

Sobre grafos casi estables de Kneser

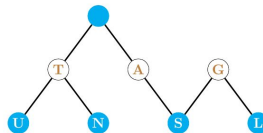
Agustina Ledezma

Adrián Pastine

Teoría Algebraica de Grafos - TAG
Universidad Nacional de San Luis - UNSL
Instituto de Matemáticas Aplicadas San Luis - IMASL

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina:
UMA Neuquén 2022, sesión "Matemática Discreta"

20 al 23 de septiembre del 2022



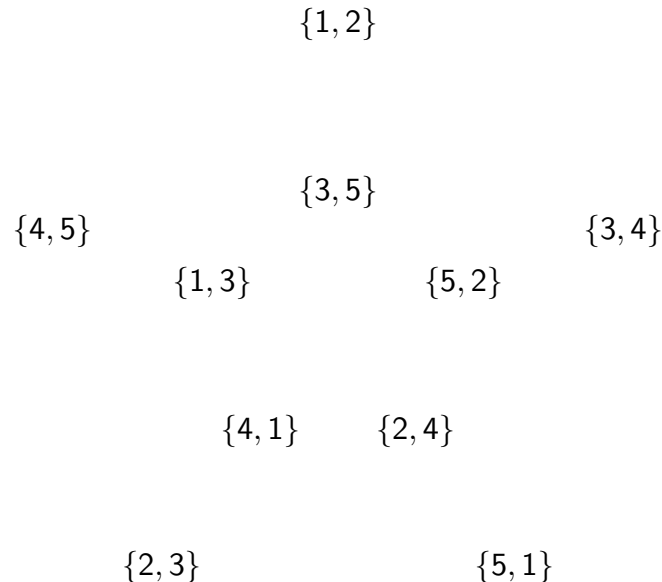
Definición

El grafo de Kneser $K(n, k)$ es el grafo que tiene como vértices los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes son disjuntos.

Grafos de Kneser, $K(5, 2)$

Definición

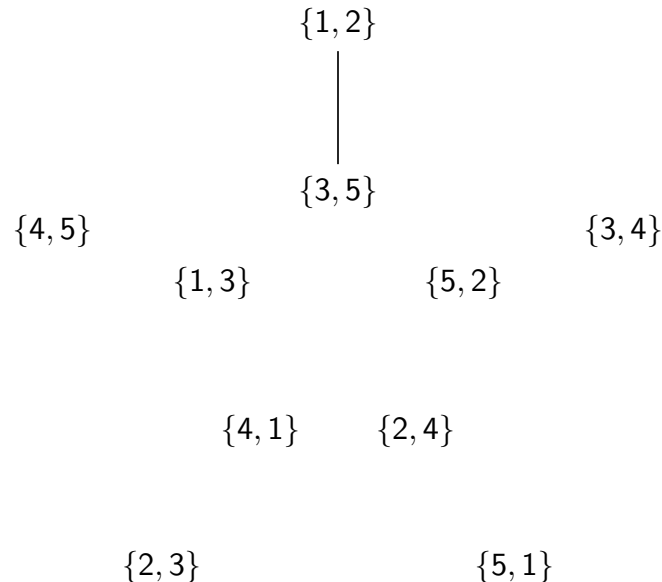
El grafo de Kneser $K(n, k)$ es el grafo que tiene como vértices los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes son disjuntos.



Grafos de Kneser, $K(5, 2)$

Definición

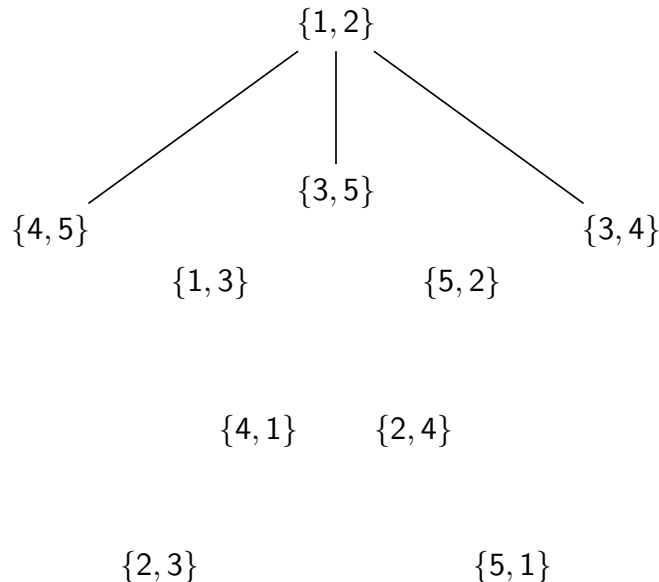
El grafo de Kneser $K(n, k)$ es el grafo que tiene como vértices los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes son disjuntos.



Grafos de Kneser, $K(5, 2)$

Definición

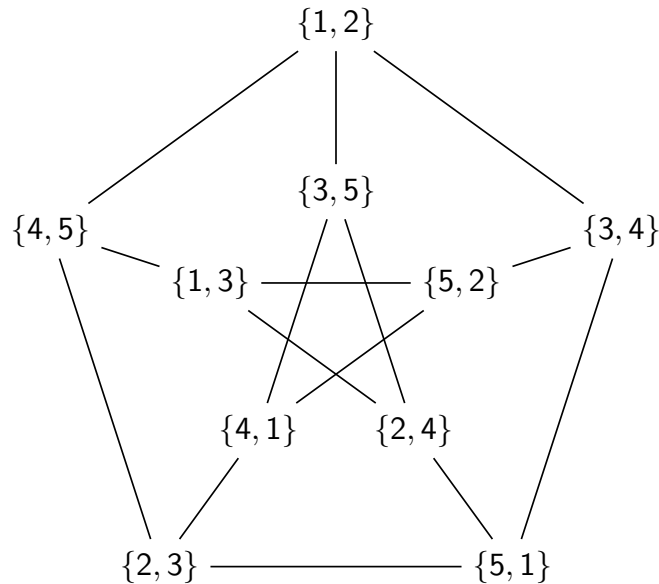
El grafo de Kneser $K(n, k)$ es el grafo que tiene como vértices los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes son disjuntos.



