Desigualdades débiles mixtas en espacios euclidianos y en espacios de tipo homogéneo

Ibañez Firnkorn, Gonzalo

INMABB (UNS - CONICET)

Una función w se dice peso si $w \geq 0$ y $w \in L^1_{loc}$.

Una función w se dice peso si $w \geq 0$ y $w \in L^1_{loc}$.
Dados u, v pesos, estudiemos desigualdades de la forma

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq c_n C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

donde T es un operador singular.

Dado $\eta \in (0,1)$, una familia de cubos $\mathcal{S}$ es η-sparse si para cada cubo $Q \in \mathcal{S}$ existe un conjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que

$$\eta|Q| \leq |E_Q|$$

y $\{E_Q\}$ son disjuntos.

Dado $\eta \in (0,1)$, una familia de cubos $\mathcal{S}$ es η-sparse si para cada cubo $Q \in \mathcal{S}$ existe un conjunto medible $E_Q \subset Q$ tal que

$$\eta|Q| \leq |E_Q|$$

y $\{E_Q\}$ son disjuntos.
Un operador sparse es de la forma

$$A_{\mathcal{S},r}f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^r \right)^{\frac{1}{r}} \chi_Q(x)$$

con $r \geq 1$ y $\mathcal{S}$ es una familia η-sparse

Decimos que $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ si

$$[v]_{A_p(u)} = \sup_Q \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{-\frac{p'}{p}} u \right)^{p/p'} < \infty,$$

donde el supremo es sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $u(Q) = \int_Q u(x)dx$.

Decimos que $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ si

$$[v]_{A_p(u)} = \sup_Q \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{-\frac{p'}{p}} u \right)^{p/p'} < \infty,$$

donde el supremo es sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $u(Q) = \int_Q u(x)dx$.
Si $u \equiv 1$, recuperamos los pesos de Muckenhoupt y denotamos A_p

Decimos que $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ si

$$[v]_{A_p(u)} = \sup_Q \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{-\frac{p'}{p}} u \right)^{p/p'} < \infty,$$

donde el supremo es sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $u(Q) = \int_Q u(x)dx$.
Si $u \equiv 1$, recuperamos los pesos de Muckenhoupt y denotamos A_p
Para $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{Mw(x)}{w(x)} < \infty.$$

Decimos que $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ si

$$[v]_{A_p(u)} = \sup_Q \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q vu \right) \left(\frac{1}{u(Q)} \int_Q v^{-\frac{p'}{p}} u \right)^{p/p'} < \infty,$$

donde el supremo es sobre todos los cubos Q en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes y $u(Q) = \int_Q u(x)dx$.
Si $u \equiv 1$, recuperamos los pesos de Muckenhoupt y denotamos A_p
Para $p = 1$, $w \in A_1$ si

$$[w]_{A_1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{Mw(x)}{w(x)} < \infty.$$

La clase A_∞ se define como $A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$.

Dados $r \geq 1$ y Q un cubo, denotamos

$$\|f\|_{r,Q} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Dados $r \geq 1$ y Q un cubo, denotamos

$$\|f\|_{r,Q} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Decimos que $w \in RH_q$, $1 \leq q < \infty$ si

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^q \right)^{1/q} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w$$

Dados $r \geq 1$ y Q un cubo, denotamos

$$\|f\|_{r,Q} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Decimos que $w \in RH_q$, $1 \leq q < \infty$ si

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^q \right)^{1/q} \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q w$$

Decimos que $b \in Osc_{\exp L^r}(w)$, con $r \geq 1$, si $\sup_Q \|b - b_Q\|_{\exp L^r(w),Q} < \infty$

- Sawyer en '85 probó que si $u, v \in A_1$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq c_n C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx.$$

- Sawyer en '85 probó que si $u, v \in A_1$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq c_n C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx.$$

- Cruz-Uribe, Martell y Pérez en '05 probaron que si

$$u \in A_1 \text{ y } v \in A_1 \text{ o } v \in A_\infty(u)$$

- Sawyer en ‘85 probó que si $u, v \in A_1$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq c_n C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx.$$

- Cruz-Uribe, Martell y Pérez en ‘05 probaron que si

$$u \in A_1 \text{ y } v \in A_1 \text{ o } v \in A_\infty(u)$$

entonces se cumple la desigualdad mixta para el maximal de Hardy-Littlewood M y los operadores de Calderón-Zygmund.

