# Cambios en la estructura espectral de un haz de matrices bajo perturbaciones de rango uno

Francisco Martínez Pería

Centro de Matemática de La Plata – Universidad Nacional de La Plata

Instituto Argentino de Matemática "Alberto P. Calderón" – CONICET

Reunión Anual de la UMA
Universidad Nacional del Comahue – Neuquén
21 de septiembre de 2022

# Esquema de la charla

# Esquema de la charla

1. Haces de matrices

2. Formas canónicas

3. Teoría de perturbaciones (de rango uno)

# Haces de matrices

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una matriz polinómica es una con entradas en $\mathbb{K}[x]$:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,m-1} & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,m-1} & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,m-1} & p_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[x]^{n\times m},$$

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una matriz polinómica es una con entradas en $\mathbb{K}[x]$:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,m-1} & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,m-1} & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,m-1} & p_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[x]^{n\times m},$$

o si lo prefieren, un polinomio con coeficientes matriciales,

$$P(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots + x^qA_q,$$

donde $A_0, A_1, \ldots, A_q \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $A_q \neq 0$.

# Haces de matrices

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una matriz polinómica es una con entradas en $\mathbb{K}[x]$:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,m-1} & p_{1,m} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,m-1} & p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,m-1} & p_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[x]^{n \times m},$$

o si lo prefieren, un polinomio con coeficientes matriciales,

$$P(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots + x^qA_q,$$

donde $A_0, A_1, \ldots, A_q \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $A_q \neq 0$.

## Definición

Un polinomio matricial $P \in \mathbb{K}[x]^{n \times m}$ es un haz de matrices si

$$P(x) := xE - A,$$

para $A, E \in \mathbb{K}^{n \times m}$, i.e. si tiene grado (a lo sumo) 1.

- Ecuaciones algebraico-diferenciales (DAEs).

Dadas $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos la ecuación algebraico-diferencial

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave.

- Ecuaciones algebraico-diferenciales (DAEs).

Dadas $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos la ecuación algebraico-diferencial

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave.

Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda E) = 0$, entonces hay un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax_0 = \lambda E x_0,$$

y en consecuencia $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ es una solución de (1).

# Aplicaciones . . .

- Ecuaciones algebraico-diferenciales (DAEs).

Dadas $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos la ecuación algebraico-diferencial

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

donde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave.

Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda E) = 0$, entonces hay un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax_0 = \lambda E x_0,$$

y en consecuencia $x(t) = e^{\lambda t} x_0$ es una solución de (1).

**Problema**

Dadas $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, determinar los $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\det(A - \lambda E) = 0$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, $P$ es regular si $n = m$ y $\det(P(x)) \neq 0_{\mathbb{K}[x]}$.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, $P$ es regular si $n = m$ y $\det(P(x)) \neq 0_{\mathbb{K}[x]}$.

En caso contrario, diremos que $P$ es singular.

Dado $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, $P$ es regular si $n = m$ y $\det(P(x)) \neq 0_{\mathbb{K}[x]}$.

En caso contrario, diremos que $P$ es singular.

El rango (normal) de $P$ es el tamaño del menor más grande de $P$ distinto de $0_{\mathbb{K}[x]}$. Lo anotamos $\operatorname{rank}(P)$.

**Observación**

$$P \in \mathbb{K}[x]^{n\times n} \text{ es regular} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank}(P) = n$$

Dado $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, $P$ es regular si $n = m$ y $\det(P(x)) \neq 0_{\mathbb{K}[x]}$.

En caso contrario, diremos que $P$ es singular.

El rango (normal) de $P$ es el tamaño del menor más grande de $P$ distinto de $0_{\mathbb{K}[x]}$. Lo anotamos $\operatorname{rank}(P)$.

**Observación**

$$P \in \mathbb{K}[x]^{n\times n} \text{ es regular} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank}(P) = n$$

**Definición**

Supongamos que $P(x) = xE - A$ para $A, E \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

- $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor (finito) de $P$ si $\operatorname{rank}(P(\lambda)) < \operatorname{rank}(P)$;
- $\infty$ es un autovalor de $P$ si $\operatorname{rank}(E) < \operatorname{rank}(P)$.