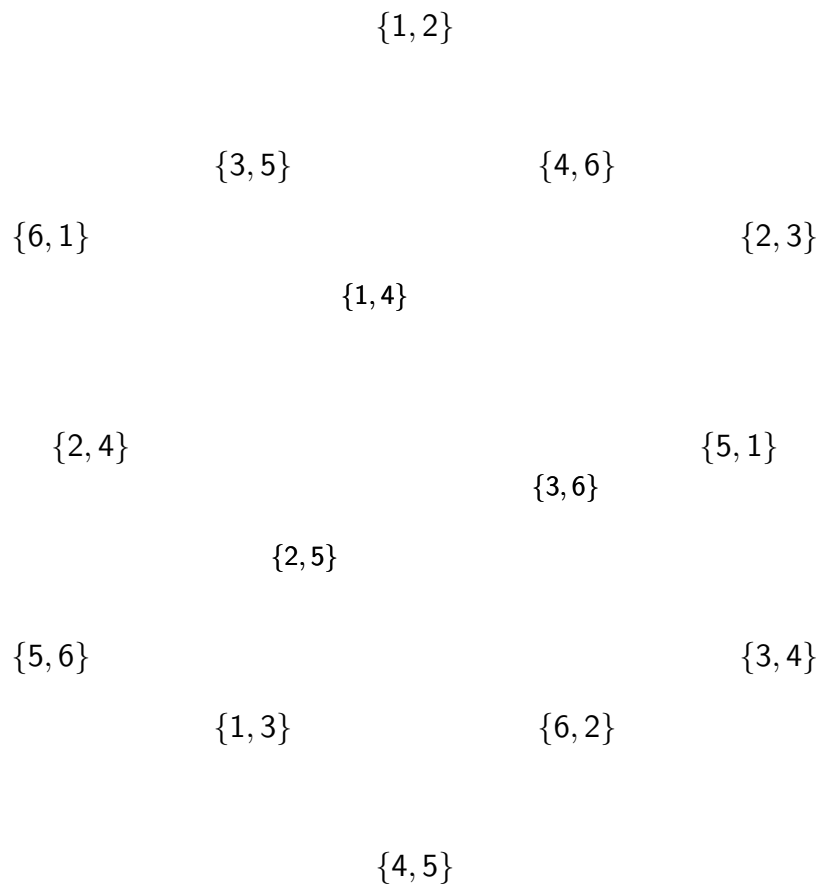
Grafos de Kneser, $K(5, 2)$

Definición

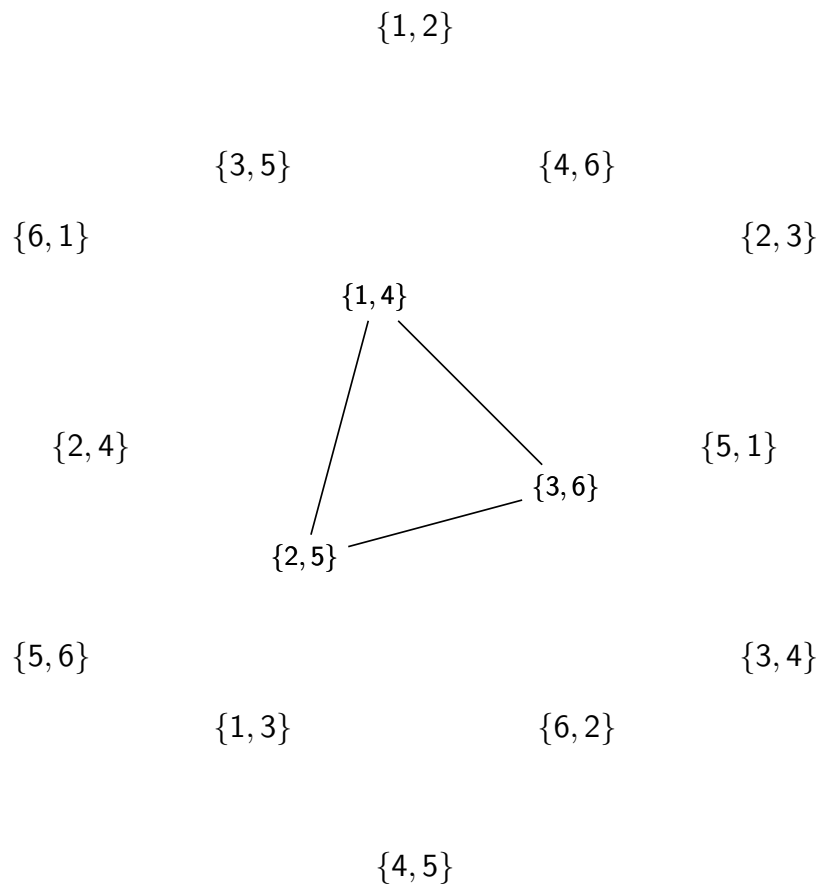
El grafo de Kneser $K(n, k)$ es el grafo que tiene como vértices los subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes son disjuntos.