- Sawyer en '85 probó que si $u, v \in A_1$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{M(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \leq c_n C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx.$$

- Cruz-Uribe, Martell y Pérez en '05 probaron que si

$$u \in A_1 \text{ y } v \in A_1 \text{ o } v \in A_\infty(u)$$

entonces se cumple la desigualdad mixta para el maximal de Hardy-Littlewood M y los operadores de Calderón-Zygmund.

- Li, Ombrosi y Pérez en '18 probaron que

$$u \in A_1 \text{ y } v \in A_\infty$$

se cumple la desigualdad mixta para M y los operadores de Calderón-Zygmunnd.

Carderelli y Rivera-Rios en '19 probaron que si $u \in A_1$ y $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ y T es un operador de Calderón-Zygmund

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v} = [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty} \log(e + [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)})$$

Carderelli y Rivera-Rios en '19 probaron que si $u \in A_1$ y $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ y T es un operador de Calderón-Zygmund

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v} = [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty} \log(e + [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)})$$

Además si $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathrm{O}sc_{\exp L^r}$, $r > 1$, entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{m}{r}} \left(\frac{|f|\|b\|^m_{\mathrm{O}sc_{\exp L^r}}}{\lambda}\right) uv$$

con $\varphi_s(t) = t\log(e+t)^s$ y

Carderelli y Rivera-Rios en '19 probaron que si $u \in A_1$ y $v \in A_p(u)$, $1 < p < \infty$ y T es un operador de Calderón-Zygmund

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v} = [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty} \log(e + [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)})$$

Además si $m \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathrm{O}sc_{\exp L^r}$, $r > 1$, entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{m}{r}} \left(\frac{|f|\|b\|^m_{\mathrm{O}sc_{\exp L^r}}}{\lambda}\right) uv$$

con $\varphi_s(t) = t\log(e+t)^s$ y

$$\begin{aligned} C_{u,v} &= \sum_{h=0}^{m} [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}} \log(e + [u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)})^{1+\frac{h}{r}} \\ &= \sum_{h=0}^{m} [v]_{A_p(u)}^{-1} \varphi_{1+\frac{h}{r}}([u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}^{1+\frac{h}{r}}[u]_{A_\infty}^{\frac{m-h}{r}}[v]_{A_p(u)}) \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ simbolos $b_i \in \mathrm{Osc}_{\exp L^{r_i}}$, $i = 1, \ldots, m$.
Dado T operador lineal definimos $T_{\mathbf{b}}$ como

$$T_{\mathbf{b}} f(x) = [b_m, \ldots [b_2, [b_1, T]]] f(x)$$

donde $[b, T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$.

Sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ simbolos $b_i \in \mathrm{Osc}_{\exp L^{r_i}}$, $i = 1, \dots, m$.
Dado T operador lineal definimos $T_{\mathbf{b}}$ como

$$T_{\mathbf{b}} f(x) = [b_m, \dots [b_2, [b_1, T]]] f(x)$$

donde $[b, T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$.

Berra, Carena y Pradolini en '22 probaron que si T es un operador de Calderón Zygmund, $u \in A_1$, $v \in A_\infty(u)$ y $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{r_i}$ entonces

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_{\mathbf{b}}(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f(x)|\|\mathbf{b}\|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx,$$

donde $\varphi_s(t) = t \log(e + t)^s$.

