Relatos
de
Experiencias

Curso: *El problema del sentido de los saberes geométricos*
Especialización en Didáctica de la Matemática

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Fco-Qcas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto

RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN FORMACIÓN CONTINUA DEL PROFESORADO: EL PROBLEMA DE LOS ALBAÑILES

Mabel Licera - Cecilia Elguero
rlicera@exa.unrc.edu.ar - celguero@exa.unrc.edu.ar

Una experiencia didáctica llevada a cabo con docentes de la escuela secundaria en el curso de posgrado

El sentido de la Geometría de la *Especialidad en Didáctica de la Matemática,* Universidad Nacional de Río Cuarto.

Año 2022

Fines del curso:

- ✓ Plantear el problema profesional ligado al *por qué* y *para qué* estudiar definiciones, propiedades y construcciones de figuras geométricas.

- ✓ Aportar elementos de respuesta a partir de un proceso de estudio de problemas geométricos que modelizan cuestiones extramatemáticas de construcción y de medida.

- ✓ Aportar criterios para pensar propuestas de enseñanza en la escuela que, por un lado, revelen el carácter funcional de saberes geométricos, y por otro, promuevan la articulación de dichos saberes.

Marco de trabajo:

Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Dos nociones de esta teoría se convirtieron en herramientas para el pensamiento y para la acción:

- ✓ **La noción de *Praxeología***
- ✓ **La noción de *Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado*** (Ruiz Higueras, 2015).

Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado (*REI-FP*)

Dispositivo didáctico que se organiza y articula en cinco módulos:

- **Módulo M_0: Planteo de un problema profesional (PF).**

El PF está relacionado con la cuestión: ***¿Cómo enseñar determinado tema C del currículo escolar?***

- **Módulo M_1: *Vivir un REI.***

Se desarrolla un proceso de estudio que muestre las *razones de ser* de *C* en el nivel educativo donde se inscribe el (PF).

- **Módulo M_2: *Analizar el REI vivido.***

*A*barca el análisis matemático y didáctico del proceso de estudio desarrollado.

- **Módulo M_3: *Diseñar un REI***

- **Módulo M_4: *Gestionar y experimentar un REI***

Estos últimos módulos tienen por objetivo que los profesores en formación pongan a prueba lo trabajado en las fases anteriores, diseñando y experimentado un REI para un grupo determinado de estudiantes.

En el curso se desarrollaron los módulos $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$

Desarrollo del Módulo $\mathbf{M_0}$ *:*

Tarea:

Lectura del *Programa de Fortalecimiento en Matemática - Pensar y contar matemática* (Ministerio de Educación. Córdoba, 2022).

Planteo de al menos dos interrogantes por año de estudio.

Cuestiones surgidas:

¿Qué se entiende por "analizar" figuras? ¿Por qué y para qué analizarlas?

¿Con qué tipo de problemas hacerlo? ¿Cómo hacerlo?

¿Cómo hacer que las definiciones y propiedades de las figuras se estudien desde un proceso de búsqueda de respuestas a problemas?

¿Cuál es el sentido -la utilidad- de las definiciones y propiedades geométricas?

Estas cuestiones **didácticas y epistemológicas** refieren a un ***problema profesional*** en relación a la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria.

Desarrollo de M_1 y M_2 en interacción

Planteo de una cuestión problemática

De a pares:

Resolución.

Estudio de alternativas de resolución.

Colectivamente:

Análisis matemático. Tipo de tarea, técnicas posibles, justificaciones, elementos teóricos que intervienen, relaciones entre ellos.

Análisis didáctico, vinculación con el currículo escolar.

Una postura epistemológica y didáctica acordada al inicio de **M_1** a partir de analizar algunos problemas sencillos:

En la génesis de la geometría como área de la matemática, se destacan dos grandes tipos de problemas extramatemáticos

- problemas de construcción**.**

- problemas de cálculo indirecto de medidas,

lo cual da sentido al estudio de figuras que tienen propiedades que las hacen aptas para abordarlos.

Consecuentemente, en el ámbito intramatemático aparece el *problema de la determinación y construcción* de estas figuras, lo que abarca propiedades, caracterizaciones equivalentes, clasificaciones jerárquicas y/o partitivas, técnicas de construcción, etc.