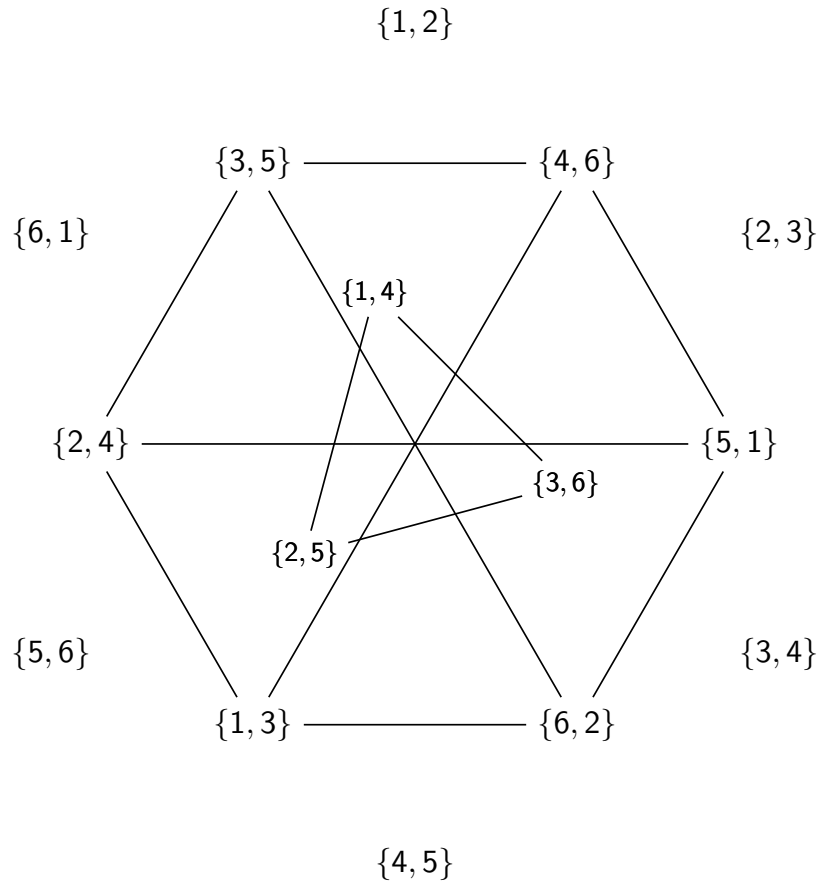
Grafos de Kneser, $K(6, 2)$



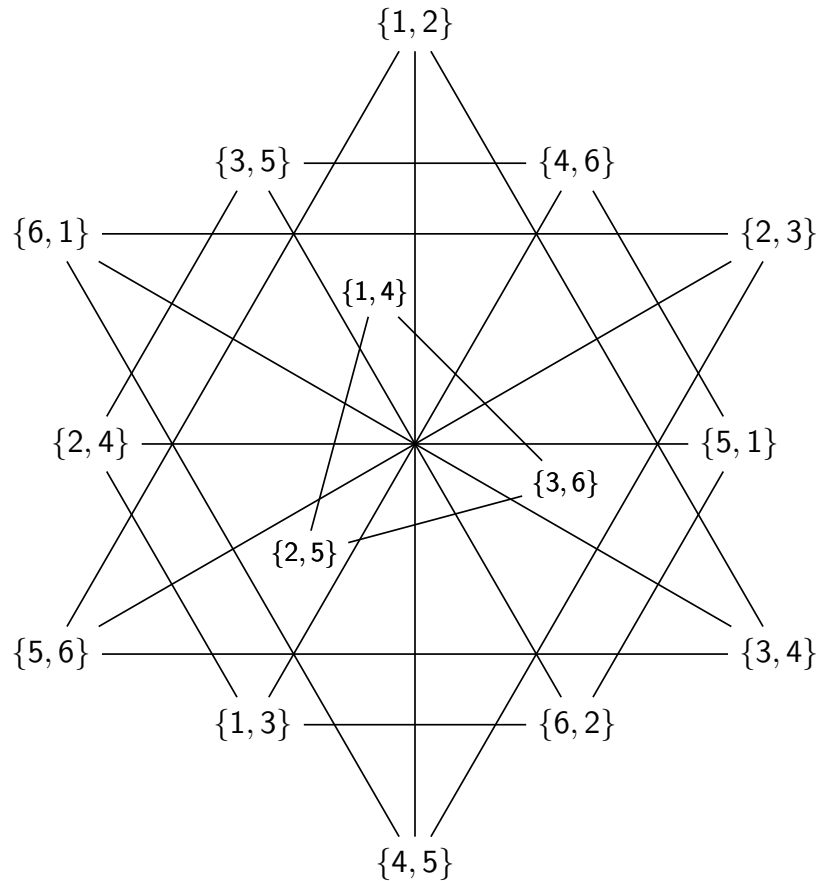
Grafos de Kneser, $K(6, 2)$



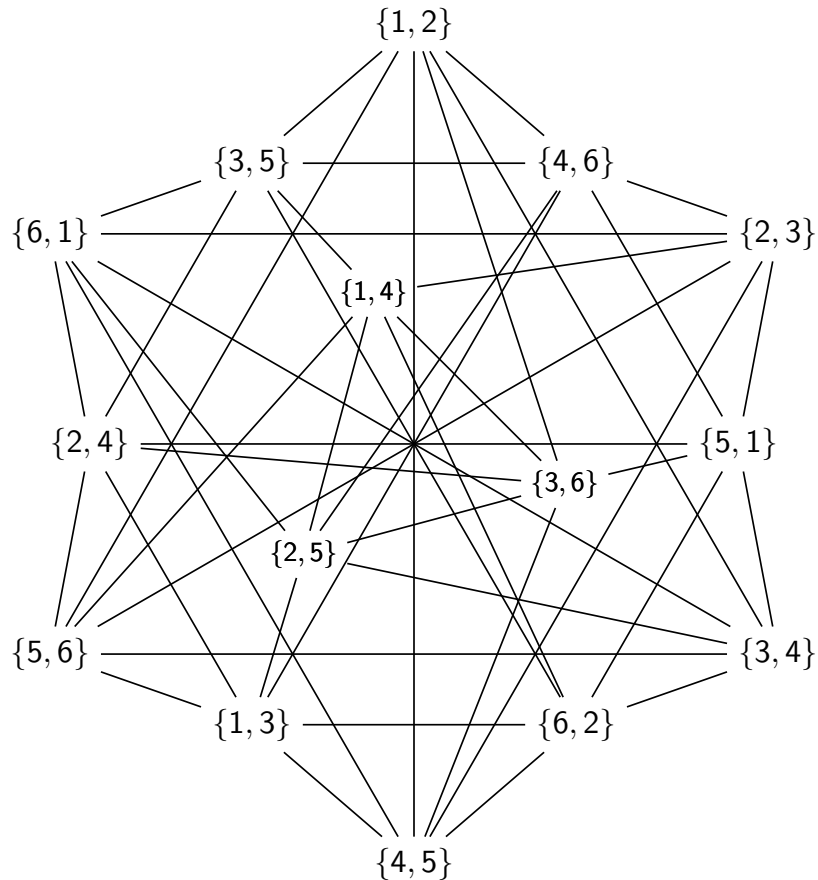
Grafos de Kneser, $K(6, 2)$



Grafos de Kneser, $K(6, 2)$



Grafos de Kneser, $K(6, 2)$



Definición

Un *ciclo de Hamilton* de un grafo G de orden n es un ciclo $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ de largo n , donde v_1, v_2, \dots, v_n son los n vértices de G en algún orden.

Definición

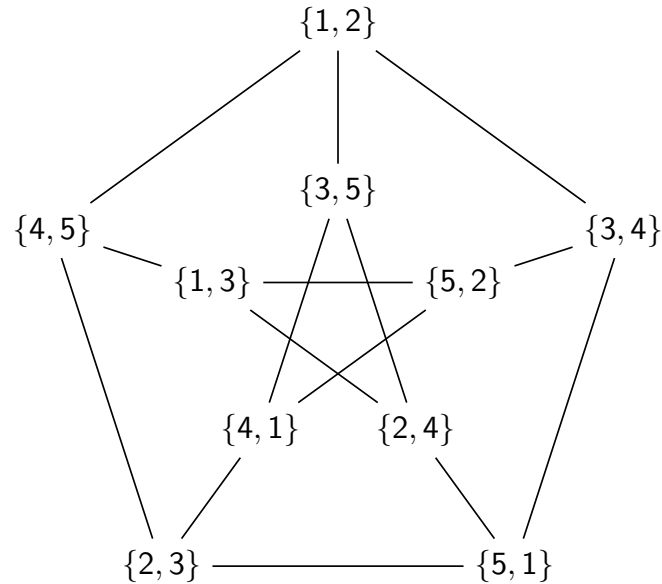
Un *ciclo de Hamilton* de un grafo G de orden n es un ciclo $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ de largo n , donde v_1, v_2, \dots, v_n son los n vértices de G en algún orden. Luego, un grafo *hamiltoniano* o de *Hamilton* es aquel que posee un ciclo de Hamilton.

Definición

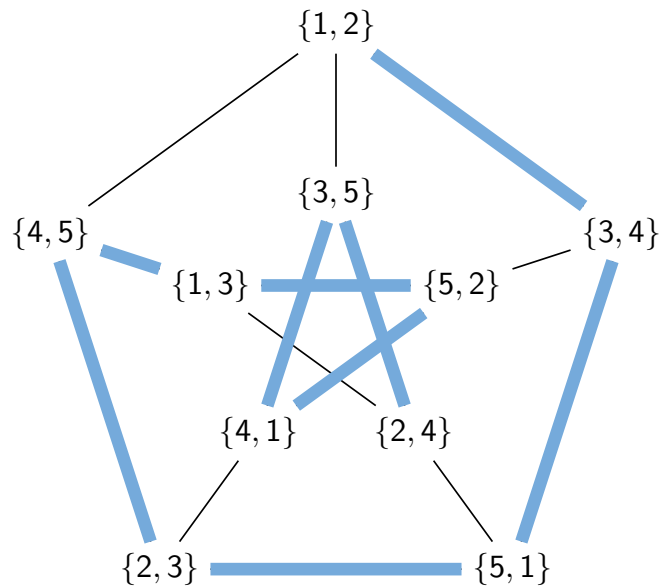
Un *ciclo de Hamilton* de un grafo G de orden n es un ciclo $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ de largo n , donde v_1, v_2, \dots, v_n son los n vértices de G en algún orden. Luego, un grafo *hamiltoniano* o de *Hamilton* es aquel que posee un ciclo de Hamilton.

El problema de hamiltonicidad estudia la existencia de caminos y ciclos de hamilton en los grafos.

