Un estudio sobre retículos distributivos con una relación de precontacto

Luciana Valenzuela

Trabajo en colaboración con Sergio Celani

Universidad Nacional de La Plata

CONGRESO UMA 2022

Motivación:

- Las relaciones de precontacto son una generalización de los operadores modales.

Motivación:

- Las relaciones de precontacto son una generalización de los operadores modales.
- Es un hecho conocido que en álgebras de Boole las nociones de relación de precontacto, relación de subordinación y operador cuasi-modal son interdefinibles.

Motivación:

- Las relaciones de precontacto son una generalización de los operadores modales.
- Es un hecho conocido que en álgebras de Boole las nociones de relación de precontacto, relación de subordinación y operador cuasi-modal son interdefinibles.
- En retículos distributivos las nociones de subordinación y operador cuasi-modal también son interdefinibles, pero no ocurre lo mismo con las relaciones de precontacto.

Motivación:

- Las relaciones de precontacto son una generalización de los operadores modales.
- Es un hecho conocido que en álgebras de Boole las nociones de relación de precontacto, relación de subordinación y operador cuasi-modal son interdefinibles.
- En retículos distributivos las nociones de subordinación y operador cuasi-modal también son interdefinibles, pero no ocurre lo mismo con las relaciones de precontacto.

Objetivos:

1. Estudiar las relaciones de precontacto en retículos distributivos.

Objetivos:

1. Estudiar las relaciones de precontacto en retículos distributivos.
2. Dar una representación de tipo relacional para los retículos de precontacto.

Objetivos:

1. Estudiar las relaciones de precontacto en retículos distributivos.
2. Dar una representación de tipo relacional para los retículos de precontacto.
3. Caracterizar relacionalmente a una clase de homomorfismos entre retículos de precontacto.

Objetivos:

1. Estudiar las relaciones de precontacto en retículos distributivos.
2. Dar una representación de tipo relacional para los retículos de precontacto.
3. Caracterizar relacionalmente a una clase de homomorfismos entre retículos de precontacto.
4. Introducir una clase de congruencia de retículos que preservan la relación de precontacto y que permite definir una relación de precontacto en el retículo cociente.

Objetivos:

1. Estudiar las relaciones de precontacto en retículos distributivos.
2. Dar una representación de tipo relacional para los retículos de precontacto.
3. Caracterizar relacionalmente a una clase de homomorfismos entre retículos de precontacto.
4. Introducir una clase de congruencia de retículos que preservan la relación de precontacto y que permite definir una relación de precontacto en el retículo cociente.
5. Dar una definición adecuada de subálgebra de precontacto.

Trabajos previos:

- G. Dimov, D. Vakarelov, Topological representation of precontact algebras, in: W. MacCaull, M. Winter, I. Düntsch (Eds.), Relation Methods in Computer Science, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 3929, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 1–16.
- Düntsch I. and Vakarelov D.: Region-based theory of discrete spaces: a proximity approach.Ann. Math. Artif. Intell., 49 (1-4), (2007), 5–14.

Trabajos previos:

- G. Dimov, D. Vakarelov, Topological representation of precontact algebras, in: W. MacCaull, M. Winter, I. Düntsch (Eds.), Relation Methods in Computer Science, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 3929, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 1–16.
- Düntsch I. and Vakarelov D.: Region-based theory of discrete spaces: a proximity approach.Ann. Math. Artif. Intell., 49 (1-4), (2007), 5–14.
- Düntsch, I., MacCaull, W., Vakarelov, D., and Winter, M.: Distributive contact lattices: Topological representation. J. Logic Algebraic Program. 76, (2008), 18–34

Definición

Dado un retículo distributivo L, diremos que $\mathsf{C} \subseteq L \times L$ *es una* **relación de precontacto** *si satisface:*

Definición

Dado un retículo distributivo L, diremos que $\mathsf{C} \subseteq L \times L$ es una **relación de precontacto** *si satisface:*

1. *Si* $(a, b) \in \mathsf{C}$ *entonces* $a, b \neq 0$,
2. $(a \vee b, c) \in \mathsf{C}$ *si y sólo si* $(a, c) \in \mathsf{C}$ *o* $(b, c) \in \mathsf{C}$,
3. $(a, b \vee c) \in \mathsf{C}$ *si y sólo si* $(a, b) \in \mathsf{C}$ *o* $(a, c) \in \mathsf{C}$

Definición

Dado un retículo distributivo L*, diremos que* $\mathrm{C} \subseteq L \times L$ *es una* **relación de precontacto** *si satisface:*

