Semánticas Matriciales para las lógicas Ciu^n

Víctor Fernández; Gabriela Eisenberg

Instituto de Ciencias Básicas (Área Matemática)

FFHA - UNSJ

vlfernan@ffha.unsj.edu.ar gabriela.eisenberg@gmail.com

22 - 09 - 2022

Semánticas Matriciales y Semánticas de Bivaluaciones

Nota: Como punto de partida en esta comunicación consideraremos conjuntos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (de *conectivos* con aridad finita $k_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$),

Semánticas Matriciales y Semánticas de Bivaluaciones

Nota: Como punto de partida en esta comunicación consideraremos conjuntos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (de *conectivos* con aridad finita $k_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$),y el lenguaje $L(C)$, entendido como el álgebra de palabras generada por C (tomando a los conectivos como *operaciones*) sobre un conjunto $\mathcal{V}$ de *fórmulas atómicas*.

Semánticas Matriciales y Semánticas de Bivaluaciones

Nota: Como punto de partida en esta comunicación consideraremos conjuntos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (de *conectivos* con aridad finita $k_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$),y el lenguaje $L(C)$, entendido como el álgebra de palabras generada por C (tomando a los conectivos como *operaciones*) sobre un conjunto $\mathcal{V}$ de *fórmulas atómicas*.

Recordatorio 1: Una lógica (proposicional) es un par $(L(C), \vdash)$ con $\vdash\ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$, $\vdash$ extensiva monotónica y transitiva.

Semánticas Matriciales y Semánticas de Bivaluaciones

Nota: Como punto de partida en esta comunicación consideraremos conjuntos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ (de *conectivos* con aridad finita $k_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$),y el lenguaje $L(C)$, entendido como el álgebra de palabras generada por C (tomando a los conectivos como *operaciones*) sobre un conjunto $\mathcal{V}$ de *fórmulas atómicas*.

Recordatorio 1: Una lógica (proposicional) es un par $(L(C), \vdash)$ con $\vdash \ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$, $\vdash$ extensiva monotónica y transitiva.

Recordatorio 2: La noción de matriz lógica (debida a Łukasiewicz y Tarski; ver [Cze:01]) está dada por:

Definición: Dado C, una C-**matriz** es un par $M = (\mathbf{A}, D)$, siendo $\mathbf{A}$ una C-álgebra (e.d., similar a $L(C)$) con soporte A, y $D \subseteq A$. Toda C-matriz define una relación de consecuencia $\models_M$ del modo usual:

Definición: Sea C fijo, y sea M una C-matriz; la relación $\models_M \ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ se define por: $\Gamma \models_M \varphi$ si y solo si, para toda valuación (e.d. *homomorfismo*) $v : L(C) \to A$ tal que $v(\Gamma) \subseteq D$, se verifica que $v(\varphi) \in D$.

Definición: Dado C, una C-**matriz** es un par $M = (\mathbf{A}, D)$, siendo $\mathbf{A}$ una C-álgebra (e.d., similar a $L(C)$) con soporte A, y $D \subseteq A$. Toda C-matriz define una relación de consecuencia $\models_M$ del modo usual:

Definición: Sea C fijo, y sea M una C-matriz; la relación $\models_M \ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ se define por: $\Gamma \models_M \varphi$ si y solo si, para toda valuación (e.d. *homomorfismo*) $v : L(C) \to A$ tal que $v(\Gamma) \subseteq D$, se verifica que $v(\varphi) \in D$. Mas generalmente: sea $\mathcal{K}$ una *clase de C-matrices*: $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$ si y solo si, para toda $M \in \mathcal{K}$, $\Gamma \models_M \varphi$.

Definición: Dado C, una C-**matriz** es un par $M = (\mathbf{A}, D)$, siendo $\mathbf{A}$ una C-álgebra (e.d., similar a $L(C)$) con soporte A, y $D \subseteq A$. Toda C-matriz define una relación de consecuencia $\models_M$ del modo usual:

Definición: Sea C fijo, y sea M una C-matriz; la relación $\models_M \ \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ se define por: $\Gamma \models_M \varphi$ si y solo si, para toda valuación (e.d. *homomorfismo*) $v : L(C) \to A$ tal que $v(\Gamma) \subseteq D$, se verifica que $v(\varphi) \in D$. Mas generalmente: sea $\mathcal{K}$ una *clase de C-matrices*: $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$ si y solo si, para toda $M \in \mathcal{K}$, $\Gamma \models_M \varphi$.

