Algunas propiedades de conjuntos ordenados por órdenes parciales definidos sobre matrices

C. Cimadamore[1], L. Rueda[1], L. Sauras-Altuzarra[2] y N. Thome[3]

[1]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS),
Bahía Blanca, Argentina.
[2]Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien,
Vienna, Austria
[3]Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València,
Valencia, España.

UMA, Neuquén
Septiembre 2022

Órdenes parciales star y left star

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Notaremos:

- A^*: traspuesta conjugada de A.
- $\mathcal{R}(A)$: imagen o rango de A (espacio columna).

Se definen:

- left star (Baksalary y Mitra, Left-star and right-star partial orderings, *Linear Algebra and its Applications*, 1991):

$$A \overset{l*}{\leq} B \text{ si y sólo si } A^*A = A^*B \text{ y } \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$$

- star (Drazin, Natural structures on semigroups with involutions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1978):

$$A \overset{*}{\leq} B \text{ si y sólo si } A^*A = A^*B \text{ y } AA^* = BA^*$$

Inversa generalizada Moore-Penrose

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, existe una única $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n\times m}$ (inversa Moore-Penrose) tal que

1. $AA^\dagger A = A$.
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$.
3. $AA^\dagger = (AA^\dagger)^*$.
4. $A^\dagger A = (A^\dagger A)^*$.

Caracterización de los órdenes usando $A^\dagger$

- left star:

$$A \overset{l*}{\leq} B \text{ si y sólo si } A^*A = A^*B \text{ y } \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$$

$$\text{si y sólo si } A^*A = A^*B \text{ y } A = BB^\dagger A$$

- star:

$$A \overset{*}{\leq} B \text{ si y sólo si } A^*A = A^*B \text{ y } AA^* = BA^*$$

$$\text{si y sólo si } A^\dagger A = A^\dagger B \text{ y } AA^\dagger = BA^\dagger$$

El orden core e inversa generalizada core

(Baksalary y Trenkler, Core inverse of matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 2010)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la core inversa de A es la única $A^{\#\!\!\!\bigcirc} \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

1. $AA^{\#\!\!\!\bigcirc} = AA^{\dagger}$
2. $\mathcal{R}(A^{\#\!\!\!\bigcirc}) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

$A^{\#\!\!\!\bigcirc}$ existe si y sólo si $\mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)$.

Notaremos: $\mathbb{C}_1^n = \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)\right\}$.

Para $A, B \in \mathbb{C}_1^n$ se define el orden core

$$A \overset{\#\!\!\!\bigcirc}{\leq} B \iff A^{\#\!\!\!\bigcirc}A = A^{\#\!\!\!\bigcirc}B \text{ y } AA^{\#\!\!\!\bigcirc} = BA^{\#\!\!\!\bigcirc}$$

$$\iff A^*A = A^*B \text{ y } BA = A^2.$$

El orden core e inversa generalizada core

(Baksalary y Trenkler, Core inverse of matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 2010)
Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la core inversa de A es la única $A^{\#\!\!\!\!\bigcirc} \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

1. $AA^{\#\!\!\!\!\bigcirc} = AA^{\dagger}$
2. $\mathcal{R}(A^{\#\!\!\!\!\bigcirc}) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

$A^{\#\!\!\!\!\bigcirc}$ existe si y sólo si $\mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)$.
Notaremos: $\mathbb{C}_1^n = \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)\right\}$.
Para $A, B \in \mathbb{C}_1^n$ se define el orden core

$$A \overset{\#\!\!\!\!\bigcirc}{\leq} B \iff A^{\#\!\!\!\!\bigcirc}A = A^{\#\!\!\!\!\bigcirc}B \text{ y } AA^{\#\!\!\!\!\bigcirc} = BA^{\#\!\!\!\!\bigcirc}$$

$$\iff A^*A = A^*B \text{ y } BA = A^2.$$

Objetivo Estudiar $[O, B]^x$ para cada orden x, $x \in \{l*, *, \#\}$.

Dada $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de $\mathrm{rk}(B) = r > 0$.

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ O & O \end{bmatrix} U^*,$$

donde

- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria
- $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ son los valores singulares de B (i.e.: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde λ_i autovalor no nulo de B^*B)
- $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ tales que $KK^* + LL^* = I_r$.