# Ejemplo: un haz de matrices sin autovalores finitos

Dado $j \in \mathbb{N}$, consideremos las matrices $A, E \in \mathbb{K}^{j\times j}$ dadas por

$$A = I_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El haz

$$P(x) = xN_j - I_j = \begin{pmatrix} -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es regular y NO tiene autovalores finitos.

Si $P = xE - A \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ es un haz regular, existen matrices inversibles $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$U\big(xE - A\big)V = \begin{bmatrix} xI_r - J & 0 \\ 0 & xN - I_s \end{bmatrix},$$

con $J \in \mathbb{C}^{r\times r}$ en forma de Jordan y $N \in \mathbb{C}^{s\times s}$ nilpotente.

# Forma canónica de Weierstraß
para haces regulares (circa 1867)

Si $P = xE - A \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ es un haz regular, existen matrices inversibles $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$U\big(xE - A\big)V = \begin{bmatrix} xI_r - J & 0 \\ 0 & xN - I_s \end{bmatrix},$$

con $J \in \mathbb{C}^{r\times r}$ en forma de Jordan y $N \in \mathbb{C}^{s\times s}$ nilpotente.

En este caso, los autovalores de $P$ (y sus multiplicidades) forman un

conjunto de invariantes completo

para la clase de equivalencia de $P$ módulo la equivalencia estricta:

$$P \sim Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q = U \cdot P \cdot V \text{ con } U, V \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ inversibles.}$$

# Un haz de matrices sin autovalores

Dado $j \in \mathbb{N}$, consideremos las matrices $A, E \in \mathbb{K}^{j\times(j+1)}$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El haz

$$L_j(x) = xE - A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{pmatrix}$$

es singular, tiene rango completo y NO tiene autovalores.

# Forma canónica de Kronecker
## para haces singulares (circa 1890)

Dado un haz $P(x) = xE - A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, hay matrices inversibles $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$U\big(xE - A\big)V = \begin{bmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & S(x) \end{bmatrix},$$

donde $R$ es la parte regular de $P$ y $S$ es la parte singular de $P$.

Dado un haz $P(x) = xE - A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, hay matrices inversibles $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$U\big(xE - A\big)V = \begin{bmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & S(x) \end{bmatrix},$$

donde $R$ es la parte regular de $P$ y $S$ es la parte singular de $P$. Además,

$$R(x) = \begin{bmatrix} xI_r - J & 0 \\ 0 & xN - I_s \end{bmatrix},$$

con $J \in \mathbb{C}^{r\times r}$ en forma de Jordan, $N \in \mathbb{C}^{s\times s}$ nilpotente, Dado un haz $P(x) = xE - A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, hay matrices inversibles $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$U\big(xE - A\big)V = \begin{bmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & S(x) \end{bmatrix},$$

donde $R$ es la parte regular de $P$ y $S$ es la parte singular de $P$. Además,

$$R(x) = \begin{bmatrix} xI_r - J & 0 \\ 0 & xN - I_s \end{bmatrix},$$

con $J \in \mathbb{C}^{r\times r}$ en forma de Jordan, $N \in \mathbb{C}^{s\times s}$ nilpotente, y

$$S(x) = \operatorname{diag}\big(L_{m_1}(x), \ldots, L_{m_k}(x), L_{n_1}(x)^\top, \ldots, L_{n_\ell}(x)^\top\big),$$
$$L_j(x) = x[I_j \ 0] - [0 \ I_j] \in \mathbb{C}^{j\times(j+1)},$$

con $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 0$ y $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{\ell-1} \geq n_\ell \geq 0$.

Dado un haz $P(x) = xE - A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, sean

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \overline{\mathbb{C}}$ sus autovalores, y para cada $i = 1, \ldots, p$ sean

$$r_1(\lambda_i) \geq r_2(\lambda_i) \geq \ldots \geq r_{q_i}(\lambda_i) > 0,$$

  los tamaños de los bloques de Jordan asociados a $\lambda_i$;
- $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 0$ los índices minimales columna;
- $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{\ell-1} \geq n_\ell \geq 0$ los índices minimales fila.