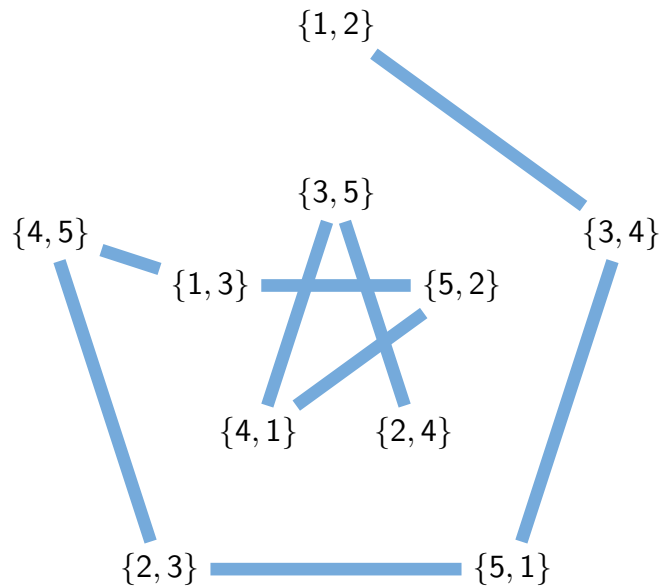
Camino de Hamilton, $K(5, 2)$



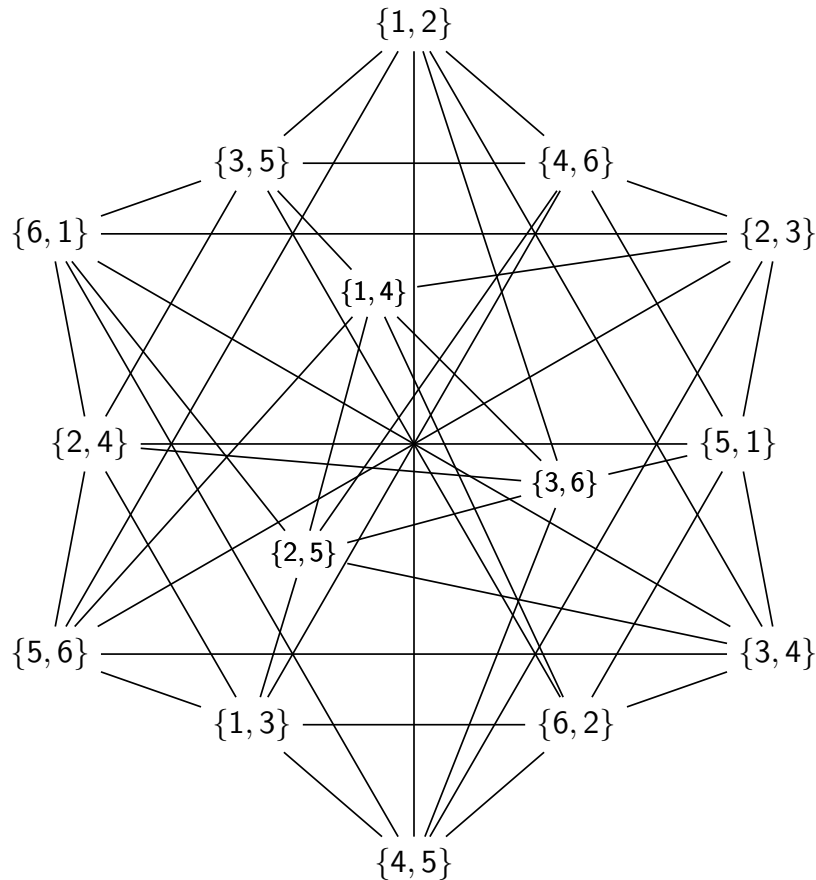
Camino de Hamilton, $K(5, 2)$



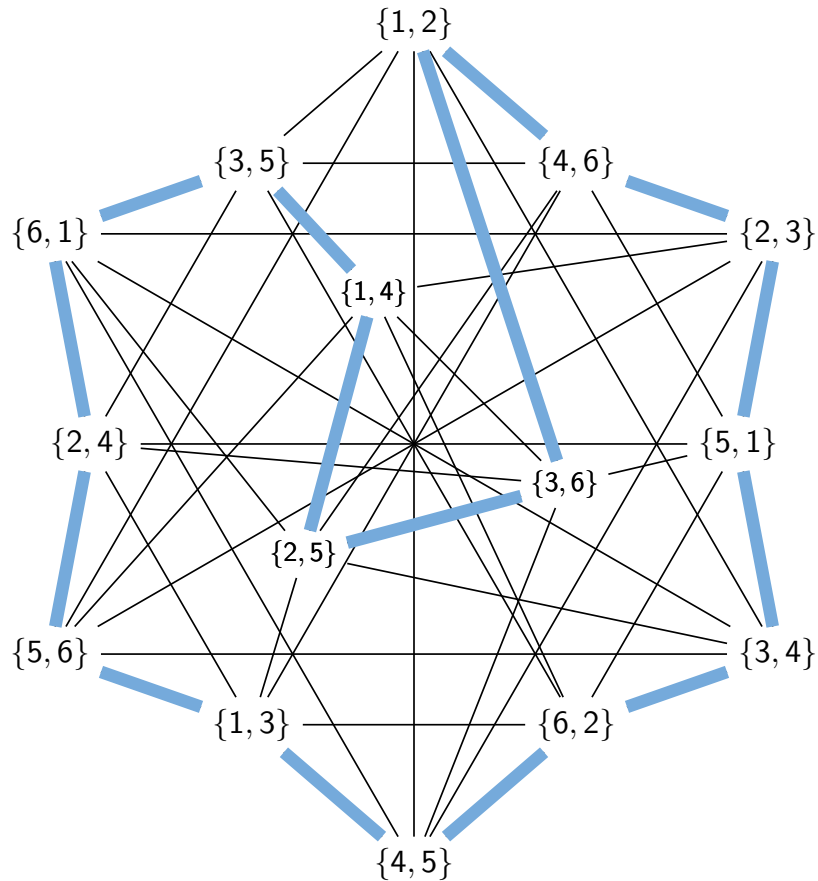
Camino de Hamilton, $K(5, 2)$



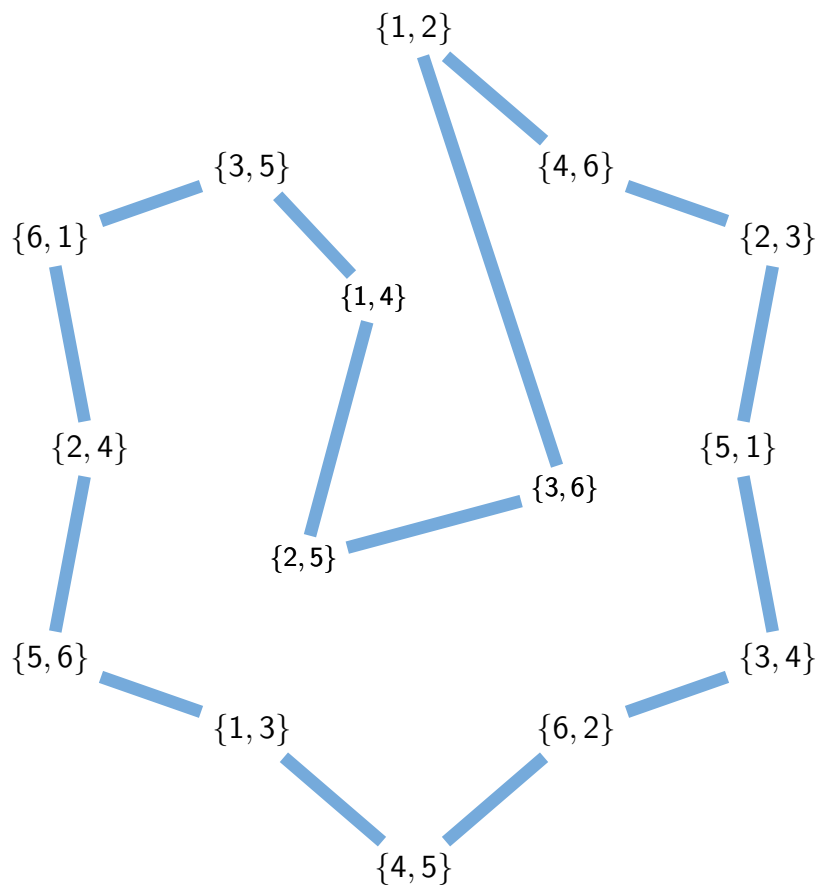
Ciclo de Hamilton, $K(6, 2)$



Ciclo de Hamilton, $K(6, 2)$



Ciclo de Hamilton, $K(6, 2)$



Conjetura (Lovász, 1969)

Todo grafo vértice-transitivo finito y conexo contiene un ciclo de Hamilton excepto por cinco conocidos contraejemplos.

Conjetura (Lovász, 1969)

Todo grafo vértice-transitivo finito y conexo contiene un ciclo de Hamilton excepto por cinco conocidos contraejemplos.

El grafo completo K_2 , el grafo de Petersen ($K(5, 2)$), el grafo de Coxeter y dos grafos que derivan de los anteriores reemplazando cada vértice por un triángulo.

Conjetura (Lovász, 1969)

Todo grafo vértice-transitivo finito y conexo contiene un ciclo de Hamilton excepto por cinco conocidos contraejemplos.