1. *Si* $(a, b) \in \mathrm{C}$ *entonces* $a, b \neq 0$*,*
2. $(a \vee b, c) \in \mathrm{C}$ *si y sólo si* $(a, c) \in \mathrm{C}$ *o* $(b, c) \in \mathrm{C}$*,*
3. $(a, b \vee c) \in \mathrm{C}$ *si y sólo si* $(a, b) \in \mathrm{C}$ *o* $(a, c) \in \mathrm{C}$

Llamaremos **retículo de precontacto** *al par* $\langle L, \mathrm{C} \rangle$ *donde* L *es un retículo acotado distributivo y* C *es una relación de precontacto definida sobre* L*.*

Definición

Dado un retículo distributivo L, diremos que $C \subseteq L \times L$ es una **relación de precontacto** *si satisface:*

1. *Si $(a, b) \in C$ entonces $a, b \neq 0$,*
2. $(a \vee b, c) \in C$ *si y sólo si* $(a, c) \in C$ *o* $(b, c) \in C$,
3. $(a, b \vee c) \in C$ *si y sólo si* $(a, b) \in C$ *o* $(a, c) \in C$

Llamaremos **retículo de precontacto** *al par $\langle L, C\rangle$ donde L es un retículo acotado distributivo y C es una relación de precontacto definida sobre L.*

Definición

Sea B un álgebra de Boole. Diremos que $\prec \subseteq B \times B$ *es una* **relación de subordinación** *sobre B si satisface:*

Definición

Sea B un álgebra de Boole. Diremos que $\prec \subseteq B \times B$ es una **relación de subordinación** *sobre B si satisface:*

1. $0 \prec 0$ *y* $1 \prec 1$
2. $a \prec b, c$ *entonces* $a \prec b \wedge c$
3. $a, b \prec c$ *entonces* $a \vee b \prec c$
4. $a \leq b \prec c \leq d$ *entonces* $a \prec d$

Definición

Sea B un álgebra de Boole. Diremos que $\prec \subseteq B \times B$ es una **relación de subordinación** *sobre B si satisface:*

1. $0 \prec 0$ *y* $1 \prec 1$
2. $a \prec b, c$ *entonces* $a \prec b \wedge c$
3. $a, b \prec c$ *entonces* $a \vee b \prec c$
4. $a \leq b \prec c \leq d$ *entonces* $a \prec d$

Si $\mathrm{C} \subseteq B \times B$ es una relación de precontacto, entonces

$$a \prec_{\mathrm{C}} b \Longleftrightarrow (a, \neg b) \notin \mathrm{C}$$

es una relación de subordinación sobre B.

Definición

Sea B un álgebra de Boole. Diremos que $\prec \subseteq B \times B$ es una **relación de subordinación** *sobre B si satisface:*

1. $0 \prec 0$ *y* $1 \prec 1$
2. $a \prec b, c$ *entonces* $a \prec b \wedge c$
3. $a, b \prec c$ *entonces* $a \vee b \prec c$
4. $a \leq b \prec c \leq d$ *entonces* $a \prec d$

Si $\mathrm{C} \subseteq B \times B$ es una relación de precontacto, entonces

$$a \prec_{\mathrm{C}} b \Longleftrightarrow (a, \neg b) \notin \mathrm{C}$$

es una relación de subordinación sobre B. Recíprocamente, si $\prec \subseteq B \times B$ es una relación de subordinación sobre B, entonces

$$(a, b) \in \mathrm{C}_{\prec} \Longleftrightarrow a \not\prec \neg b$$

es una relación de precontacto sobre B.

Ejemplos

Definición

Dada un álgebra de Boole B, diremos que $\Delta : B \longrightarrow \mathrm{Id(B)}$ es un **operador cuasi-modal** *sobre B si satisface:*

- $\Delta(a \wedge b) = \Delta a \cap \Delta b$
- $\Delta 1 = A$

Ejemplos

Definición

Dada un álgebra de Boole B, diremos que $\Delta : B \longrightarrow \mathrm{Id(B)}$ es un **operador cuasi-modal** *sobre B si satisface:*

- $\Delta(a \wedge b) = \Delta a \cap \Delta b$
- $\Delta 1 = A$

Es sabido que, en álgebras de Boole, los operadores cuasi-modales son interdefinibles con las relaciones de subordinación y, por lo tanto, con las relaciones de precontacto.

