Control de movimientos rototraslacionales distinguidos

Eduardo Hulett*, Paola Moas⋆ y Marcos Salvai*

*CIEM-CONICET - FaMAF-Universidad Nacional de Córdoba
⋆CONICET - FCEFQyN-Universidad Nacional de Río Cuarto

UMA 2022
Neuquén, 20 al 23 de septiembre de 2022

Introducción

Sea $\mathcal{D}$ una distribución en una variedad diferenciable N. Una curva γ en N se dice admisible si $\gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$ para todo t.

Dados dos puntos cualesquiera en N, ¿cuándo puedo llegar de uno a otro por curvas admisibles?

Se dice que $\mathcal{D}$ determina un sistema controlable si dados $p, q \in N$ existe una curva admisible a trozos que los une.

El Teorema de Chow-Rashevsky afirma que eso sucede si $\mathcal{D}$ es altamente no integrable.

Estudiamos la controlabilidad de distribuciones invariantes a izquierda en ciertos grupos de Lie G que actúan en una variedad M, asociadas a rototraslaciones infinitesimales distinguidas.

De manera informal: Una curva en G (pensada como un movimiento de M) es admisible si en cada instante, a nivel infinitesimal, trasladar en alguna dirección conlleva realizar al mismo tiempo la rotación distinguida alrededor de esa dirección.

Tenemos la siguiente situación: *Para cada traslación infinitesimal a lo largo de una geodésica, hay una rotación infinitesimal distinguida alrededor de ella.*

A nivel infinitesimal, para todo $p \in M$ hay una transformación lineal

$$L : \left\{\text{traslaciones infinitesimales por } p\right\} \to \left\{\text{rotaciones infinitesimales alrededor de } p\right\}$$

tal que $\left[L\left(X\right), X\right] = 0$.

Ejemplos de motivación

Sea M_k la forma espacial de dimensión 3 con curvatura seccional $k = 0, 1, -1$, o sea, $M_0 = \mathbb{R}^3$, $M_1 = S^3$ y M_{-1} es el espacio hiperbólico H^3.

Sea G_k la componente conexa de la identidad de $\mathrm{Iso}(M_k)$. Fijado $o \in M_k$, $\pi : G_k \to M_k$, $\pi(g) = g(o)$ es la proyección canónica.

Sean $\mathfrak{g}_k$ el álgebra de Lie de G_k y $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{p}_k \oplus \mathfrak{h}_k$ la descomposición de Cartan asociada al punto o en M_k.

Fijando una orientación en M_k, podemos definir en $T_o M_k$ (y pasando a $\mathfrak{p}_k$ a través de $d\pi_e$) un producto cruz $\times$. Para $x \in \mathfrak{p}_k$, $L_x : \mathfrak{p}_k \to \mathfrak{h}_k$ es la transformación lineal definida por $L_x(z) = x \times z$.

Definición

Fijado $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos la distribución $\mathcal{D}^\lambda$ en G_k invariante a izquierda tal que

$$\mathcal{D}^\lambda_e = \{(x, \lambda L_x) \in \mathfrak{g}_k \mid x \in \mathfrak{p}_k\}.$$

Pensando a los elementos de G_k como posiciones de un cuerpo en M_k con estado de referencia en o, entonces, de acuerdo con $\mathcal{D}^\lambda$, a nivel infinitesimal, el cuerpo puede ser trasladado c unidades a lo largo de una cierta dirección solo si al mismo tiempo rota alrededor de esa dirección un ángulo λc.

Proposición

El sistema determinado por $\mathcal{D}^\lambda$ es controlable si y solo si $k^2 \neq \lambda$.

Generalización

Sean K un grupo de Lie compacto simple, $\mathfrak{k}$ su álgebra de Lie y $K^{\mathbb{C}}$ su complexificación. Consideramos tres pares simétricos (G, H) asociados con K:

$$(K \times K, \Delta_+(K)), \qquad \left(K^{\mathbb{C}}, K\right) \qquad \text{y} \qquad (\mathfrak{k} \rtimes_{\mathrm{Ad}} K, K).$$

Para $M = G/H$, tenemos en cada caso $M = K$, $K^{\mathbb{C}}/K$ y $\mathfrak{k}$ (euclídeo), respectivamente.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ la descomposición de Cartan asociada al punto H. La describimos en la siguiente tabla, junto con la transformación lineal distinguida $L : \mathfrak{p} \to \mathfrak{h}$ que satisface $[L(Y), Y] = 0$.