El grafo completo K_2 , el grafo de Petersen ($K(5, 2)$), el grafo de Coxeter y dos grafos que derivan de los anteriores reemplazando cada vértice por un triángulo.

- Los grafos de Kneser son vértice-transitivos.

Grafos de Kneser, $K(n, k)$

- Para $k \leq n < 2k$ son vértices aislados.
- Para $n = 2k$ son $\binom{2k}{k}$ copias de K_2 .
- Para $n > 2k$ es conexo.

Teorema (Chen (2000), Shields and Savage (2004), Mütze, Nummenpalo, and Walczak (2018))

Sea $n \geq 2k + 1$, y $(n, k) \neq (5, 2)$. El grafo $K(n, k)$ posee un ciclo de hamilton si satisface alguna de las siguientes condiciones

- 1 $n \leq 27$;
- 2 $n \geq 3k$;
- 3 $n = 2k + 1$; o
- 4 $n = 2k + 2^a$, $k \geq 3$ y $a \geq 0$.

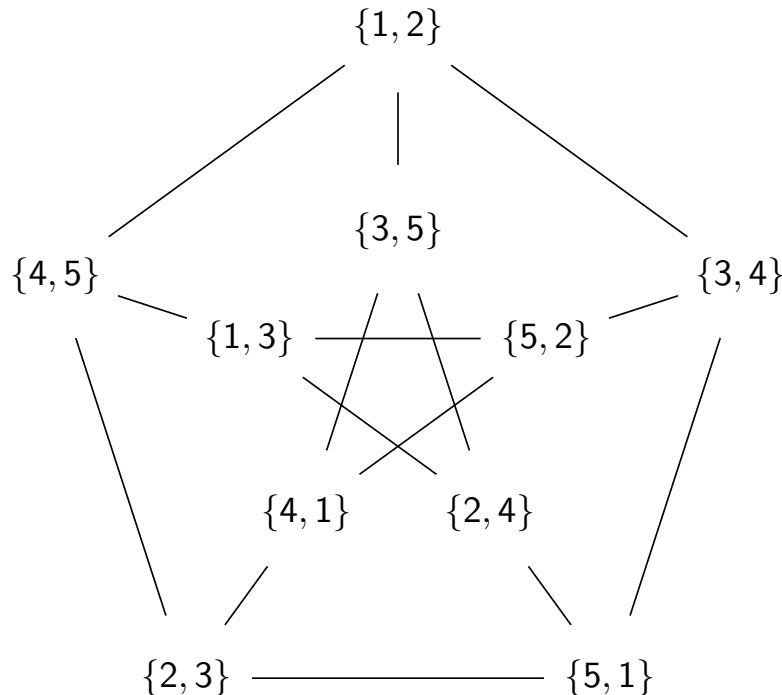
Definición

El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.

Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

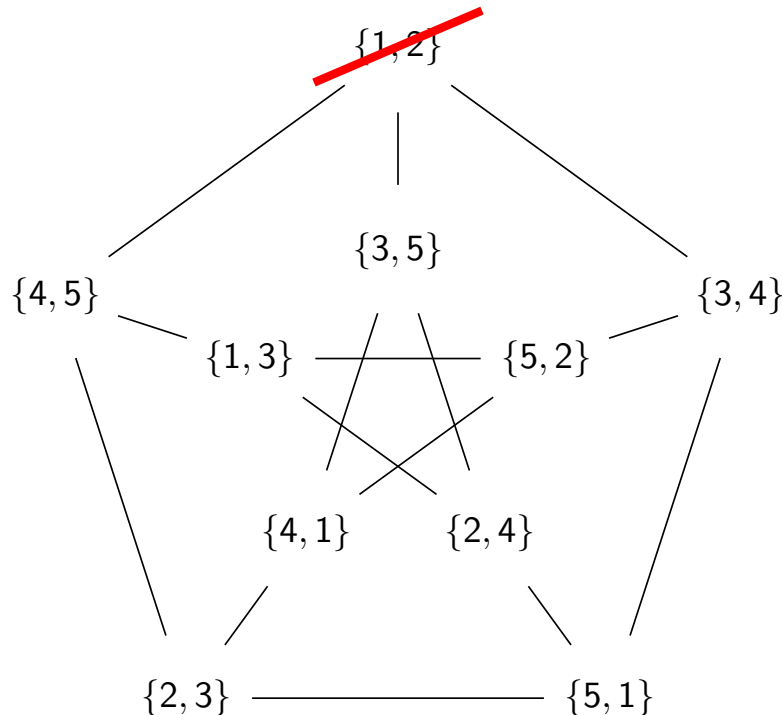
El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

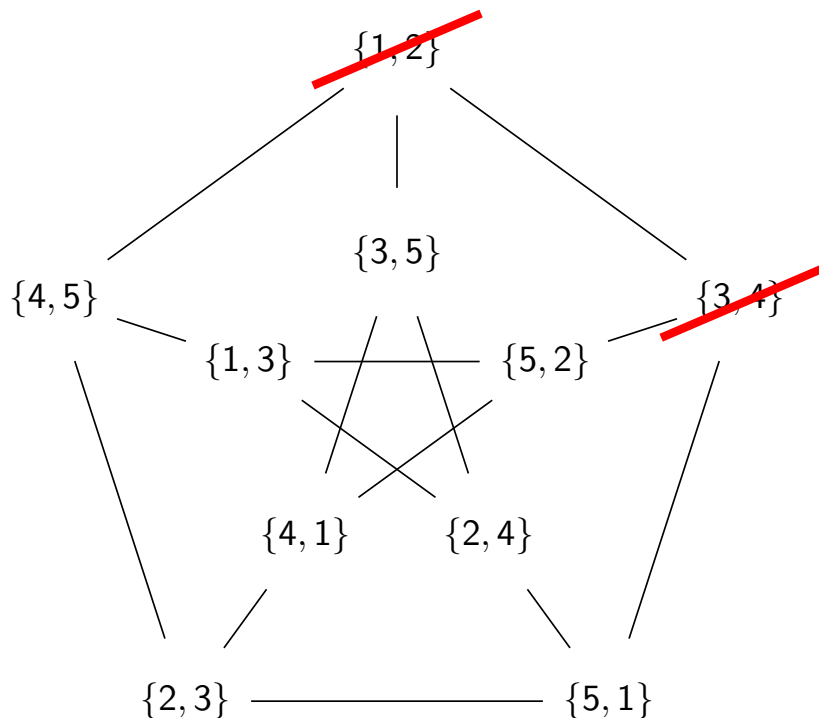
El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

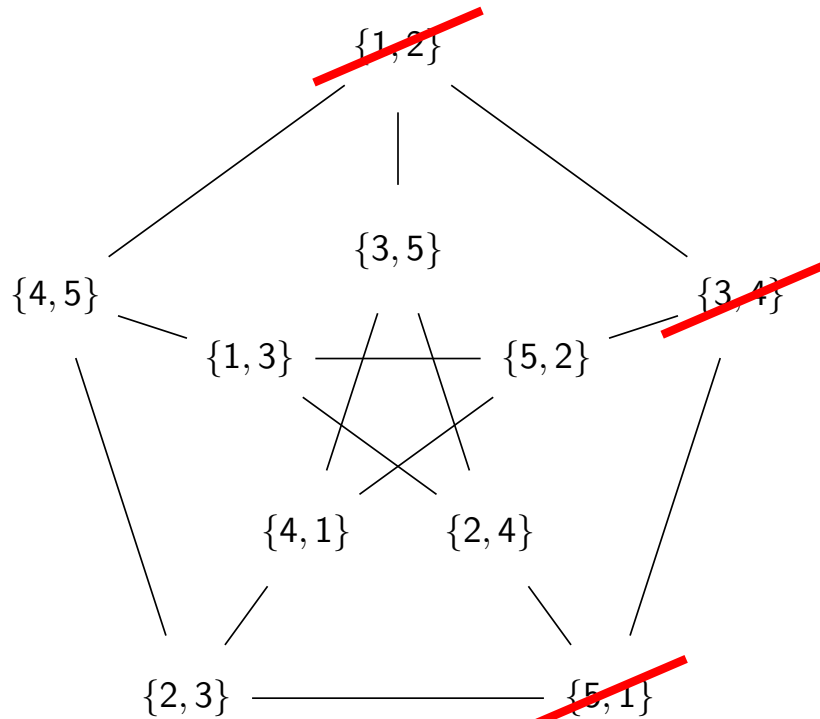
El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

