Espacios de Sóbolev anisotrópicos y aplicaciones

Ignacio Ceresa Dussel

IC-FCEN-UBA

UMA Neuquén 2022

Espacios de Sóbolev anisotrópicos

Espacios de Sóbolev anisotrópicos parciales

Dados $1 < p < \infty$, $0 < s \leq 1$ y $i \in \{1, \dots, n\}$

$$W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tales que } J^i_{s,p}(u) < \infty\}$$

Espacios de Sóbolev anisotrópicos parciales

Dados $1 < p < \infty$, $0 < s \leq 1$ y $i \in \{1, \dots, n\}$

$$W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tales que } J^i_{s,p}(u) < \infty\}$$

$$J^i_{s,p}(u) = \begin{cases} (1-s)s \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}} \, dh \, dx & \text{si} \quad s < 1 \\ \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_i} u|^p \, dx & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

Espacios de Sóbolev anisotrópicos parciales

Dados $1 < p < \infty$, $0 < s \leq 1$ y $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tales que } J_{s,p}^i(u) < \infty\}$$

$$J_{s,p}^i(u) = \begin{cases} (1-s)s \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}} \, dh \, dx & \text{si} \quad s < 1 \\ \dfrac{2}{p} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_i} u|^p \, dx & \text{si} \quad s = 1. \end{cases}$$

$$W_i^{s,p}(\Omega) = \{W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) \text{ tales que } u|_{\Omega^c} = 0\}$$

Espacios de Sobolev anisotrópicos

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

Espacios de Sobolev anisotrópicos

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

$$W^{\mathbf{s},\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i^{s_i,p_i}(\mathbb{R}^n)$$

Espacios de Sobolev anisotrópicos

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$

$$W^{\mathbf{s},\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i^{s_i,p_i}(\mathbb{R}^n)$$

O alternativamente

$$W^{\mathbf{s},\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^{p_{\min}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_{\max}}(\mathbb{R}^n) \colon J_{\mathbf{s},\mathbf{p}}(u) < \infty\}.$$

$$J_{\mathbf{s},\mathbf{p}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i,p_i}$$

Trabajos previos

Chaker,Kim & Weidner (2021)

Desigualdad Sobolev-Poincaré

$$0 < S = \inf_{\substack{u \in W^{\mathbf{s},\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) \\ \|u\|_{\mathbf{p}^*}=1}} J_{\mathbf{s},\mathbf{p}}(u).$$

Compact embedding

$W^{\mathbf{s},\mathbf{p}}(\mathbb{R}^n) \subset\subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q < \mathbf{p}^*$

Extensión de Bourgain-Brezis-Mironescu

Teorema (Convergencia puntual)

Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0,1)$ *entonces*

$$\lim_{s \to 1} J^i_{s,p}(u) = J^i_{1,p}(u)$$

Teorema (Sucesión)

Sea $\{u_k\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que :*

- $0 < s_k \to 1$ *si* $k \to \infty$
- $\sup_k \|u_k\|_p < \infty$
- $u_k \to u$ *en* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$
- $\sup_{k\in\mathbb{N}} J^i_{s_k,p}(u_k) < \infty$

Entonces

$$J^i_{1,p}(u) \leq \liminf_{s_k\to 1} J^i_{s_k,p}(u_k).$$

En otras palabras $u \in W^i_{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Teorema (Convergencia puntual II)

Sea $u \in L^{p_{min}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_{max}}(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$
$\boldsymbol{s}_k = (s_1^k, \ldots, s_j^k, s_{j+1}, \ldots, s_n)$ *y* $\boldsymbol{s}_0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$

entonces

$$\lim_{\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{s}_0} J_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(u) = J_{\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{p}}(u)$$

Resultado de compacidad

Teorema

Sea $\{u_k\} \subset L^{p_{min}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_{max}}(\mathbb{R}^n)$ *una sucesión tal que*

- $\boldsymbol{s}_k \to \boldsymbol{s}_0$ *si* $k \to \infty$.
- $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{p_{max}} + \|u_k\|_{p_{min}} < \infty$
- $\sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(u_k) < \infty$.