Decimos que una *lógica* $\mathcal{L} = (L(C), \vdash)$ *admite semántica matricial* si y solo si existe una clase $\mathcal{K}$ de C-matrices tal que $\vdash \ = \ \models_{\mathcal{K}}$.

Algunos comentarios acerca de $\models_{\mathcal{K}}$ (en particular, de $\models_M$):

• En general, dada $M = (\mathbf{A}, D)$ una C-matriz, no es preciso definir en A una relación de orden vinculada con $\models_M$.

• Tampoco hay una conexión obligatoria entre semánticas matriciales y semánticas algebraicas.

• Si $\mathcal{K}$ es una clase finita de matrices de soporte finito, entonces $\models_{\mathcal{K}}$ es finitaria (Wójcicki).

• $\models_{\mathcal{K}}$ es *estructural* (estable por sustituciones: si $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$, entonces $\sigma(\Gamma) \models_{\mathcal{K}} \sigma(\varphi)$ para toda sustitución σ). Más aún:

Teorema: Toda lógica estructural $\mathcal{L} = (L(C), \vdash)$ admite una semántica matricial trivial.

Demostración: La clase $\mathcal{K}$ de matrices que caracteriza a toda lógica estructural es el "Lindenbaum Bundle" (ver [Cze:01]), constituido por matrices de la forma $M_\Gamma = (L(C), \Gamma)$, siendo Γ una *teoría* de $\mathcal{L}$. $\square$

Teorema: Toda lógica estructural $\mathcal{L} = (L(C), \vdash)$ admite una semántica matricial trivial.

Demostración: La clase $\mathcal{K}$ de matrices que caracteriza a toda lógica estructural es el "Lindenbaum Bundle" (ver [Cze:01]), constituido por matrices de la forma $M_\Gamma = (L(C), \Gamma)$, siendo Γ una *teoría* de $\mathcal{L}$. $\square$

De este modo, es conveniente reformular el problema de la existencia de semánticas matriciales. Por ejemplo: ¿Cuándo una lógica determinada $\mathcal{L}$ admite semántica matricial *finita*? O más aún: ¿En que casos $\vdash = \models_M$, con M finita?.

Teorema: Toda lógica estructural $\mathcal{L} = (L(C), \vdash)$ admite una semántica matricial trivial.

Demostración: La clase $\mathcal{K}$ de matrices que caracteriza a toda lógica estructural es el "Lindenbaum Bundle" (ver [Cze:01]), constituido por matrices de la forma $M_\Gamma = (L(C), \Gamma)$, siendo Γ una *teoría* de $\mathcal{L}$. $\square$

De este modo, es conveniente reformular el problema de la existencia de semánticas matriciales. Por ejemplo: ¿Cuándo una lógica determinada $\mathcal{L}$ admite semántica matricial *finita*? O más aún: ¿En que casos $\vdash = \models_M$, con M finita?.

Los casos de lógicas admitiendo semánticas matriciales finitas son bien conocidos. Veamos algunos casos en donde ello *no ocurre*:

- La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel).

- La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel). Sin embargo, puede hallarse una matriz J *numerable* que caracterice a *las tautologías intuicionistas*: $\vdash_{IPC} \varphi$ si y solo si $\models_J \varphi$ (Jaśkowski).

- La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel). Sin embargo, puede hallarse una matriz J *numerable* que caracterice a *las tautologías intuicionistas*: $\vdash_{IPC} \varphi$ si y solo si $\models_J \varphi$ (Jaśkowski). Sin embargo, la relación $\vdash_{IPC}$ no admite ni siquiera semántica matricial numerable (Wrónski).

- La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel). Sin embargo, puede hallarse una matriz J *numerable* que caracterice a *las tautologías intuicionistas*: $\vdash_{IPC} \varphi$ si y solo si $\models_J \varphi$ (Jaśkowski). Sin embargo, la relación $\vdash_{IPC}$ no admite ni siquiera semántica matricial numerable (Wrónski).
- La lógica modal $S5$ tampoco admite semántica matricial finita (Dugundji).

- La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel). Sin embargo, puede hallarse una matriz J *numerable* que caracterice a *las tautologías intuicionistas*: $\vdash_{IPC} \varphi$ si y solo si $\models_J \varphi$ (Jaśkowski). Sin embargo, la relación $\vdash_{IPC}$ no admite ni siquiera semántica matricial numerable (Wrónski).
- La lógica modal $S5$ tampoco admite semántica matricial finita (Dugundji).
- Ninguna de las lógicas *paraconsistentes* $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de da Costa admite semántica matricial finita (Arruda).