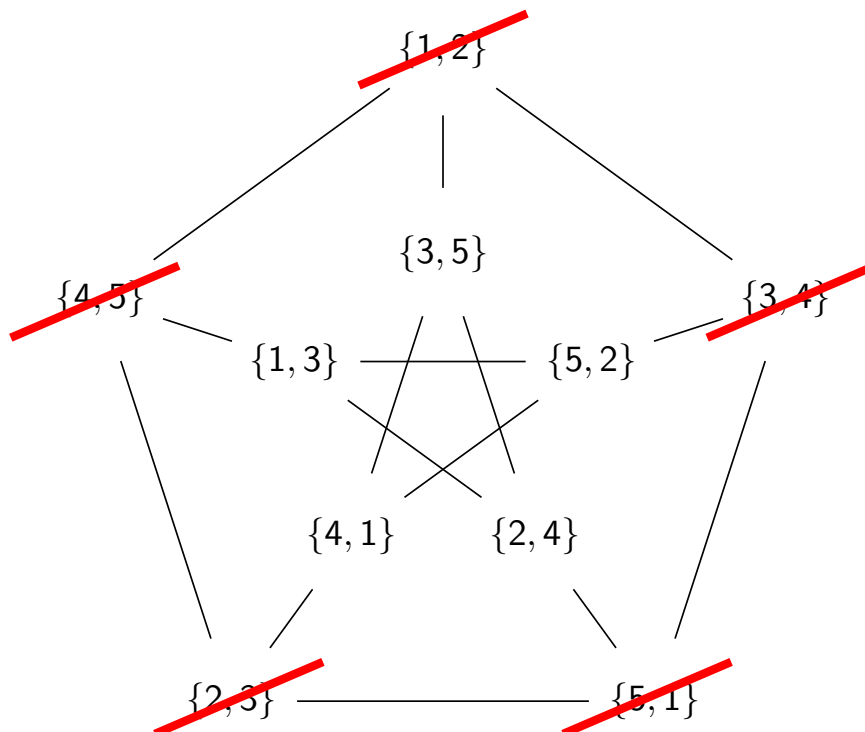
El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

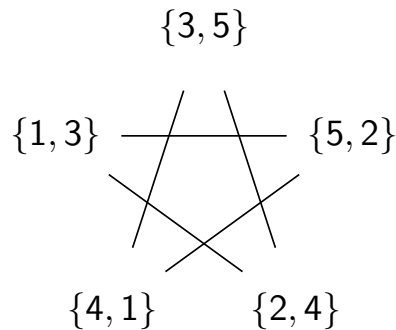
El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



Grafos de Kneser estables, $K_{stab}(5, 2)$

Definición

El grafo estable de Kneser $K_{stab}(n, k)$ se obtiene al eliminar los vértices con elementos **cíclicamente** consecutivos.



$K_{stab}(n, k)$ tiene un ciclo de Hamilton

- Para $n = 2k$ es isomorfo a K_2 .
- Para $n = 2k + 1$ es isomorfo a C_{2k+1} .

Teorema

$K_{stab}(n, k)$, con $n \geq 2k + 1$ tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

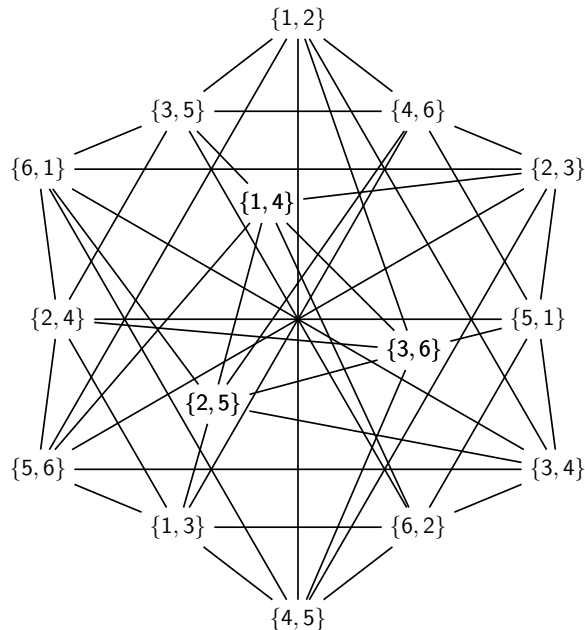
Definición

El grafo casi estable de Kneser $K_\varepsilon(n, k)$ es un subgrafo de $K(n, k)$ generado por los vértices que poseen solo dos elementos cíclicamente consecutivos.

Grafos de Kneser casi estables, $K_\varepsilon(6, 2)$

Definición

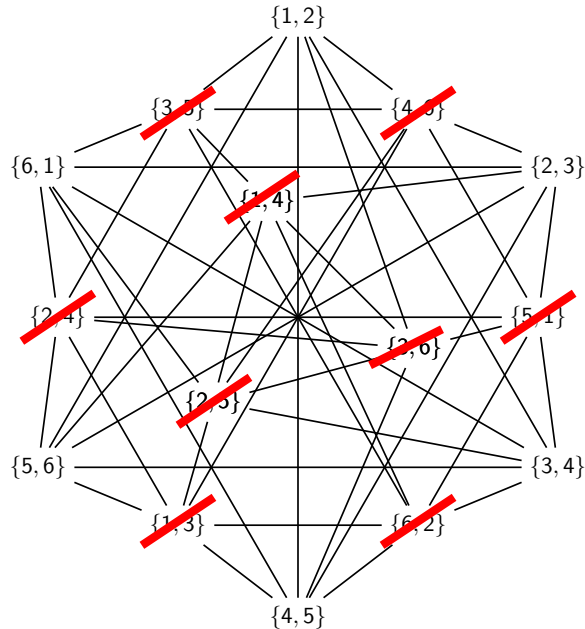
El grafo casi estable de Kneser $K_\varepsilon(n, k)$ es un subgrafo de $K(n, k)$ generado por los vértices que poseen solo dos elementos cíclicamente consecutivos.



Grafos de Kneser casi estables, $K_\varepsilon(6, 2)$

Definición

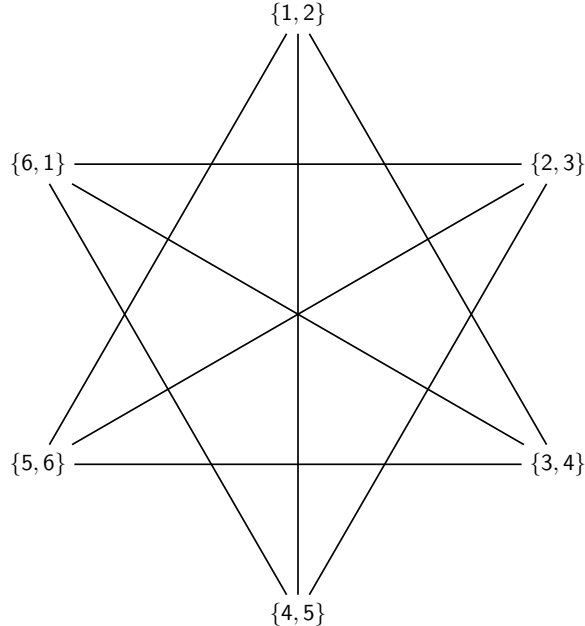
El grafo casi estable de Kneser $K_\varepsilon(n, k)$ es un subgrafo de $K(n, k)$ generado por los vértices que poseen solo dos elementos cíclicamente consecutivos.