Entonces, si $p_{max} < \boldsymbol{p}^*_{\boldsymbol{s}_0}$, *existe una subsucesión* $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} u$ *en* $L^{p_{max}}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Aplicaciones

Una aplicación de estos resultados es el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del operador *pseudo* p-*Laplaciano anisotrópico* cuando $s \uparrow 1$

Operador *pseudo p-Laplaciano anisotrópico*

$$(J_{\mathbf{s},\mathbf{p}})'u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}(J^i_{s_i,p_i})'u.$$

Operador *pseudo p-Laplaciano anisotrópico*

$$(J_{\mathbf{s},\mathbf{p}})'u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} (J^i_{s_i,p_i})'u.$$

Luego definimos el operador *pseudo p-Laplaciano anisotrópico* como

$$\boxed{(-\widetilde{\Delta}_{\mathbf{p}})^{\mathbf{s}} u := (J_{\mathbf{s},\mathbf{p}})'u}.$$

Operador *pseudo p-Laplaciano anisotrópico*

$$(J_{\mathbf{s},\mathbf{p}})'u = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} (J^i_{s_i,p_i})'u.$$

Luego definimos el operador *pseudo p-Laplaciano anisotrópico* como

$$\boxed{(-\widetilde{\Delta}_{\mathbf{p}})^{\mathbf{s}} u := (J_{\mathbf{s},\mathbf{p}})'u}.$$

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento asintótico de soluciones del problema

$$\begin{cases} (-\widetilde{\Delta}_{\mathbf{p}})^{\mathbf{s}} u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Soluciones débiles

Definición

$u \in W_0^{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(\Omega)$ es solución débil de (1) si

$$\langle (-\widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{s}} u, v \rangle = \langle (J_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}})' u, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx$$

para todo $v \in W_0^{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(\Omega)$.

1

[1] $s(1-s)p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^{p-2}(u(x+he_i)-u(x))(v(x+he_i)-v(x))}{|h|^{1+sp}} \, dh dx,$

Soluciones débiles

Definición

$u \in W_0^{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(\Omega)$ es solución débil de (1) si

$$\langle (-\widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{s}} u, v\rangle = \langle (J_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}})' u, v\rangle = \int_\Omega f v \, dx$$

para todo $v \in W_0^{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(\Omega)$.

u es solución débil $\Leftrightarrow$ u es mínimo de $I(v) = J_{\mathbf{s}_k,\mathbf{p}}(v) - \int_\Omega f v$

1

[1] $s(1-s)p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^{p-2}(u(x+he_i)-u(x))(v(x+he_i)-v(x))}{|h|^{1+sp}} \, dh dx,$

Gamma convergencia

Sea (X,d) un espacio métrico y $u_k\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones. Se dice que u_k Gamma-converge a una función limite u si:

- (lím inf inequalitty) Para cada $x \in X$ y toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_k \to x$, se tiene que:

$$u(x) \leq \liminf_{k\to\infty} u_k(x_k).$$

- (lím sup inequality) Para cada $x \in X$ existe una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que

$$u(x) \geq \limsup_{k\to\infty} u_k(y_k).$$

Corolario

Si $s_k \to 1$, *entonces* $J^i_{s_k,p}$ Γ-*converge a* $J^i_{1,p}$ *si* $k \to \infty$ *en* $L^p(\Omega)$.

Corolario

Si $s_k \to 1$, *entonces* $J^i_{s_k,p}$ Γ-*converge a* $J^i_{1,p}$ *si* $k \to \infty$ *en* $L^p(\Omega)$.

Corolario

Sea $\boldsymbol{s}_k \to s_0$ $J_{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}$ Γ-*converge* $J_{\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{p}}$ *si* $k \to \infty$ *en* $L^{p_{max}}(\Omega)$.

Teorema

Los funcionales $\bar{I}_k\colon L^{p_{min}}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$

$$\bar{I}_k(v) = \begin{cases} J_{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(v) - \int_\Omega f v\, dx, & si\ v \in W_0^{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(\Omega) \\ \infty & si\ v \notin W_0^{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(\Omega) \end{cases}$$

Γ-*convergen a* $\bar{I}\colon L^{p_{min}}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$

$$\bar{I}(v) = \begin{cases} J_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{p}}(v) - \int_\Omega f v\, dx, & si\ v \in W_0^{\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{p}}(\Omega) \\ \infty & si\ v \notin W_0^{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(\Omega) \end{cases}$$

Teorema

Sea $u_k \in W_0^{\boldsymbol{s}_k,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ *una solución debil a*

$$\begin{cases} (-\widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{s}_k} u_k = f & in\ \Omega \\ u_k = 0 & in\ \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

entonces $u_k \to u_0$ *en* $L^{p_{min}}(\Omega)$ *donde* $u_0 \in W_0^{\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{p}}(\Omega)$ *es solución débil de*

$$\begin{cases} (-\widetilde{\Delta}_{\boldsymbol{p}})^{\boldsymbol{s}_0} u_0 = f & in\ \Omega \\ u_0 = 0 & in\ \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

¡Muchas gracias por su atención!