En particular, se presenta lo trabajado en **M_1** y **M_2** a partir del problema que se denominó:

"El problema de los albañiles"

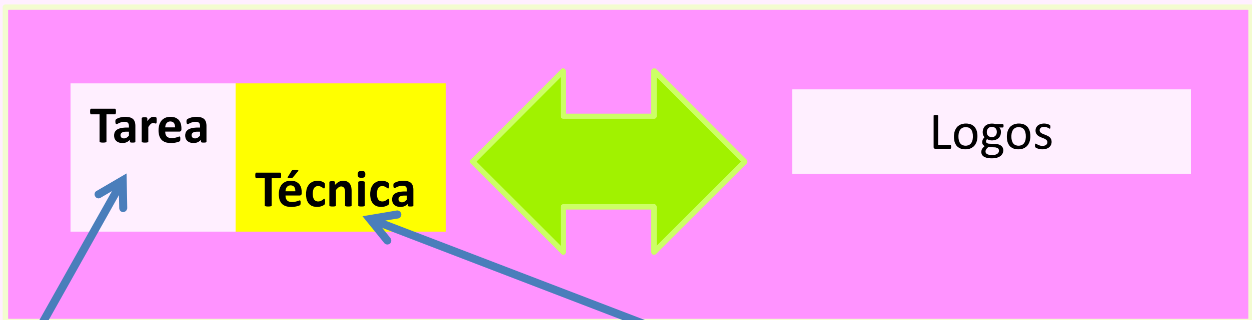
¿Cómo constatar que una forma "rectangular" (una abertura en una pared, la forma de un terreno, una habitación que hay que embaldosar…) tiene efectivamente forma rectangular?

a) Algunos albañiles comparan las medidas de "las diagonales del cuadrilátero". Si son iguales, la tarea está bien realizada. ¿Es válida la técnica usada?

b) Tal vez los albañiles están considerando otras condiciones ¿Qué condiciones mínimas se podrían agregar a la igualdad de diagonales para que la técnica de constatación sea correcta? ¿Condiciones extra sobre las diagonales?, ¿sobre ángulos?, ¿sobre lados?

Cuestión problemática

Un problema de construcción:
¿Cómo constatar que un forma "rectangular" (una abertura de una mampara, la forma de un terreno, una habitación que hay que embaldosar…) tiene efectivamente forma rectangular?



Acordando una definición de rectángulo como aquel cuadrilátero con sus cuatro ángulos rectos, la tarea es: **Determinar un rectángulo.**

Considerar sistemáticamente condiciones sobre elementos de un cuadrilátero y **analizarlas** en términos de suficiencia y economía para determinar un rectángulo, , lo que involucra un **trabajo argumentativo**, ya sea con **deducciones lógicas** o con **contraejemplos**.

El trabajo generado instaló una dialéctica entre la praxis y el *logos.*

En el caso que algunos de estos saberes estén disponibles, "se va desde el *saber* al *hacer*", **aparece la funcionalidad -*utilidad*- de un saber**, e en el caso de no disponerlo "se va del *hacer* al *saber*", **se justifica el construir (o reconstruir escolarmente) nuevos saberes.**

Por ejemplo, ante la búsqueda de contraejemplos en la tarea correspondiente al inciso *a)* una opción fue "dibujemos cuadriláteros con diagonales iguales pero que no se bisequen. Si no se bisecan, no es paralelogramo y, por lo tanto, no es rectángulo". Esta argumentación requiere conocer clasificaciones jerárquicas de cuadriláteros (al menos parcialmente) y propiedades de paralelogramos (al menos algunas).

En las siguientes cuatro diapositivas se presentan esquemas que muestran *caminos posibles* y *elementos teóricos* involucrados en el proceso de estudio.

Condición: ¿Diagonales de igual medida?

Contraejemplos

Trapecios isósceles

Cuadriláteros con diagonales iguales pero que no se bisequen.

Definición de trapecio isósceles.

Los trapecios isósceles tienen diagonales congruentes

Definición de paralelogramo.

En todo paralelogramo las diagonales se bisecan.

Los rectángulos son paralelogramos.

Estas argumentaciones requieren conocer:

- Definiciones de cuadriláteros especiales.
- Clasificaciones jerárquicas de cuadriláteros (al menos parcialmente).
- Propiedades de cuadriláteros especiales (al menos algunas).

Condición: Diagonales de igual medida y…

¿Diagonales bisecadas?

Argumentaciones alternativas

En triángulos isósceles a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.
Suma de ángulos interiores de triángulos.

Criterio LAL de congruencia de triángulos (aplicado dos veces).

Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, el cuadrilátero es paralelogramo.
Los paralelogramos tienen los lados opuestos congruentes y los ángulos opuestos congruentes.
Criterio LLL de congruencia de triángulos.

Los cuatro ángulos son congruentes

Suma de ángulos interiores de cuadriláteros.

Diagonales de igual medida y…

¿Un ángulo recto?

Contraejemplos

¿Dos ángulos consecutivos rectos?