(Descomposición Hartwig-Spindelböck, 1984)

Objetivo Estudiar $[O, B]^x$ para cada orden x, $x \in \{l*, *, \#\}$.
Dada $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de $\mathrm{rk}(B) = r > 0$.

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ O & O \end{bmatrix} U^*,$$

donde

- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria
- $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^{r\times r}$ son los valores singulares de B (i.e.: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde λ_i autovalor no nulo de B^*B)
- $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ tales que $KK^* + LL^* = I_r$.

(Descomposición Hartwig-Spindelböck, 1984)

Caracterización de los predecesores usando HS

Teorema

(Malik, Rueda y Thome, Linear and Multilinear Algebra, 2014). Sea $x \in \{l*, *, \circledast\}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (o $B \in \mathbb{C}_1^n$ si $x = \circledast$). Son equivalentes:

1. *Existe $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A \overset{x}{\leq} B$.*
2. *Existe una única $T \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tal que*

$$A = U \begin{bmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ O & O \end{bmatrix} U^*, \tag{1}$$

donde $T^2 = T = T^*$ y además:

(a) $x = l*$: *ninguna condición extra para la T*
(b) $x = *$: $T\Sigma = \Sigma T$
(c) $x = \circledast$: $T\Sigma K T = \Sigma K T$.

Para cada orden x, tenemos una biyección

$$\phi \colon [O, B]^x \to \tau^x_{\Sigma,K}$$

$$A \mapsto T$$

Caracterización de los predecesores usando HS

Teorema

(Malik, Rueda y Thome, Linear and Multilinear Algebra, 2014). Sea $x \in \{l*, *, \circledast\}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (o $B \in \mathbb{C}_1^n$ si $x = \circledast$). Son equivalentes:

1. *Existe $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A \overset{x}{\leq} B$.*
2. *Existe una única $T \in \mathbb{C}^{r\times r}$ tal que*

$$A = U \begin{bmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ O & O \end{bmatrix} U^*, \tag{1}$$

donde $T^2 = T = T^*$ y además:

(a) $x = l*$: *ninguna condición extra para la T*
(b) $x = *$: $T\Sigma = \Sigma T$
(c) $x = \circledast$: $T\Sigma K T = \Sigma K T$.

Para cada orden x, tenemos una biyección

$$\phi \colon [O, B]^x \to \tau^x_{\Sigma,K}$$

$$A \mapsto T$$

Proyectores ortogonales

Sean T_1 y T_2 proyectores ortogonales en $\mathbb{C}^{r\times r}$. Definimos $\leq$:

$$T_1 \leq T_2 \text{ si y sólo si } T_1 = T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Luego, $(\tau^{I*}_{\Sigma,K}, \leq)$ es un reticulado complementado

- $T_1 \vee T_2 = (T_1 + T_2)(T_1 + T_2)^\dagger$
- $T_1 \wedge T_2 = 2T_1(T_1 + T_2)^\dagger T_2 = 2T_2(T_1 + T_2)^\dagger T_1$,
- $T' = I_r - T$.

Teorema

Para $x = l*$, $x = *$ *y* $x = \circledast$,

$$\phi \colon [O, B]^x \to \tau^x_{\Sigma, K}$$

$$A \mapsto T$$

es un isomorfismo de orden.
El rango también se preserva por ϕ.

Teorema

$[O, B]^{l*}$ *es un reticulado complementado. Y además:* $[O, B]^{*}$ *y* $[O, B]^{\circledast}$ *son subreticulados de* $[O, B]^{l*}$.

Teorema

Para $x = l*$, $x = *$ *y* $x = \circledast$,

$$\phi\colon [O,B]^x \to \tau^x_{\Sigma,K}$$

$$A \mapsto T$$

es un isomorfismo de orden.
El rango también se preserva por ϕ.

Teorema

$[O,B]^{l*}$ *es un reticulado complementado. Y además:* $[O,B]^{*}$ *y* $[O,B]^{\circledast}$ *son subreticulados de* $[O,B]^{l*}$.

