UMA 2022

Reunión Anual 2022 de la Unión Matemática Argentina
Neuquén, 20 al 23 de Septiembre 2022

Un problema de Stefan a dos fases en un dominio angular con coeficientes térmicos variables

Julieta Bollati[1,2], María Fernanda Natale[1], José Semitiel[1], Domingo A. Tarzia[1,2]

[1] Facultad de Ciencias Empresariales - Universidad Austral
[2] CONICET

Objetivo

Se prueba existencia y unicidad de solución de un problema de Stefan unidimensional a dos fases que modela el proceso de solidificación de una sustancia que está inicialmente en estado líquido donde la región sólida es un dominio angular, es decir, mientras el líquido se solidifica, se contrae y forma una región vacía entre $x = 0$ y $x = rs(t)$ donde $0 < r < 1$ es el parámetro de contracción y $x = s(t)$ es la posición de la interfase. Se considera la conductividad térmica y calor específico dependientes de la temperatura en ambas fases y además se impone una condición de tipo Neumann en el borde $x = rs(t)$.

Esquema de la presentación

- Se transforma el problema de Stefan a dos fases en dos problemas diferenciales ordinarios equivalentes acoplados y estos últimos en un problema funcional equivalente.
- Se prueba existencia y unicidad de solución del problema funcional.
- Se presentan dos casos particulares donde se obtienen soluciones explícitas del problema de Stefan.
- Conclusiones.

Formulación matemática

Problema de Stefan unidimensional a dos fases con coeficientes térmicos variables

Hallar la temperatura $u_1 = u_1(x,t)$ (fase sólida) y $u_2 = u_2(x,t)$ (fase líquida) y la frontera libre $x = s(t)$ que separan dichas fases tales que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = \rho_1 c_1(u_1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + r\dot{s}(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \quad rs(t) < x < s(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) = \rho_2 c_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad x > s(t),\ t > 0, \tag{2}$$

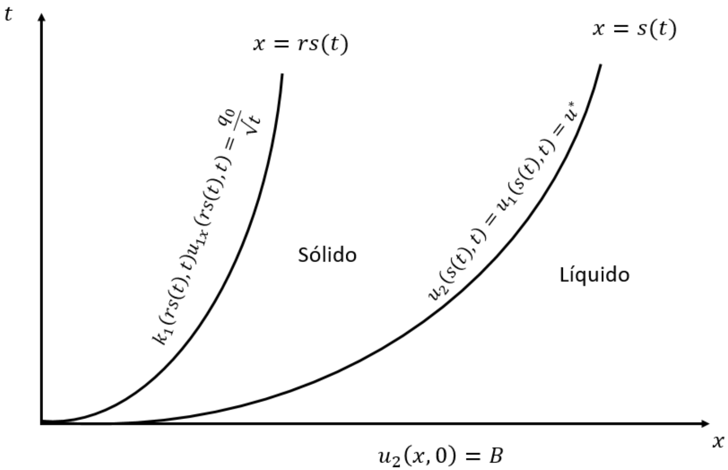
$$u_2(+\infty,t) = u_2(x,0) = B, \quad t > 0,\ x > s(t) \tag{3}$$

$$u_1(s(t),t) = u_2(s(t),t) = u^*, \qquad t > 0, \qquad u^* < B, \tag{4}$$

$$k_1(u_1(s(t),t))\frac{\partial u_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2(u_2(s(t),t))\frac{\partial u_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho_1 \ell \dot{s}(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

$$k_1(rs(t),t)\frac{\partial u_1}{\partial x}(rs(t),t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0, \tag{6}$$

$\rho_i > 0$: densidad de la región i, $i = 1$ (fase sólida) y $i = 2$ (fase líquida)
$\ell > 0$: calor latente de fusión por unidad de masa
u^* : temperatura de cambio de fase en la frontera libre $x = s(t)$ con $u^* < B$
$r = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \in (0,1)$: parámetro de contracción
$q_0 > 0$: coeficiente que caracteriza al flujo en $x = rs(t)$



t
$x = rs(t)$
$x = s(t)$
$k_1(rs(t),t)u_{1x}(rs(t),t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$
$u_2(s(t),t) = u_1(s(t),t) = u^*$
Sólido
Líquido
x
$u_2(x,0) = B$

Coeficientes térmicos

Calor específico: $c_i(u_i(x,t)) = c_i^* \left(1+\beta_i\left(\frac{u_i-B}{u^*-B}\right)^{p_i}\right)$

