x) = \frac{R_5}{P_5}\exp\left(-\left(\mathrm{erf}^{-1}\left(\sqrt{x}P_5\right)\right)^2\right) - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\sqrt{x}P_5\right)}{Q_5}\right)$
  - $\mathcal{L}_5$ es una función decreciente
  - $\mathcal{L}_5(0) = \frac{R_5}{P_5} - 1 - \frac{\beta_2}{1+p_2}$,
  - $\mathcal{L}_5(\frac{1}{P_5^2}) = -\infty$.

Entonces como, por hipótesis, $\frac{R_5}{P_5} - 1 - \frac{\beta_2}{1+p_2} > 0$, existe una única solución $k_1^* \in \left[0, \frac{1}{P_5^2}\right]$ de la ecuación $\mathcal{L}_5(x) = \mathcal{R}_5(x)$.

Teorema (Caso 6: Coeficientes λ, k_2^*)

Sean $R_6 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\rho_2 c_2^*}} M^*$, $Q_6 = \frac{\sqrt{\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}$, $D_6 = \frac{\ell \sqrt{\pi} \rho_1}{c_2^* \rho_2 (B - u^*) \rho_2}$, $P_6 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M$ y $P^* = \frac{Q_6 R_6}{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)} \frac{\exp\left(-\left(\operatorname{erf}^{-1}(P_6)\right)^2\right)}{P_6} - D_6$. Si $P_6 < 1$ y $\frac{P^*}{\sqrt{\pi} \mathcal{F}_2(1)} > 1$, es decir

$$q_0 > \frac{M \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi}}, \tag{36}$$

y

$$\ell < \frac{c_2^* \rho_2 (B - u^*)}{\rho_1} \left\{ \frac{\sqrt{c_1^*} M^* q_0}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*} M} \frac{\exp\left(-\left[\operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{M \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}}\right)\right]^2\right)}{\operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{M \sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}}\right)} - \left(1 + \frac{\beta_2}{p_2 + 1}\right) \right\} \tag{37}$$

entonces existe una única solución (λ, k_2^*) del sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente k_2^* está dado por

$$k_2^* = \left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)}{\lambda Q_6}\right)^2 \tag{38}$$

y $\lambda > 0$ es la única solución de la ecuación

$$\mathcal{L}_6(x) = \mathcal{R}_6(x), \quad x \geq 0 \tag{39}$$

con $\mathcal{L}_6(x) = x P^*$ y $\mathcal{R}_6(x) = \left(1 + \frac{\beta_2}{1 + p_2}\right) \mathcal{M}_2(x)$.

Demostración:

Dado que $P_6 = \frac{\sqrt{\rho_1 c_1^*}}{q_0\sqrt{\pi}} M < 1$, la expresión $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}} \operatorname{erf}\left(\lambda \frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right) = M$ está bien definida. Así,

$$k_2^* = \left(\frac{\operatorname{erf}^{-1}(P_6)}{\lambda Q_6}\right)^2.$$

Reemplazando este valor en (B) entonces $\lambda > 0$ debe satisfacer $\mathcal{L}_6(x) = \mathcal{R}_6(x)$:

- $\mathcal{L}_6(x) = xP^*$
  - Dado que $P^* > 0$ entonces $\mathcal{L}_6$ es una función creciente,
  - $\mathcal{L}_6(0) = 0$,
  - $\mathcal{L}_6(+\infty) = +\infty$.
- $\mathcal{R}_6(x) = \mathcal{F}_2(1)\mathcal{M}_2(x)$
  - $\mathcal{R}_6$ es una función convexa decreciente,
  - $\mathcal{R}_6(0) = 1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}$,
  - $\mathcal{R}_6(+\infty) = +\infty$.

De la condición (37) se tiene que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathcal{L}_6(x)}{\mathcal{R}_6(x)} > 1$, por lo tanto existe un único $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{L}_6(x) = \mathcal{R}_6(x)$.