Grafos de Kneser casi estables, $K_\varepsilon(6, 2)$

Definición

El grafo casi estable de Kneser $K_\varepsilon(n, k)$ es un subgrafo de $K(n, k)$ generado por los vértices que poseen solo dos elementos cíclicamente consecutivos.



Ejemplo $K_\varepsilon(12, 5)$

Un vértice es de la forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	x		x		x		x				
		1		1		1					4

$$\{1, 2, 4, 6, 8\} \in [P, 1, 1, 1, 4]$$

Ejemplo $K_\varepsilon(12, 5)$

Un vértice es de la forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	x		x		x		x				
		1		1		1					4

$$\{1, 2, 4, 6, 8\} \in [P, 1, 1, 1, 4]$$

Tenemos $12 - 5 = 7$ espacios a dividir en 4 bloques, por lo tanto las clases son:

Ejemplo $K_\varepsilon(12, 5)$

Un vértice es de la forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	x		x		x		x				
		1		1		1					4

$$\{1, 2, 4, 6, 8\} \in [P, 1, 1, 1, 4]$$

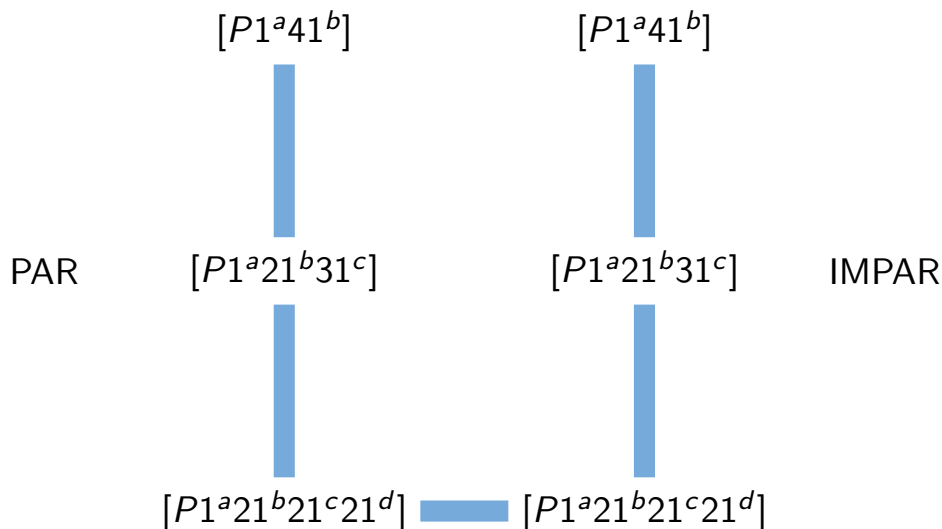
Tenemos $12 - 5 = 7$ espacios a dividir en 4 bloques, por lo tanto las clases son:

$[P, 1, 1, 1, 4]$	$[P, 4, 1, 1, 1]$	$[P, 1, 1, 2, 3]$	$[P, 3, 2, 1, 1]$
$[P, 1, 1, 4, 1]$	$[P, 1, 4, 1, 1]$	$[P, 1, 2, 1, 3]$	$[P, 3, 1, 2, 1]$
		$[P, 1, 2, 3, 1]$	$[P, 1, 3, 2, 1]$
		$[P, 2, 1, 1, 3]$	$[P, 3, 1, 1, 2]$
$[P, 1, 2, 2, 2]$	$[P, 2, 2, 2, 1]$	$[P, 2, 1, 3, 1]$	$[P, 1, 3, 1, 2]$
$[P, 2, 1, 2, 2]$	$[P, 2, 2, 1, 2]$	$[P, 2, 3, 1, 1]$	$[P, 1, 1, 3, 2]$

Hamiltonicidad en $K_\varepsilon(2k + 2, k)$

Tenemos $2k + 2 - k = k + 2$ posiciones a dividir en $k - 1$ bloques.
Los tres posibles tipos de clases son:

- $[P1^a41^b]$, con $a + b = k - 2$.
- $[P1^a21^b31^c]$ o $[P1^a31^b21^c]$, con $a + b + c = k - 3$.
- $[P1^a21^b21^c21^d]$, con $a + b + c + d = k - 4$.



Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	
	X		X					X	X		X

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	
	X		X					X	X		X
X		X		X		X	X				

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	
	X		X					X	X		X
X		X		X		X	X				
	X		X		X					X	X

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	
	X		X					X	X		X
X		X		X		X	X				
	X		X		X					X	X
		X		X		X		X	X		

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ciclo en $[P1^34]$ y $[P41^3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X		X		X				
				X		X		X		X	X
		X	X		X		X		X		
X	X					X		X		X	
				X	X		X		X		X
X		X	X					X		X	
	X					X	X		X		X
X		X		X	X					X	
	X		X					X	X		X
X		X		X		X	X				
	X		X		X					X	X
		X		X		X		X	X		

$$[P1^34] \rightarrow [P41^3]$$

Ídem en $[P1^241]$ y $[P141^2]$.

Si $a > b$,

$$[P1^a41^b] \rightarrow [P1^{b+1}41^{a-1}].$$

$$[P1^b41^a] \rightarrow [P1^{a-1}41^{b+1}].$$

Si $a > b$, $[P1^a41^b] \rightarrow [P1^{b+1}41^{a-1}]$.

$[P1^b41^a] \rightarrow [P1^{a-1}41^{b+1}]$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^34]$	X	X		X		X		X				
$[P41^3]$					X		X		X		X	X

Conectando $[P1^a41^b]$

Si $a > b$, $[P1^a41^b] \rightarrow [P1^{b+1}41^{a-1}]$.
 $[P1^b41^a] \rightarrow [P1^{a-1}41^{b+1}]$.

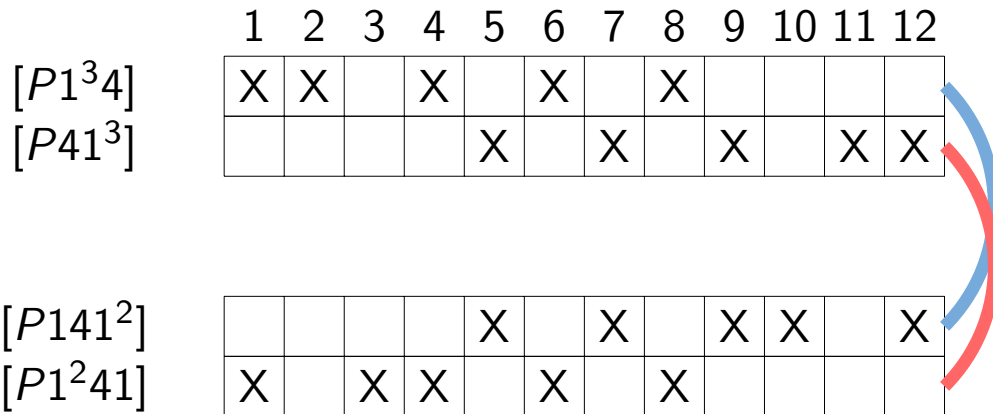
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^34]$	X	X		X		X		X				
$[P41^3]$					X		X		X		X	X

$[P141^2]$					X		X		X	X		X
$[P1^241]$	X		X	X		X		X				

Conectando $[P1^a41^b]$

Si $a > b$, $[P1^a41^b] \rightarrow [P1^{b+1}41^{a-1}]$.

$[P1^b41^a] \rightarrow [P1^{a-1}41^{b+1}]$.