Ejemplos

Definición

Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ *es llamada* **retículo distributivo con un operador de negación** *si:*

- $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ *es un retículo distributivo.*
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
- $\neg 0 = 1$

En este caso, es posible definir una relación de precontacto $\mathrm{C}_\neg$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \in \mathrm{C}_\neg \iff \neg a \vee \neg b \neq 1$$

Ejemplos

Sea $\langle X, \leq, R\rangle$ un conjunto ordenado dotado de una relación binaria R sobre X. Si consideramos el conjunto

$$\mathrm{Up}(X) = \{U \subseteq X : U \textit{ es creciente}\}$$

y la relación $\mathsf{C}_R \subseteq \mathrm{Up}(X) \times \mathrm{Up}(X)$ definida por:

$$(U, V) \in \mathsf{C}_R \Longleftrightarrow (U \times V) \cap R \neq \emptyset$$

Resulta que:

$$\langle \mathrm{Up}(X), \mathsf{C}_R\rangle$$

es un retículo de precontacto.

Definición

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L, G \neq \emptyset$. Diremos que G es un **grill** *si:*

Definición

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L, G \neq \emptyset$. Diremos que G es un **grill** *si:*

1. $0 \notin G$
2. *Si $x \leq y$ y $x \in G$ entonces $y \in G$*
3. *Si $(x \vee y) \in G$ entonces $x \in G$ o $y \in G$.*

Definición

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L, G \neq \emptyset$. Diremos que G es un **grill** *si:*

1. $0 \notin G$
2. *Si $x \leq y$ y $x \in G$ entonces $y \in G$*
3. *Si $(x \vee y) \in G$ entonces $x \in G$ o $y \in G$.*

Lema

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L$. Entonces G es un grill si y sólo si G^c es un ideal.

Definición

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L, G \neq \emptyset$. Diremos que G es un **grill** *si:*

1. $0 \notin G$
2. *Si $x \leq y$ y $x \in G$ entonces $y \in G$*
3. *Si $(x \vee y) \in G$ entonces $x \in G$ o $y \in G$.*

Lema

Sea L un retículo distributivo y $G \subseteq L$. Entonces G es un grill si y sólo si G^c es un ideal.

Lema

Sea $\langle L, \mathrm{C} \rangle$ un retículo de precontacto y $a \in L$, $a \neq 0$. El conjunto $\mathrm{C}(a) = \{b \in L : (a, b) \in \mathrm{C}\}$ es un grill.

Observaciones

1. Se puede probar que la noción de **relación de precontacto** se puede pensar como una función $c : L \longrightarrow Grill(L) \cup \{\emptyset\}$ que verifica las siguientes condiciones:
   - $c(a \vee b) = c(a) \cup c(b)$
   - $c(0) = \emptyset$

Observaciones

1. Se puede probar que la noción de **relación de precontacto** se puede pensar como una función $c : L \longrightarrow \mathit{Grill}(L) \cup \{\emptyset\}$ que verifica las siguientes condiciones:
   - $c(a \vee b) = c(a) \cup c(b)$
   - $c(0) = \emptyset$
2. Si llamamos $\mathrm{C}(a)^c = \{b \in L : b \notin \mathrm{C}(a)\}$ y definimos una función $\alpha : L \longrightarrow \mathrm{Id}(L)$ como: $\alpha(a) = \mathrm{C}(a)^c$, tendremos que:
   - $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \cap \alpha(b)$,
   - $\alpha(0) = A$,
   - Si $a \leq b$ entonces $\alpha(b) \subseteq \alpha(a)$

Definición

Un **espacio de precontacto** *es un par* $\langle X, R\rangle$ *donde* X *es un espacio de Priestley y* R *es una relación binaria, definida sobre* X*, que satisface:*

Definición

Un **espacio de precontacto** *es un par* $\langle X, R\rangle$ *donde* X *es un espacio de Priestley y* R *es una relación binaria, definida sobre* X*, que satisface:*

- *Para todo* $x \in X : R(x)$ *es cerrado y decreciente,*
- *Para todo* $U \in \mathrm{D}(X)$*, el conjunto:*

$$\alpha_R(U) = \{x \in X : R(x) \cap U = \emptyset\}$$

es abierto y creciente.