M	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{h}$	$L : \mathfrak{p} \to \mathfrak{h}$
K	$\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}$	$\Delta_-(\mathfrak{k})$	$\Delta_+(\mathfrak{k})$	$L(X, -X) = (X, X)$
$K^{\mathbb{C}}/K$	$\mathfrak{k}+i\mathfrak{k}$	$i\mathfrak{k}$	$\mathfrak{k}$	$L(iX) = X$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{k} \rtimes \mathfrak{k}$	$\mathfrak{k} \times \{0\}$	$\{0\} \times \mathfrak{k}$	$L(X, 0) = (0, X)$

Teorema

Sean K un grupo de Lie compacto simple y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada espacio simétrico $M = G/H$ como en la tabla de arriba, sea $\mathcal{D}^\lambda$ la distribución invariante a izquierda en G dada en la identidad por

$$\mathcal{D}^\lambda_e = \{(Y, \lambda L(Y)) \mid Y \in \mathfrak{p}\} \subset \mathfrak{g}$$

Entonces, $\mathcal{D}^\lambda$ determina un sistema controlable, excepto para los pares

$$(K \times K, \Delta_+(K)) \ \textit{para} \ \lambda = \pm 1 \quad \textit{y} \quad (\mathfrak{k} \rtimes_{Ad} K, \{0\} \times K) \ \textit{para} \ \lambda = 0.$$

Comentario de la prueba.

Para la prueba usamos el Teorema de Chow-Rashevsky. Verificamos que $\mathcal{D}^\lambda + \left[\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{D}^\lambda\right]_e = \mathfrak{g}$ y así $\mathcal{D}^\lambda$ resulta altamente no integrable.

Control de tirabuzón octoniónico

Presentamos otro ejemplo en el cual la trasformación L no es biyectiva.

Recordemos el producto cruz octoniónico en $\mathbb{R}^7 = \operatorname{Im}(\mathbb{O})$, que denotamos por yuxtaposición en vez de $\times$. En la base ordenada $\{e_1, \ldots, e_7\}$ la multiplicación es $e_i e_j = -e_j e_i$ para todo i, j (en particular, $e_i e_i = 0$)

$$e_t e_{t+1} = e_{t+3} \qquad \text{módulo } 7$$

Para $u \in \operatorname{Im}(\mathbb{O})$ definimos

$$L_u : \operatorname{Im}(\mathbb{O}) \to \operatorname{Im}(\mathbb{O}), \; L_u(v) = u \times v.$$

Se tiene que $L_u \in \operatorname{Skew}(\mathbb{R}^7) = o_7$.

Como antes, a cada traslación infinitesimal le asociamos una rotación infinitesimal.

Teorema

Sean $G = \mathbb{R}^7 \rtimes SO_7$ y $\lambda \neq 0$. Entonces la distribución invariante a izquierda sobre G dada en la identidad $(0, I_7)$ por

$$\mathcal{D}^{\lambda}_{I_7} = \{(x, \lambda L_x) \mid x \in \operatorname{Im}(\mathbb{O})\}$$

es controlable.

`Propiedades de` $\mathbb{O}$: Para todo $e_i, e_j, e_k \in \operatorname{Im}(\mathbb{O})$, se cumplen:

- $e_i(e_j e_k) = -e_k(e_j e_i)$ si $e_i e_j \neq \pm e_k$ con $i \neq j$
- $e_i(e_i e_j) = -e_j$

Idea de la prueba.

Sabemos que $\mathbb{R}^7 \rtimes SO_7$ es isomorfo a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}^7$ un vector columna y $A \in SO_7$.

Para ver que $\mathcal{D}$ es altamente no integrable usamos el Teorema de Chow-Rashevsky. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\left[(x, \lambda L_x), (y, \lambda L_y)\right] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & \lambda L_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & \lambda L_y \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda (x \times y - y \times x) & \lambda^2 [L_x, L_y] \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x \times y & \lambda [L_x, L_y] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Siempre trabajamos módulo 7. Sea $k \in \{1, \ldots, 7\}$. Por la definición de producto cruz existe $\{i, j, s, t, u, v\}$ tal que

$$\{i, j, s, t, u, v, k\} = \{1, \ldots, 7\}$$

y

$$e_k = e_i \times e_j = e_s \times e_t = e_u \times e_v.$$

Por ejemplo,

$$e_1 \times e_2 = e_4, \quad e_3 \times e_4 = e_6 \quad \text{y} \quad e_4 \times e_5 = e_7.$$

Entonces, para $k = 4$ podemos tomar $i = 1$, $j = 2$, $s = 6$, $t = 3$, $u = 5$ y $v = 7$, con lo cual

$$e_4 = e_1 \times e_2 = e_6 \times e_3 = e_5 \times e_7.$$

Luego, evaluando en e_k, e_i y e_s (al evaluar en e_j, e_t, e_u y e_v se obtienen cálculos similares), verificamos que se cumple

$$\left[L_{e_i}, L_{e_j}\right] = e^i \wedge e^j - 2\left(e^s \wedge e^t + e^u \wedge e^v\right)$$

donde $\left\{e^\xi\right\}$ es la base dual de $\{e_\xi\}$ y $e^\alpha \wedge e^\beta$ denota la transformación antisimétrica dada por $\left(e^\alpha \wedge e^\beta\right)(z) = e^\alpha(z)\, e_\beta - e^\beta(z)\, e_\alpha$.

Como k es arbitrario, para ver que $\left[\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{D}^\lambda\right]$ genera todo $\mathbb{R}^7 \times o_7$, comprobamos que $\left\{\left[L_{e_i}, L_{e_j}\right], \left[L_{e_s}, L_{e_t}\right], \left[L_{e_u}, L_{e_v}\right]\right\}$ es linealmente independiente en o_7.

¡Gracias por su atención!