Teorema (Caso 7: Coeficientes λ, ℓ)

Sean $R_7 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} M^*$, $Q_7 = \frac{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}$, $D_7 = \frac{\sqrt{\pi}\rho_1}{c_2^* \rho_2 (B-u^*)\rho_2}$, $P_7 = \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} M$.

Si $P_7 < 1$ y $R_7 \mathcal{M}_1(\text{erf}^{-1}(P_7)) > \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2 \left(\frac{\text{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}\right)$, es decir

$$q_0 > \frac{M\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi}}, \tag{40}$$

y

$$\beta_2 < (p_2 + 1) \left[\frac{q_0 \sqrt{\pi}}{(B-u^*)\sqrt{k_2^* \rho_2 c_2^*}} \exp\left(\frac{k_1^* \rho_1 c_2^*}{k_2^* \rho_2 c_1^*}\right) \text{erfc}\left(\text{erf}^{-1}\left(\frac{M\sqrt{k_1^* \rho_1 c_1^*}}{q_0 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{k_1^* \rho_1 c_2^*}}{\sqrt{k_2^* \rho_2 c_1^*}}\right)\right) - 1 \right] \tag{41}$$

entonces existe única solución (λ, ℓ) del sistema $\mathcal{S}$. El coeficiente λ está dado por

$$\lambda = \frac{\text{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7} \tag{42}$$

y ℓ está definido por:

$$\ell = \frac{R_7 \mathcal{M}_1(\text{erf}^{-1}(P_7)) - \left(1 + \frac{\beta_2}{1+p_2}\right) \mathcal{M}_2 \left(\frac{\text{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}\right)}{\frac{\text{erf}^{-1}(P_7) D_7}{Q_7}}. \tag{43}$$

Demostración:

De la ecuación $\frac{q_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}\,\mathrm{erf}\left(\lambda\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right)=M$ y teniendo en cuenta que $q_0>\frac{M\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{\pi}}$, se obtiene inmediantamente que

$$\lambda=\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}>0.$$

Al sustituir este valor en

$$\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}}\,M^*\,\mathcal{M}_1\left(x\frac{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}\right)-\left(1+\tfrac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2(x)=\tfrac{x\sqrt{\pi}\ell\rho_1}{c_2^*(B-u^*)\rho_2},$$

y teniendo en cuenta la hipótesis que

$$\beta_2<(p_2+1)\left[\frac{q_0\sqrt{\pi}}{(B-u^*)\sqrt{k_2^*\rho_2 c_2^*}}\exp\left(\frac{k_1^*\rho_1 c_2^*}{k_2^*\rho_2 c_1^*}\right)\mathrm{erfc}\left(\mathrm{erf}^{-1}\left(\frac{M\sqrt{k_1^*\rho_1 c_1^*}}{q_0\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{k_1^*\rho_1 c_2^*}}{\sqrt{k_2^*\rho_2 c_1^*}}\right)\right)-1\right]$$

se obtiene el único valor de $\ell>0$ dado por

$$\ell=\frac{R_7\mathcal{M}_1(\mathrm{erf}^{-1}(P_7))-\left(1+\tfrac{\beta_2}{1+p_2}\right)\mathcal{M}_2\left(\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_7)}{Q_7}\right)}{\frac{\mathrm{erf}^{-1}(P_7)D_7}{Q_7}}.$$

Conclusiones y continuación del trabajo

- Se han estudiados todos los casos que surgen cuando se considera que el problema es de frontera libre (desconocida). Es decir cuando se determina λ y un coeficiente térmico entre $\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell$.

- Quedan por estudiar los casos en que el problema se considera de frontera móvil (conocida), donde al ser λ conocido, se hallarán dos coeficientes térmicos entre $\rho_1, \rho_2, c_1^*, c_2^*, k_1^*, k_2^*, \ell$.

Gracias por su atención.