Representación

Consideremos un espacio de precontacto $\langle X, R \rangle$. A continuación definimos la relación $\mathsf{C}_R \subseteq \mathrm{D}(X) \times \mathrm{D}(X)$ como:

$$(U, V) \in \mathsf{C}_R \Longleftrightarrow U \nsubseteq \alpha_R(V)$$

Entonces,

Teorema

Si $\langle X, R \rangle$ *es un espacio de precontacto, entonces* $\langle \mathrm{D}(X), \mathsf{C}_R \rangle$ *es un retículo de precontacto.*

Representación

Consideremos un retículo de precontacto $\langle L, \mathrm{C} \rangle$. A continuación, definimos la relación $R_{\mathrm{C}} \subseteq \mathrm{X}(L) \times \mathrm{X}(L)$ de la siguiente manera:

$$(P, Q) \in R_{\mathrm{C}} \iff P \times Q \subseteq \mathrm{C}$$

Teorema

Si $\langle L, \mathrm{C} \rangle$ un retículo de precontacto, entonces $\langle \mathrm{X}(L), R_{\mathrm{C}} \rangle$ es un espacio de precontacto.

Definición

Sean $\langle L_1, C_1 \rangle$ *y* $\langle L_2, C_2 \rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.*

Definición

Sean $\langle L_1, \mathrm{C}_1\rangle$ *y* $\langle L_2, \mathrm{C}_2\rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(h(a), h(b)) \in \mathrm{C}_2 \Rightarrow (a, b) \in \mathrm{C}_1$*, para todo* $a, b \in L_1$*.*

(2) $(a, h(x)) \notin \mathrm{C}_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, x) \notin \mathrm{C}_1$ *y* $a \leq h(b)$*.*

Definición

Sean $\langle L_1, \mathrm{C}_1\rangle$ *y* $\langle L_2, \mathrm{C}_2\rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(h(a), h(b)) \in \mathrm{C}_2 \Rightarrow (a, b) \in \mathrm{C}_1$*, para todo* $a, b \in L_1$.

(2) $(a, h(x)) \notin \mathrm{C}_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, x) \notin \mathrm{C}_1$ *y* $a \leq h(b)$.

Diremos que:

- *h es un* **homomorfismo de precontacto** *si satisface la condición (1).*

Definición

Sean $\langle L_1, C_1 \rangle$ *y* $\langle L_2, C_2 \rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(h(a), h(b)) \in C_2 \Rightarrow (a, b) \in C_1$*, para todo* $a, b \in L_1$*.*

(2) $(a, h(x)) \notin C_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, x) \notin C_1$ *y* $a \leq h(b)$*.*

Diremos que:

- *h es un* **homomorfismo de precontacto** *si satisface la condición (1).*
- *h es un* **homomorfismo de precontacto fuerte** *si satisface las condiciones (1) y (2).*

Definición

Sean $\langle L_1, C_1\rangle$ *y* $\langle L_2, C_2\rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(h(a), h(b)) \in C_2 \Rightarrow (a, b) \in C_1$, *para todo* $a, b \in L_1$.

(2) $(a, h(x)) \notin C_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, x) \notin C_1$ *y* $a \leq h(b)$.

Diremos que:

- *h es un* **homomorfismo de precontacto** *si satisface la condición (1).*
- *h es un* **homomorfismo de precontacto fuerte** *si satisface las condiciones (1) y (2).*
- *h es un* **isomorfismo de precontacto** *si es un isomorfismo de retículos y además cumple:*

$$\forall a, b \in L_1 : (h(a), h(b)) \in C_2 \Longleftrightarrow (a, b) \in C_1$$

Definición

Sean $\langle L_1, C_1\rangle$ *y* $\langle L_2, C_2\rangle$ *retículos de precontacto y* $h : L_1 \longrightarrow L_2$ *un homomorfismo.Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(h(a), h(b)) \in C_2 \Rightarrow (a, b) \in C_1$, *para todo* $a, b \in L_1$.

(2) $(a, h(x)) \notin C_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, x) \notin C_1$ *y* $a \leq h(b)$.

Diremos que:

- h *es un* **homomorfismo de precontacto** *si satisface la condición (1).*
- h *es un* **homomorfismo de precontacto fuerte** *si satisface las condiciones (1) y (2).*
- h *es un* **isomorfismo de precontacto** *si es un isomorfismo de retículos y además cumple:*

$$\forall a, b \in L_1 : (h(a), h(b)) \in C_2 \Longleftrightarrow (a, b) \in C_1$$

Definición

Sean $\langle X_1, R_1 \rangle$, $\langle X_2, R_2 \rangle$ *dos espacios de precontacto y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morfismo de Priestley. Consideremos las siguientes condiciones:*

Definición

Sean $\langle X_1, R_1 \rangle$, $\langle X_2, R_2 \rangle$ *dos espacios de precontacto y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morfismo de Priestley. Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R_2$

(2) *Para todo* $x \in X_1$ *y para todo* $y \in X_2$*:*
$(f(x), y) \in R_2 \Rightarrow \exists z \in X_1 : (x, z) \in R_1$ *y* $y \leq f(z)$.