Resultados

Consideremos T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{r,Q}|Q|$$

Resultados

Consideremos T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q} \|g\|_{r,Q} |Q|$$

Teorema

Sean $1 \leq p, r < \infty$, $u \in A_1 \cap RH_q$, $q = 2r-1$ *y* $v \in A_p(u)$. *Entonces*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v} = [u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}} [u]_{A_1} [uv]_{A_\infty} \log(e + [u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}} [u]_{A_1} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_p(u)})$$

Sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ simbolos $b_i \in \mathrm{Osc}_{\exp L^{r_i}}$, $i = 1, \dots, m$. Sea $\mathbf{b} = \sigma \cup \sigma'$ con σ and σ' conjuntos disjuntos. Denotamos

$$|b - b_Q|_\sigma = \prod_{i\in\sigma} |b_i(x) - (b_i)_Q|, \qquad C_j(b) = \{\sigma \subset b : \#\sigma = j\}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \prod_{i=1}^{m} \|b_i\|_{\mathrm{Osc}_{\exp L^{r_i}}}.$$

Consideramos T un operador tal que $T_{\mathbf{b}}$ posee una dominación sparse bilineal,

$$\int T_{\mathbf{b}}(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{h=0}^{m} \sum_{\sigma\in C_h(b)} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f|b - b_Q|_\sigma\|_{1,Q} \|g|b(x) - b_Q|_{\sigma'}\|_{r,Q} |Q|$$

Teorema

Sean $1 \leq p, s < \infty$, $u \in A_1 \cap RH_q$ *con* $q = 2s - 1$ *y* $v \in A_p(u)$. *Sean* $m \in \mathbb{N}$, $r_i \geq 1$, $1 \leq i \leq m$, $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_i}$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ *donde* $b_i \in Osc_{\exp L^{r_i}}$, $1 \leq i \leq m$. *Entonces*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_{\mathbf{b}}(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f(x)|\|\mathbf{b}\|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx,$$

donde $\varphi_s(t) = t\log(e+t)^s$ *y*

$$C_{u,v} = \sum_{h=0}^{m} [v]_{A_p(u)}^{-1} \varphi_{1+\frac{1}{r}}\left([uv]_{A_\infty}^{1+\frac{m-h}{r}} [u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4s}} [u]_{A_1} [v]_{A_p(u)}\right)$$

Sean $b \in BMO = Osc_{\exp L^1}$ y $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$T_b^m f(x) = [b, \ldots [b, [b, T]]] f(x)$$

Consideramos T un operador tal que T_b^m posee una dominación sparse bilineal,

$$\int T_b^m(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} \left(\|f|b - b_Q|^m\|_{1,Q} \|g\|_{r,Q} |Q| + \|f\|_{1,Q} \|g|b(x) - b_Q|^m\|_{r,Q} |Q| \right)$$

Teorema

Sean $1 \leq p, s < \infty$, $u \in A_1 \cap RH_q$ *con* $q = 2s - 1$ *y* $v \in A_p(u)$. *Entonces*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_b^m(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m\left(\frac{|f(x)|\|b\|_{BMO}}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx,$$

donde $\varphi_s(t) = t\log(e+t)^s$ *y*

$$\begin{aligned} C_{u,v} = & [v]_{A_p(u)}^{-1}\varphi_{1+m}\big([uv]_{A_\infty}^{1+m}[u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4s}}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\big) \\ & + [v]_{A_p(u)}^{-1}\varphi_1\big([uv]_{A_\infty}[u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4s}}[u]_{A_1}[v]_{A_p(u)}\big) \end{aligned}$$

(X, d, μ) es un espacio de tipo homogeneo si d es una quasi-metrica, es decir que

$$d(x,y) \leq k_d(d(x,z) + d(z,y)) \qquad x,y,z \in X,\ k_d \geq 1$$

μ es una medida de Borel duplicante

$$\mu(B(x,2\rho)) \leq c_\mu \mu(B(x,\rho)) \qquad x \in X,\ \rho > 0$$

Consideremos T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{j=1}^{l} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q} \|g\|_{r,Q} |Q|$$

donde $\mathcal{S}_j$ son familias ε-sparse.