Conductividad térmica: $k_i(u_i(x,t)) = k_i^* \left(1+\beta_i\left(\frac{u_i-B}{u^*-B}\right)^{p_i}\right)$

donde $\beta_i > 0$ y $p_i > 0$, $k_i^* = k_i(u^*)$ es la conductividad térmica de referencia, y $c_i^* = c_i(u^*)$ es el calor específico de referencia

[Kumar-Singh-Rajeev, 2018; Bollati-Natale-Semitiel-Tarzia, 2020]

Difusividad térmica: $\alpha_i = \frac{k_i^*}{\rho_i c_i^*}$

donde $i = 1, 2$ (fase sólida y líquida, respectivamente).

Los problemas diferenciales ordinarios acoplados

Teorema 1

El problema de Stefan (1)-(6) tiene una solución de tipo similaridad dada por:

$$u_1(x,t) = (u^* - B)\, z_1(\eta) + B, \quad rs(t) < x < s(t), \quad t > 0, \tag{7}$$

$$u_2(x,t) = (u^* - B)\, z_2(\eta) + B, \quad x > s(t), \quad t > 0, \tag{8}$$

$$s(t) = 2\mu\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad t > 0 \tag{9}$$

si y solo si las funciones z_1, z_2 y el parámetro $\mu > 0$ satisfacen los siguientes problemas diferenciales ordinarios:

$$\frac{\alpha_1}{2\mu^2\alpha_2}\left[(1+\beta_1 z_1^{p_1}(\eta))z_1'(\eta)\right]' + (\eta - r)\,(1+\beta_1 z_1^{p_1}(\eta))\, z_1'(\eta) = 0, \qquad r < \eta < 1, \tag{10}$$

$$(1+\beta_1 z_1^{p_1}(r))z_1'(r) = \frac{2\mu\sqrt{\alpha_2}q_0}{(u^* - B)k_1^*}, \tag{11}$$

$$z_1(1) = 1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2\mu^2}\left[(1+\beta_2 z_2^{p_2}(\eta))z_2'(\eta)\right]' + \eta\,(1+\beta_2 z_2^{p_2}(\eta))\, z_2'(\eta) = 0, \quad \eta > 1, \tag{13}$$

$$z_2(1) = 1, \tag{14}$$

$$z_2(\infty) = 0, \tag{15}$$

Teorema 1 (continuación)

acoplados por la condición:

$$\left(\frac{1+\beta_1}{1+\beta_2}\right)\frac{k_1^*}{k_2^*}z_1'(1) - z_2'(1) = \frac{-2\mu^2}{(1+\beta_2)}\frac{\rho_1}{\rho_2 \mathrm{Ste}} \tag{16}$$

donde $\mathrm{Ste} = \frac{c_2^*(B-u^*)}{\ell} > 0$ es el número de Stefan.

<u>Idea de la demostración</u>:

Se propone el cambio de variable

$$\eta = \frac{x}{2\mu\sqrt{\alpha_2 t}} \quad \text{(variable de similaridad)}$$

donde $\mu > 0$ es un coeficiente adimensional a determinar y llamando

$$z_i(\eta) = \frac{u_i(x,t) - B}{u^* - B} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

se obtiene la equivalencia entre ambos problemas.

El problema funcional

Lema 1

(z_1, z_2, μ) es una solución del problema (10)-(16) si y solo si z_1, z_2 y μ satisfacen

$$\mathcal{F}_1(z_1(\eta)) = \mathcal{G}_1(\eta), \qquad r < \eta < 1 \tag{17}$$

$$\mathcal{F}_2(z_2(\eta)) = \mathcal{G}_2(\eta), \qquad \eta > 1 \tag{18}$$

$$\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{N}(\mu), \tag{19}$$

donde

$$\mathcal{F}_i(x) = x + \frac{\beta_i}{p_i + 1} x^{p_i+1}, \qquad i = 1, 2. \tag{20}$$

$$\mathcal{G}_1(\eta) = \mathcal{F}_1(1) + \tfrac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B-u^*)} \left(\operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right) - \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right)\right) \tag{21}$$

$$\mathcal{G}_2(\eta) = \mathcal{F}_2(1) \tfrac{\operatorname{erfc}(\mu\eta)}{\operatorname{erfc}(\mu)} \tag{22}$$

$$\mathcal{M}(\mu) = \mu \frac{\rho_1}{\rho_2 \mathrm{Ste}} + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{F}_2(1) \frac{\exp(-\mu^2)}{\operatorname{erfc}(\mu)} \tag{23}$$

$$\mathcal{N}(\mu) = \tfrac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B-u^*)k_2^*} \exp\left(-\mu^2 \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right) \tag{24}$$