Una argumentación posible

-Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
-Teorema de Pitágoras.
-Un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos e iguales es un paralelogramo.
-Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

¿Dos ángulos opuestos rectos?

Búsqueda infructuosa de contraejemplos

Una argumentación posible

-Tres puntos no alineados determinan una única circunferencia.
-Relación entre ángulos inscriptos y centrales correspondientes.
-Diámetro de una circunferencia.

Diagonales de igual medida y…

- **¿Un par de lados paralelos?**
- **¿Dos pares de lados paralelos?**
- **¿Un par de lados opuestos iguales?**
- **¿Dos pares de lados opuestos iguales?**
- **¿Un par de lados opuestos iguales y paralelos?**

Si se ha establecido que un paralelogramo con diagonales congruentes es un rectángulo, podría analizarse para cada una de estas condiciones si determinan un rectángulo. Más generalmente se planteó:

¿Cuáles son las posibles formas de caracterizar un paralelogramo?

Dado un cuadrilátero se establecieron las siguientes relaciones (algunas ya se tenían):

Es paralelogramo (lados opuestos paralelos)

- $\Longleftrightarrow$ Los lados opuestos son congruentes
- $\Longleftrightarrow$ Los ángulos opuestos son congruentes
- $\Longleftrightarrow$ Los ángulos consecutivos son suplementarios
- $\Longleftrightarrow$ Las diagonales se cortan en su punto medio.
- $\Longleftrightarrow$ Tiene un par de lados paralelos y congruentes
- $\Longleftrightarrow$ Tiene un par de ángulos opuestos congruentes y un par de lados paralelos
- $\Longrightarrow$ Tiene un par de ángulos consecutivos suplementarios. y un par de lados paralelos
- $\Longrightarrow$ Tiene un par de ángulos opuestos congruentes y un par de lados iguales.

A lo largo del recorrido surgieron cuestiones de diversa índole:

- Matemáticas
- Didácticas
- Relativas al contexto donde se plantea el problema

que se constituyeron en un motor de avance del estudio. Entre ellas:

¿Cuándo una propiedad de una figura la determina? ¿Hay definiciones de una misma figura "más pertinentes" que otras?

¿Qué argumentaciones se pueden considerar válidas en un aula del ciclo básico?

¿En base a *qué* y *cómo* decidir el estatus que tendrían que tener las propiedades ("axiomas" o "teoremas")?

¿Cuáles condiciones serían "idóneas" en función de los instrumentos disponibles por los albañiles? Por ejemplo, se puede demostrar matemáticamente que agregar (a la congruencia de diagonales) el paralelismo de los dos pares de lados opuestos resulta una condición suficiente mínima para determinar un rectángulo, pero, ¿cómo podrían los albañiles determinar si dos "rectas" son paralelas?, ¿existen técnicas viables?, ¿son fiables?

Algunas reflexiones que surgieron a partir del análisis didáctico:

-”Recuperar” la UTILIDAD de saberes teóricos, como por ejemplo el uso de los criterios de congruencia, para determinar congruencias de segmentos y de ángulos.

-No todas las cuestiones surgidas se tienen que abordar, pueden quedar estudios pendientes.

- Pueden quedar tareas “pendientes”, por ejemplo estudiar la validez de alguna afirmación que se utilizó.

- No todo se tiene que demostrar. Se pueden buscar propiedades en internet o en textos porque lo que importa es dar respuesta al problema.

- En algún momento se puede parar. Poner de relieve la utilidad de conocer propiedades de las figuras, relaciones de inclusión, clasificaciones… y realizar un estudio en este sentido.

- No todos tienen que hacer todo. Se pueden repartir tareas y compartir resultados.

Este ejemplo (junto a otros desarrollados en el curso) aporta criterios para pensar procesos de estudio escolares que:

- Trasciendan la mostración de elementos de *saber* poco articulados con el *hacer*.
- Permitan reconocer potencialidades y limitaciones de elementos teóricos para generar técnicas (formas de hacer).
- Generen la necesidad de construir (reconstruir) nuevos elementos teóricos ante las limitaciones de los existentes.
- Articulen saberes alrededor de un problema a resolver.
- Recuperen razones de ser de los saberes.
- Promuevan una epistemología “funcionalista” de la los saberes geométricos en el sentido que estos aportan respuestas a cuestiones problemáticas que se plantean “en el mundo”.

Bibliografía

Gascón, J (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Revista SUMA* (45), 41 – 52.

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2022). *Programa de Fortalecimiento en Matemática - Pensar y contar matemática*

Ruiz-Olarría, A (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Autónoma de Madrid.