Dado un haz $P(x) = xE - A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, sean

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \overline{\mathbb{C}}$ sus autovalores, y para cada $i = 1, \ldots, p$ sean

$$r_1(\lambda_i) \geq r_2(\lambda_i) \geq \ldots \geq r_{q_i}(\lambda_i) > 0,$$

  los tamaños de los bloques de Jordan asociados a $\lambda_i$;
- $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_{k-1} \geq m_k \geq 0$ los índices minimales columna;
- $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_{\ell-1} \geq n_\ell \geq 0$ los índices minimales fila.

El conjunto formado por todos éstos sí es un

conjunto de invariantes completo

para la clase de equivalencia de $P$ (módulo la equivalencia estricta).

# Esquema de la charla

Dado un haz $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, y una perturbación $Q \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$ con

$$\operatorname{rank}(Q) = 1,$$

¿qué sabemos sobre:

- los autovalores de $P + Q$?
- las multiplicidades de los autovalores de $P + Q$?
- la forma de Weierstraß / Kronecker de $P + Q$?

Dado un haz $P \in \mathbb{K}[x]^{n \times m}$, y una perturbación $Q \in \mathbb{K}[x]^{n \times m}$ con

$$\mathrm{rank}(Q) = 1,$$

¿qué sabemos sobre:

- los autovalores de $P + Q$?
- las multiplicidades de los autovalores de $P + Q$?
- la forma de Weierstraß / Kronecker de $P + Q$?

En el caso en que $P$ y $P + Q$ son haces regulares, bastante. En el resto ...

# Perturbaciones de rango uno

Dado un haz $P \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$, y una perturbación $Q \in \mathbb{K}[x]^{n\times m}$ con

$$\operatorname{rank}(Q) = 1,$$

¿qué sabemos sobre:

- los autovalores de $P + Q$?
- las multiplicidades de los autovalores de $P + Q$?
- la forma de Weierstraß / Kronecker de $P + Q$?

En el caso en que $P$ y $P + Q$ son haces regulares, bastante. En el resto ...

Si $\lambda$ es un autovalor de $P$, anotaremos:

- $mg_\lambda(P)$ a la multiplicidad geométrica de $\lambda$;
- $ma_\lambda(P)$ a la multiplicidad algebraica de $\lambda$.
- $m_\lambda(P)$ a la multiplicidad de $\lambda$ como raíz de $\det(P(x))$.

También usaremos la cota:

$$M = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} ma_\lambda(P).$$

También usaremos la cota:

$$M = \sum_{\lambda \in \sigma(P)} ma_\lambda(P).$$

## Teorema (Gernandt, Trunk '17)

*Sea* $P \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ *un haz regular. Dado* $Q \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ *con* $\operatorname{rank}(Q) = 1$ *tal que* $P + Q$ *es un haz regular,*

1. *si* $\lambda \in \sigma(P)$ *con* $mg_\lambda(P) \geq 2$ *entonces* $\lambda \in \sigma(P+Q)$*, y además*

$$m_\lambda(P) - ma_\lambda(P) \leq m_\lambda(P+Q) \leq m_\lambda(P) - ma_\lambda(P) + M;$$

2. *si* $\lambda \in \sigma(P+Q) \setminus \sigma(P)$ *entonces* $mg_\lambda(P+Q) = 1$*, y además*

$$0 \leq m_\lambda(P+Q) \leq M.$$

Una forma alternativa de presentar al conjunto de invariantes es mediante

la característica de Weyr.