Demostración:

Supongamos que (z_1, z_2, μ) es una solución del problema (10)-(16). Definimos la función

$$v_1(\eta) = (1 + \beta_1 z_1^{p_1}(\eta)) z_1'(\eta)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (10) obtenemos

$$v_1(\eta) = C_1 \exp\left(-\mu^2 \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}(\eta - r)^2\right), \qquad r < \eta < 1, \tag{25}$$

donde $C_1 \in \mathbb{R}$. Luego, integrando respecto de η entre r y 1, se tiene que z_1 satisface:

$$z_1(\eta) + \frac{\beta_1}{p_1 + 1} z_1^{p_1+1}(\eta) = \frac{C_1}{\mu}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right) + D_1, \qquad r < \eta < 1, \tag{26}$$

donde $D_1 \in \mathbb{R}$. Si imponemos las condiciones (11) y (12) se obtiene

$$C_1 = -\frac{2\mu\sqrt{\alpha_2} q_0}{k_1^*(B - u^*)} \tag{27}$$

$$D_1 = 1 + \tfrac{\beta_1}{p_1+1} + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B - u^*)}\operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1 - r)\right) \tag{28}$$

de lo que resulta que z_1 satisface la ecuación (17): $\mathcal{F}_1(z_1(\eta)) = \mathcal{G}_1(\eta)$.

De forma similar, si definimos

$$v_2(\eta) = (1 + \beta_2 z_2^{p_2}(\eta)) z_2'(\eta)$$

de la ecuación (13) obtenemos:

$$v_2(\eta) = C_2 \exp\left(-\mu^2\eta^2\right), \qquad \eta > 1, \tag{29}$$

con $C_2 \in \mathbb{R}$. Si integramos la ecuación anterior respecto de η, se tiene la solución general de la ecuación diferencial ordinaria (13):

$$z_2(\eta) + \frac{\beta_2}{p_2+1} z_2^{p_2+1}(\eta) = \frac{C_2}{\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(\mu\eta) + D_2, \qquad \eta > 1, \tag{30}$$

donde $D_2 \in \mathbb{R}$. Luego, al imponer las condiciones (14) y (15) se tiene:

$$C_2 = \left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\mu}{(\operatorname{erf}(\mu) - 1)} \tag{31}$$

$$D_2 = -\frac{C_2}{\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{32}$$

y por lo tanto, z_2 satisface la ecuación (18): $\mathcal{F}_2(z_2(\eta)) = \mathcal{G}_2(\eta)$.

Finalmente, de (25) y (29) (expresiones obtenidas para v_1 y v_2) y teniendo en cuenta (16) (ecuación que relaciona ambos problemas diferenciales) se obtiene la ecuación que debe satisfacer μ (19).

Recíprocamente, puede probarse fácilmente que si (z_1, z_2, μ) es una solución del sistema (17)-(19) entonces (z_1, z_2, μ) satisface (10)-(16).

Existencia y unicidad de solución del problema funcional

Lema 2:

El problema funcional dado por (17), (18) y (19) tiene una única solución (z_1, z_2, μ) si y solo si $q_0 > \dfrac{(B-u^*)k_2^*}{\sqrt{\alpha_2\pi}}\left(1+\dfrac{\beta_2}{p_2+1}\right)$.

Demostración:

Notemos primero que para cada $i=1,2$, la función $\mathcal{F}_i:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{F}_i(x) = x + \frac{\beta_i}{p_i+1}x^{p_i+1}$ es estrictamente creciente.