Clases $[P1^a21^b31^c]$ y $[P1^a31^b21^c]$

$[P1231]$

$[P1321]$

$[P1213]$

$[P3121]$

$[P1^223]$

$[P321^2]$

$[P21^23]$

$[P31^22]$

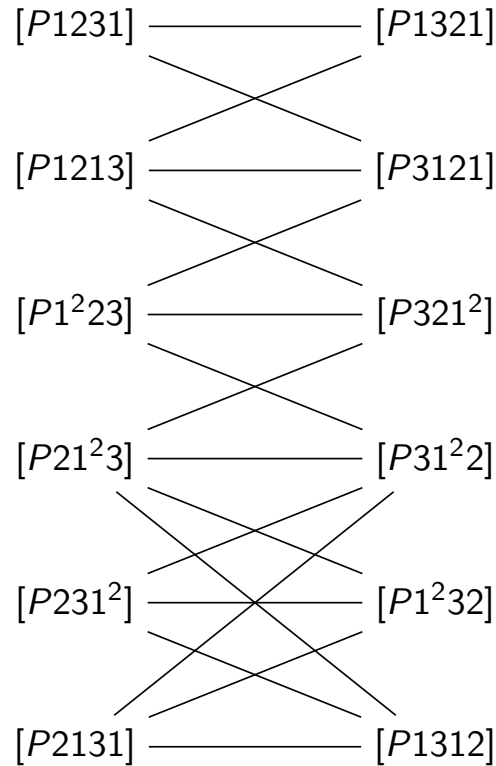
$[P231^2]$

$[P1^232]$

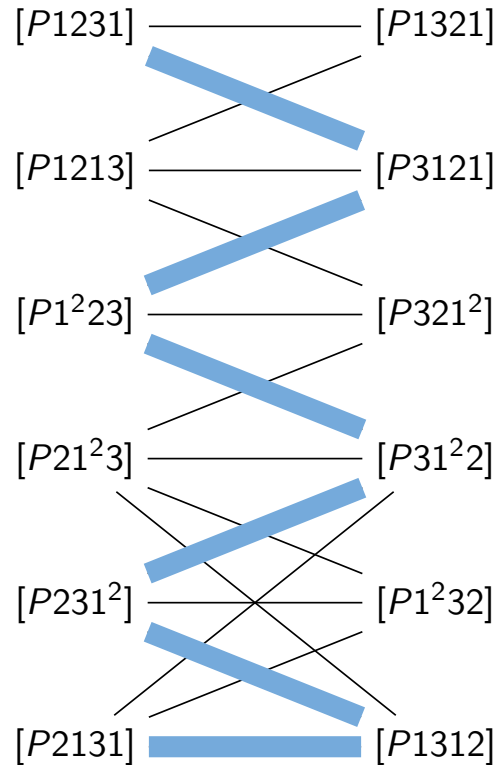
$[P2131]$

$[P1312]$

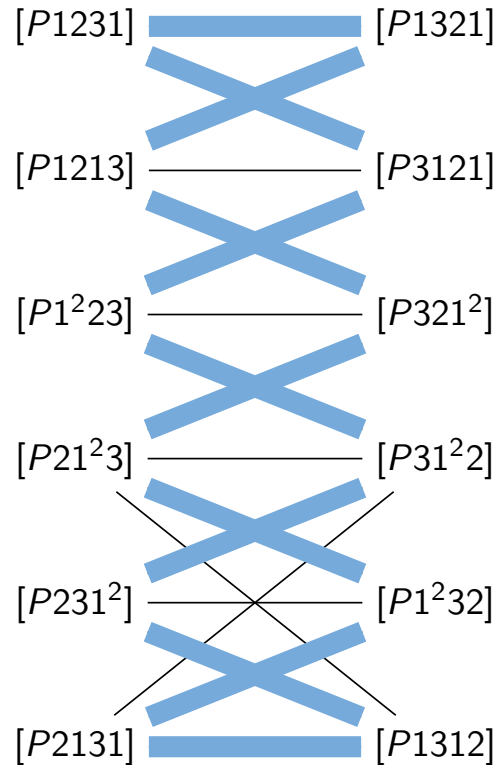
Clases $[P1^a21^b31^c]$ y $[P1^a31^b21^c]$



Clases $[P1^a21^b31^c]$ y $[P1^a31^b21^c]$



Clases $[P1^a21^b31^c]$ y $[P1^a31^b21^c]$



Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		

$[P12^3]$

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X

$[P12^3]$
 $[P2^31]$

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	

$[P12^3]$
 $[P2^31]$
 $[P2^212]$

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	
X		X			X			X	X		

$[P12^3]$
 $[P2^31]$
 $[P2^212]$
 $[P212^2]$

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	
X		X			X			X	X		

[P12³]

[P2³1]

[P2²12]

[P212²]

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^c21^d21^a21^b]$:

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	
X		X			X			X	X		

$[P12^3]$
 $[P2^31]$
 $[P2^212]$
 $[P212^2]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^c21^d21^a21^b]$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P2^31]$			X		X	X			X			X
$[P2^212]$		X		X			X	X			X	

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	
X		X			X			X	X		

$[P12^3]$

$[P2^31]$

$[P2^212]$

$[P212^2]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^c21^d21^a21^b]$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P2^31]$			X		X	X			X			X
$[P2^212]$		X		X			X	X			X	
$[P212^2]$		X		X			X			X	X	
$[P12^3]$	X		X			X			X			X

Ciclo en $[P1^a21^b21^c21^d]$

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^b21^c21^d21^a]$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X			X			X		
		X		X	X			X			X
	X		X			X	X			X	
X		X			X			X	X		

[P12³]

[P2³1]

[P2²12]

[P212²]

Utilizando $[P1^a21^b21^c21^d] \rightarrow [P1^c21^d21^a21^b]$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[P2 ³ 1]			X		X	X			X			X
[P2 ² 12]		X		X			X	X			X	
[P212 ²]		X		X			X			X	X	
[P12 ³]	X		X			X			X			X

Ciclo de Hamilton

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^3 4]$			X	X		X		X		X		
$[P41^3]$	X	X					X		X		X	

Ciclo de Hamilton

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^34]$			X	X		X		X		X		
$[P41^3]$	X	X					X		X		X	

$[P21^23]$	X	X			X		X		X			
$[P1^232]$			X	X		X		X				X

Ciclo de Hamilton

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^34]$			X	X		X		X		X		
$[P41^3]$	X	X					X		X		X	

$[P21^23]$	X	X			X		X		X			
$[P1^232]$			X	X		X		X				X



Ciclo de Hamilton

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^3 4]$			X	X		X		X		X		
$[P41^3]$	X	X					X		X		X	

$[P21^2 3]$	X	X			X		X		X			
$[P1^2 32]$			X	X		X		X				X

$[P1231]$	X	X		X			X				X	
$[P1321]$			X		X	X		X				X



Ciclo de Hamilton

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[P1^3 4]$			X	X		X		X		X		
$[P41^3]$	X	X					X		X		X	

$[P21^2 3]$	X	X			X		X		X			
$[P1^2 32]$			X	X		X		X				X

$[P1231]$	X	X		X			X				X	
$[P1321]$			X		X	X		X				X

$[P2^3 1]$			X		X	X			X			X
$[P12^3]$	X	X		X			X			X		



Teorema

$K_\varepsilon(2k + 2, k)$, tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

Teorema

$K_\varepsilon(2k + 2, k)$, tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

Próximamente

Generalizar lo expuesto para estudiar el grafo $K_\varepsilon(n, k)$.

Conclusión

Teorema

$K_\varepsilon(2k + 2, k)$, tiene un ciclo de Hamilton para todo k .

Próximamente

Generalizar lo expuesto para estudiar el grafo $K_\varepsilon(n, k)$.

Próximamente

Conectar con el resto de los vértices del grafo de Kneser y así encontrar un ciclo de Hamilton.

¡Muchas gracias!