Altura finita

Si $\mathrm{rk}(B) = r$, $T_s \in \mathbb{C}^{r\times r}$ y $s \in \{1, \ldots, r\}$

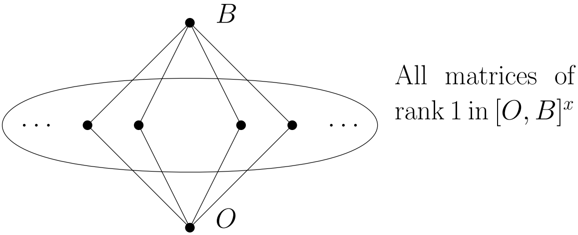
$$T_s = \begin{array}{c} \\ s \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \hphantom{I_s} s & \hphantom{O} r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} I_s & O \\ \hdashline O & O \end{array}\right] \end{array}$$

$T_s \in \tau^x_{\Sigma,K}$ para cada x. Entonces

$$O < T_1 < \cdots < T_r = I_r.$$

con $r + 1$ elementos de longitud máxima.

- Si $\mathrm{rk}(B) = 1$, $[O, B]^x$ es cadena con 2 elementos.
- Si $\mathrm{rk}(B) = 2$,



Caracterización $[O, B]^*$ finitos

Proposición

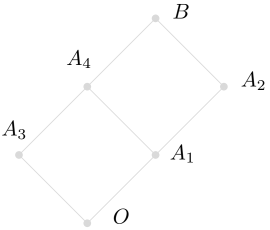
Son equivalentes:

(a) $[O, B]^*$ *es un reticulado finito.*

(b) *los valores singulares de* B *son* $\neq$ *dos a dos.*

(c) $[O, B]^*$ *es booleano con* 2^r *elementos.*

Cuando $x = \#$:



Caracterización $[O, B]^*$ finitos

Proposición

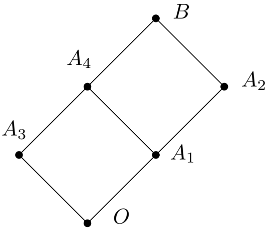
Son equivalentes:

(a) $[O, B]^*$ *es un reticulado finito.*

(b) *los valores singulares de* B *son* $\neq$ *dos a dos.*

(c) $[O, B]^*$ *es booleano con* 2^r *elementos.*

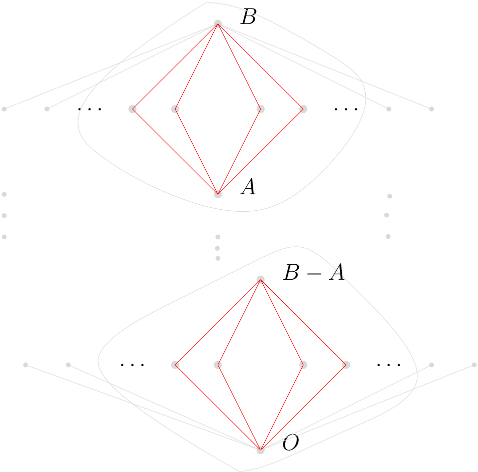
Cuando $x = ⊕$:



Lema

Si $A_1 \overset{x}{\leq} A_2 \overset{x}{\leq} B$ *then* $[A_1, A_2]^x \cong [O, A_2 - A_1]^x$. *En particular, si* $A \overset{x}{\leq} B$ *then* $[A, B]^x \cong [O, B - A]^x$.

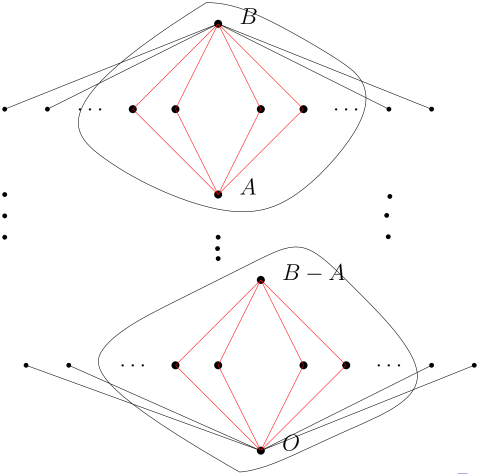
Si $\mathrm{rk}(B) \geq 2$, A tal que $\mathrm{rk}(B - A) = 2$



Lema

Si $A_1 \overset{x}{\leq} A_2 \overset{x}{\leq} B$ *then* $[A_1, A_2]^x \cong [O, A_2 - A_1]^x$. *En particular, si* $A \overset{x}{\leq} B$ *then* $[A, B]^x \cong [O, B - A]^x$.

Si $\mathrm{rk}(B) \geq 2$, A tal que $\mathrm{rk}(B - A) = 2$



¡¡¡¡Muchas gracias!!!