Además, si $r<\eta<1$ entonces

$$\mathcal{G}_1(\eta) = \mathcal{F}_1(1) + \tfrac{\sqrt{\alpha_1\pi}q_0}{k_1^*(B-u^*)}\left(\operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right) - \operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right)\right) > 0$$

Luego, para cada $\mu>0$ existe una única función $z_1 \in C^2[r,1]$ que es solución de la ecuación (17) dada por

$$z_1(\eta) = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{G}_1(\eta)), \qquad r<\eta<1. \tag{33}$$

De manera similar, para cada $\eta>1$, se tiene que existe una única función $z_2 \in C^2[1,\infty)$ solución de la ecuación (18) dada por

$$z_2(\eta) = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{G}_2(\eta)), \qquad \eta>1. \tag{34}$$

Basta entonces probar que la ecuación (19) $\mathcal{M}(x) = \mathcal{N}(x)$ tiene única solución $\mu > 0$. Es fácil ver que:

$$\mathcal{M}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right), \quad \mathcal{M}(\infty) = \infty, \quad \mathcal{M}^{'}(x) > 0, \quad \forall\, x > 0, \tag{35}$$

$$\mathcal{N}(0) = \frac{\sqrt{\alpha_2}q_0}{(B-u^*)k_2^*}, \quad \mathcal{N}^*(\infty) = 0, \quad \mathcal{N}^{'}(x) < 0, \quad \forall\, x > 0, \tag{36}$$

entonces existe un único $\mu > 0$ solución de la ecuación $\mathcal{M}(x) = \mathcal{N}(x)$, $x > 0$ si y sólo si $\mathcal{N}(0) > \mathcal{M}(0)$, es decir

$$\frac{\sqrt{\alpha_2}q_0}{(B-u^*)k_2^*} > \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right). \tag{37}$$

Luego, existe única solución (z_1, z_2, μ) del problema funcional (17)-(19) si y sólo si

$$q_0 > \frac{(B-u^*)k_2^*}{\sqrt{\alpha_2\pi}}\left(1 + \frac{\beta_2}{p_2+1}\right).$$

Existencia y unicidad de solución del problema de Stefan

Del Teorema 1 y los Lemas 1 y 2, se tiene el resultado fundamental:

Teorema 2

Si $q_0 > \frac{(B-u^*)k_2^*}{\sqrt{\alpha_2\pi}}\left(1+\frac{\beta_2}{p_2+1}\right)$ entonces el problema de Stefan a dos fases dado por (1)-(6) tiene una única solución de tipo similaridad (u_1, u_2, s) dada por:

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= (u^*-B)\, z_1\left(\frac{x}{2\mu\sqrt{\alpha_2 t}}\right)+B, \quad rs(t)<x<s(t), \quad t>0,\\
u_2(x,t) &= (u^*-B)\, z_2\left(\frac{x}{2\mu\sqrt{\alpha_2 t}}\right)+B, \quad x>s(t), \quad t>0,\\
s(t) &= 2\mu\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad t>0
\end{aligned}
$$

donde (z_1, z_2, μ) es la única solución del problema funcional:

$$
z_1(\eta)+\frac{\beta_1}{p_1+1}z_1^{p_1+1}(\eta)=1+\frac{\beta_1}{p_1+1}+\frac{\sqrt{\alpha_1\pi}q_0}{k_1^*(B-u^*)}\left(\operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1-r)\right)-\operatorname{erf}\left(\mu\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta-r)\right)\right),
$$

si $r<\eta<1$,

$$
z_2(\eta)+\frac{\beta_2}{p_2+1}z_2^{p_2+1}(\eta)=\left(1+\frac{\beta_2}{p_2+1}\right)\frac{\operatorname{erfc}(\mu\eta)}{\operatorname{erfc}(\mu)}, \ \eta>1,
$$

$$
x\frac{\rho_1}{\rho_2\mathrm{Ste}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{\beta_2}{p_2+1}\right)\frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}=\frac{\sqrt{\alpha_2}q_0}{(B-u^*)k_2^*}\exp\left(-x^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-r)^2\right), \ x>0.
$$

Caso particular $p_1 = p_2 = 0$

Si consideramos el caso particular $p_1 = p_2 = 0$, los coeficientes térmicos son constantes, es decir , la conductividad térmica y el calor específico está dado por:

$$k_i = k_i^* \left(1 + \beta_i\right), \tag{38}$$

$$c_i = c_i^* \left(1 + \beta_i\right), \tag{39}$$

respectivamente, con $\beta_i > 0$ para $i = 1, 2$.
En este caso, la única solución $z_1 = z_1(\eta)$ de la ecuación (17) está dada por:

$$z_1(\eta) = 1 + \frac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{\left(1 + \beta_1\right) k_1 (B - u^*)} \left(\operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (1 - r) \right) - \operatorname{erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} (\eta - r) \right) \right), \quad r < \eta < 1, \tag{40}$$