Consideremos T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{j=1}^{l}\sum_{Q\in\mathcal{S}_j}\|f\|_{1,Q}\|g\|_{r,Q}|Q|$$

donde $\mathcal{S}_j$ son familias ε-sparse.

Teorema

Sean $1\leq p,r<\infty$, $u\in A_1\cap RH_q$, $q=2r-1$ *y* $v\in A_p(u)$. *Entonces*

$$uv\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)}>\lambda\right\}\right)\lesssim C_{u,v}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v}=[u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[uv]_{A_p}\log(e+[u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}}[u]_{A_1}[uv]_{A_\infty}[v]_{A_p(u)}[uv]_{A_p}^{3})$$

Aplicaciones y generalizaciones

Si T es un operador tal que T^* posee una dominación sparse con promedios r entonces se cumple que

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{r,Q}|Q|$$

Aplicaciones y generalizaciones

Si T es un operador tal que T^* posee una dominación sparse con promedios r entonces se cumple que

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{r,Q}|Q|$$

Ejemplos:

Aplicaciones y generalizaciones

Si T es un operador tal que T^* posee una dominación sparse con promedios r entonces se cumple que

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q \in \mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q} \|g\|_{r,Q} |Q|$$

Ejemplos:

- Los operadores de Calderón-Zygmund

Aplicaciones y generalizaciones

Si T es un operador tal que T^* posee una dominación sparse con promedios r entonces se cumple que

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{r,Q}|Q|$$

Ejemplos:

- Los operadores de Calderón-Zygmund
- Los operadores acotados en L^2 que cumplen una regularidad de Hörmander, H_r o H_A

Decimos que $\mathcal{A}$ es una función de Young si $\mathcal{A} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es convexa, no decreciente tal que $\mathcal{A}(0) = 0$ y $\mathcal{A}(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Decimos que $\mathcal{A}$ es una función de Young si $\mathcal{A} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es convexa, no decreciente tal que $\mathcal{A}(0) = 0$ y $\mathcal{A}(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.
Por ejemplo, $\mathcal{A}(t) = t^\beta \log(e+t)^\gamma$ con $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$.

Decimos que $\mathcal{A}$ es una función de Young si $\mathcal{A} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es convexa, no decreciente tal que $\mathcal{A}(0) = 0$ y $\mathcal{A}(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.
Por ejemplo, $\mathcal{A}(t) = t^\beta \log(e + t)^\gamma$ con $\beta \geq 1$ y $\gamma \geq 0$.
Decimos que $\mathcal{A} \in B_p$ si

$$\int_1^\infty \frac{A(t)}{t^p} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Observemos que si $\mathcal{A} \in B_p$ entonces $A(t) \leq \kappa_{\mathcal{A},p} t^p$.

Podemos considerar T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{A,Q}|Q|$$

Podemos considerar T un operador que posea dominación sparse bilineal, esto es

$$\int T(f)g \lesssim \sum_{j=1}^{3^n} \sum_{Q\in\mathcal{S}_j} \|f\|_{1,Q}\|g\|_{A,Q}|Q|$$

Teorema

Sean $1 \leq p, r < \infty$, $u \in A_1 \cap RH_q$, $q = 2r-1$ *y* $v \in A_p(u)$. *Sea* $\mathcal{A}$ *una función de Young tal que* $\mathcal{A} \in B_\rho$ *para todo* $\rho > r$. *Entonces*

$$uv\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{T(fv)(x)}{v(x)} > \lambda\right\}\right) \lesssim C_{u,v} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) u(x)v(x)dx$$

con

$$C_{u,v} = \kappa_u [u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}} [u]_{A_1} [uv]_{A_\infty} \log(e + \kappa_u [u]_{RH_q}^{1+\frac{q}{4r}} [u]_{A_1} [uv]_{A_\infty} [v]_{A_p(u)})$$

GRACIAS