No es más que el conjunto de particiones conjugadas de

$$\{r_1(\lambda_i), \ldots, r_{q_i}(\lambda_i)\}, \quad \{m_1, \ldots, m_k\} \quad \text{y} \quad \{n_1, \ldots, n_\ell\}.$$

Para $j = 1, \ldots, q_i$, sea

$$a_j(\lambda_i) = \#\{h : \; r_h(\lambda_i) \geq j\}.$$

Para $j = 1, \ldots, k$, sea

$$b_j = \#\{h : \; m_h \geq j\}.$$

Para $j = 1, \ldots, \ell$, sea

$$c_j = \#\{h : \; n_h \geq j\}.$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & a_1 \\
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & & a_2 \\
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & & & & a_3 \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
\bullet & \bullet & & & & & & a_{q-1} \\
\bullet & & & & & & & a_q \\
r_1 & r_2 & & r_{p-3} & r_{p-2} & r_{p-1} & r_p &
\end{array}
$$

**Teorema (Gernandt, Trunk '17)**

*Sea* $P \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ *un haz regular. Dado* $Q \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ *con* $\operatorname{rank}(Q) = 1$ *tal que* $P + Q$ *es un haz regular. Entonces, para todo* $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ *y* $k \geq 1$,

$$\left| a_k(\lambda, P+Q) - a_k(\lambda, P) \right| \leq 1.$$

**Teorema (Gernandt, MP, Philipp, Trunk '22)**

*Dado un haz* $P \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$, *sea* $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ *un autovalor de* $P$. *Sea* $Q \in \mathbb{C}[x]^{n\times n}$ *un haz con* $\operatorname{rank}(Q) = 1$.

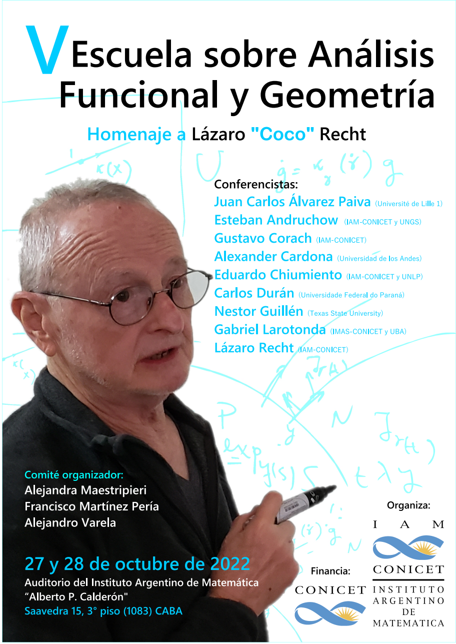
- *Si* $Q(x) = x(wu^*) - wv^*$ *entonces, para todo* $k \geq 1$,

$$\Big|\big(a_k(\lambda, P+Q) + b_k(P+Q)\big) - \big(a_k(\lambda, P) + b_k(P)\big)\Big| \leq k.$$

- *Si* $Q(x) = x(uw^*) - vw^*$ *entonces, para todo* $k \geq 1$,

$$\Big|\big(a_k(\lambda, P+Q) + b_{k+1}(P+Q)\big) - \big(a_k(\lambda, P) + b_{k+1}(P)\big)\Big| \leq k.$$


Gracias
Merci
DANKE
Grazie
Hvala
Obrigado
THANKS



V Escuela sobre Análisis Funcional y Geometría
Homenaje a Lázaro "Coco" Recht
Conferencistas:
Juan Carlos Álvarez Paiva (Université de Lille 1)
Esteban Andruchow (IAM-CONICET y UNGS)
Gustavo Corach (IAM-CONICET)
Alexander Cardona (Universidad de los Andes)
Eduardo Chiumiento (IAM-CONICET y UNLP)
Carlos Durán (Universidade Federal do Paraná)
Nestor Guillén (Texas State University)
Gabriel Larotonda (IMAS-CONICET y UBA)
Lázaro Recht (IAM-CONICET)
Comité organizador:
Alejandra Maestripieri
Francisco Martínez Pería
Alejandro Varela
27 y 28 de octubre de 2022
Auditorio del Instituto Argentino de Matemática
“Alberto P. Calderón"
Saavedra 15, 3° piso (1083) CABA
Organiza:
I A M
CONICET
INSTITUTO ARGENTINO DE MATEMATICA
Financia:
CONICET