la única solución $z_2 = z_2(\eta)$ de la ecuación (18) está dada por:

$$z_2(\eta) = \frac{\operatorname{erfc}\left(\mu\eta\right)}{\operatorname{erfc}\left(\mu\right)}, \qquad \eta > 1, \tag{41}$$

y de (19), $\mu > 0$ es la única solución de la ecuación

$$x \frac{\rho_1}{\rho_2 \mathrm{Ste}} + \frac{1 + \beta_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)} = \frac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B - u^*) k_2^*} \exp\left(-x^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - r)^2 \right) \tag{42}$$

si y solo si $q_0 > \frac{(B-u^*)k_2}{\sqrt{\alpha_2 \pi}}$.
Por lo tanto, hemos recuperado los resultados obtenidos en M. F. Natale, E. Santillan Marcus, D. A. Tarzia, Explicit solutions for one-dimensional two-phase free boundary problems with either shrinkage or expasion, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11 (2010) 1946-1952.

Caso particular $p_1 = p_2 = 1$

Si consideramos el caso particular $p_1 = p_2 = 1$, los coeficientes térmicos son lineales, es decir, la conductividad térmica y el calor específico están dados por:

$$k_i(u_i) = k_i^* \left(1 + \beta_i \tfrac{u_i - B}{u^* - B}\right), \tag{43}$$

$$c_i(u_i) = c_i^* \left(1 + \beta_i \tfrac{u_i - B}{u^* - B}\right), \tag{44}$$

respectivamente con $\beta_i > 0$ para $i = 1, 2$.
En este caso, la única solución $z_1 = z_1(\eta)$ de la ecuación (17) está dada por:

$$z_1(\eta) = \tfrac{1}{\beta_1} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta_1 \hat{\mathcal{G}}_1(\eta)}\right), \qquad r < \eta < 1, \tag{45}$$

donde

$$\hat{\mathcal{G}}_1(\eta) = 1 + \tfrac{\beta_1}{2} + \tfrac{\sqrt{\alpha_1 \pi} q_0}{k_1^*(B - u^*)} \left(\mathrm{erf}\left(\mu \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(1 - r)\right) - \mathrm{erf}\left(\mu \sqrt{\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}(\eta - r)\right)\right), \tag{46}$$

la única solución $z_2 = z_2(\eta)$ de la ecuación (18) está dada por:

$$z_2(\eta) = \tfrac{1}{\beta_2} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta_2 (2 + \beta_2) \tfrac{\mathrm{erfc}(\mu\eta)}{\mathrm{erfc}(\mu)}}\right), \qquad \eta > 1, \tag{47}$$

y de (19), $\mu > 0$ es la única solución de la ecuación:

$$x \tfrac{\rho_1}{\rho_2 \mathrm{Ste}} + \tfrac{2 + \beta_2}{2\sqrt{\pi}} \tfrac{\exp(-x^2)}{\mathrm{erfc}(x)} = \tfrac{\sqrt{\alpha_2} q_0}{(B - u^*) k_2^*} \exp\left(-x^2 \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1} (1 - r)^2\right), \tag{48}$$

si y solo si $q_0 > \frac{(B - u^*)(2 + \beta_2) k_2^*}{2\sqrt{\alpha_2 \pi}}$.

Conclusiones

- Se planteó un problema de Stefan unidimensional a dos fases que modela el proceso de solidificación de una sustancia que está inicialmente en estado líquido donde la región sólida es un dominio angular, es decir, mientras el líquido se solidifica, se contrae y forma una región vacía entre $x = 0$ y $x = rs(t)$ donde $0 < r < 1$ es el parámetro de contracción y $x = s(t)$ es la posición de la interface. Se consideró tanto la conductividad térmica como el calor específico dependientes de la temperatura en ambas fases.
- Se transformó el problema de Stefan a dos fases en dos problemas diferenciales ordinarios acoplados equivalente.
- Se transformaron los problemas diferenciales ordinarios acoplados en un problema funcional equivalente.
- Se probó existencia y unicidad de solución al problema funcional.
- De la equivalencia entre los problemas (Problema de Stefan a dos fases-Problemas diferenciales ordinarios acoplados-Problema Funcional) se demostró existencia y unicidad de solución (de tipo similaridad) del problema de Stefan a dos fases.

Gracias por su atención.