Diremos que:

- f *es* **estable** *si verifica la condición (1).*

Definición

Sean $\langle X_1, R_1 \rangle$, $\langle X_2, R_2 \rangle$ *dos espacios de precontacto y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morfismo de Priestley. Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R_2$

(2) *Para todo* $x \in X_1$ *y para todo* $y \in X_2$*:*
$(f(x), y) \in R_2 \Rightarrow \exists z \in X_1 : (x, z) \in R_1$ *y* $y \leq f(z)$.

Diremos que:

- f *es* **estable** *si verifica la condición (1).*
- f *es* **fuertemente estable** *si verifica las condiciones (1) y (2).*

Definición

Sean $\langle X_1, R_1 \rangle$, $\langle X_2, R_2 \rangle$ *dos espacios de precontacto y* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *un morfismo de Priestley. Consideremos las siguientes condiciones:*

(1) $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R_2$

(2) *Para todo* $x \in X_1$ *y para todo* $y \in X_2$*:*
$(f(x), y) \in R_2 \Rightarrow \exists z \in X_1 : (x, z) \in R_1$ *y* $y \leq f(z)$.

Diremos que:

- f *es* **estable** *si verifica la condición (1).*
- f *es* **fuertemente estable** *si verifica las condiciones (1) y (2).*
- f *es un* **isomorfismo** *si es un isomorfismo de espacios de Priestley y además es fuertemente estable.*

Definición

Sean $\langle X_1, R_1\rangle$, $\langle X_2, R_2\rangle$ dos espacios de precontacto y $f : X_1 \longrightarrow X_2$ un morfismo de Priestley. Consideremos las siguientes condiciones:

(1) $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R_2$

(2) *Para todo $x \in X_1$ y para todo $y \in X_2$:*
$(f(x), y) \in R_2 \Rightarrow \exists z \in X_1 : (x, z) \in R_1$ *y* $y \leq f(z)$.

Diremos que:

- f *es* **estable** *si verifica la condición (1).*
- f *es* **fuertemente estable** *si verifica las condiciones (1) y (2).*
- f *es un* **isomorfismo** *si es un isomorfismo de espacios de Priestley y además es fuertemente estable.*

Dualidad

A partir de L_1, L_2 retículos de precontacto y $h : L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo de retículos, definimos la función $h_* : \mathrm{X(L_2)} \longrightarrow \mathrm{X(L_1)}$ como $h_*(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in \mathrm{X(L_2)}$:

Dualidad

A partir de L_1, L_2 retículos de precontacto y $h : L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo de retículos, definimos la función $h_* : \mathrm{X(L_2)} \longrightarrow \mathrm{X(L_1)}$ como $h_*(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in \mathrm{X(L_2)}$:

Teorema

Sean L_1, L_2 retículos de precontacto. Si $h : L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorfismo de retículos. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1.
   a) $\forall a, b \in L_1 : (h(a), h(b)) \in \mathrm{C}_2 \Rightarrow (a, b) \in \mathrm{C}_1$
   b) $\forall P, Q \in \mathrm{X}(L_2)$ *se verifica:*

$$(P, Q) \in R_2 \Rightarrow (h_*(P), h_*(Q)) \in R_1$$

Dualidad

2.

a) $\forall a \in L_2 \forall x \in L_1 : (a, h(c)) \notin C_2 \Rightarrow \exists b \in L_1 : (b, c) \notin C_1$ *y* $a \leq h(b)$

b) $\forall P \in \mathrm{X}(L_2)$ *y* $\forall Q \in \mathrm{X}(L_1)$:

$$(h_*(P), Q) \in R_1 \Rightarrow \exists D \in \mathrm{X}(L_2) : (P, D) \in R_2 \text{ y } Q \subseteq h_*(D)$$

Teorema

Sea $\langle L, \mathrm{C} \rangle$ *un retículo de precontacto. La aplicación* $\varphi_L : L \longrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{X}(\mathrm{L}))$ *definida por* $\varphi(a) = \{P \in \mathrm{X}(\mathrm{L}) : a \in P\}$, *es un isomorfismo entre retículos de precontacto.*

Teorema

Sea $\langle X, R \rangle$ *un espacio de precontacto.La aplicación* $\varepsilon_X : X \longrightarrow X(\mathrm{D}(\mathrm{X}))$ *definida por* $\varepsilon_X(x) = \{U \in \mathrm{D}(X) : x \in U\}$ *es un isomorfismo entre espacios de precontacto.*