• La lógica Intuicionista no admite semántica matricial finita (Gödel). Sin embargo, puede hallarse una matriz J *numerable* que caracterice a *las tautologías intuicionistas*: $\vdash_{IPC} \varphi$ si y solo si $\models_J \varphi$ (Jaśkowski). Sin embargo, la relación $\vdash_{IPC}$ no admite ni siquiera semántica matricial numerable (Wrónski).
• La lógica modal $S5$ tampoco admite semántica matricial finita (Dugundji).
• Ninguna de las lógicas *paraconsistentes* $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de da Costa admite semántica matricial finita (Arruda).

De hecho, buena parte de las lógicas paraconsistentes "tradicionales" tienen esa característica. Sin embargo, muchas de ellas pueden ser definidas mediante *semánticas bivaluadas*:

Definición: Una *semántica bivaluada* para $L(C)$ es un conjunto $S = \{w_i : L(C) \to \{0,1\}\}_{i \in I}$ *(con w_i no necesariamente homomórficas)*. Toda semántica S define una relación $\models_S \; \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ por: $\Gamma \models_S \varphi$ si y solo si, para toda función $w_i \in S$ tal que $w_i(\Gamma) = \{1\}$, vale que $w_i(\varphi) = 1$.

Puede probarse que $\mathcal{L} = (L(C), \models_S)$ verifica extensividad, monotonía y transitividad. Pero no necesariamente verifica estructuralidad.

Definición: Una *semántica bivaluada* para $L(C)$ es un conjunto $S = \{w_i : L(C) \to \{0,1\}\}_{i \in I}$ *(con w_i no necesariamente homomórficas)*. Toda semántica S define una relación $\models_S \; \subseteq \wp(L(C)) \times L(C)$ por: $\Gamma \models_S \varphi$ si y solo si, para toda función $w_i \in S$ tal que $w_i(\Gamma) = \{1\}$, vale que $w_i(\varphi) = 1$.

Puede probarse que $\mathcal{L} = (L(C), \models_S)$ verifica extensividad, monotonía y transitividad. Pero no necesariamente verifica estructuralidad. Aún así, muchas lógicas conocidas admiten semánticas bivaluadas. Por ejemplo, $C_1 = (L(C), \models_{C_1})$, inicialmente definida *axiomáticamente*, considerando $C = \{\neg, \vee, \&, \supset\}$, y abreviando $\varphi^\circ := \neg(\varphi \& \neg\varphi)$:

Definición: (Ver [dCA:77], [Qui:22]) Una F_1- *valuación canónica* es una función $v : L(C) \to \{0, 1\}$ verificando:

$QM1$): $v(\varphi) = 0$ implica $v(\neg\varphi) = 1$
$QM2$): $v(\neg\neg\varphi) = 1$ implica $v(\varphi) = 1$
$QM3$): $v(\psi^\circ) = v(\varphi \supset \psi) = v(\varphi \supset \neg\psi) = 1$ implica $v(\varphi) = 0$
$QM4$): $v(\varphi \supset \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$
$QM5$): $v(\varphi \& \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = v(\psi) = 1$.
$QM6$): $v(\varphi \vee \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$.
$QM7$): $v(\varphi^\circ) = v(\psi^\circ) = 1$ implica $v\left((\varphi \# \psi)^\circ\right) = 1$
(con $\# \in \{\vee, \&, \supset\}$).

Definición: (Ver [dCA:77], [Qui:22]) Una F_1- *valuación canónica* es una función $v : L(C) \to \{0, 1\}$ verificando:

$QM1)$: $v(\varphi) = 0$ implica $v(\neg\varphi) = 1$
$QM2)$: $v(\neg\neg\varphi) = 1$ implica $v(\varphi) = 1$
$QM3)$: $v(\psi^\circ) = v(\varphi \supset \psi) = v(\varphi \supset \neg\psi) = 1$ implica $v(\varphi) = 0$
$QM4)$: $v(\varphi \supset \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = 0$ o $v(\psi) = 1$
$QM5)$: $v(\varphi \& \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = v(\psi) = 1$.
$QM6)$: $v(\varphi \vee \psi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) = 1$ o $v(\psi) = 1$.
$QM7)$: $v(\varphi^\circ) = v(\psi^\circ) = 1$ implica $v\left((\varphi \# \psi)^\circ\right) = 1$
(con $\# \in \{\vee, \&, \supset\}$).
Sea $S = \{w : \text{ es } F_1\text{-valuación canónica}\}$; si se define $\models_S$, el par $(L(C), \models_S)$ es una lógica. De hecho, es la lógica C_1 de da Costa.

- Por otro lado, ciertas lógicas paraconsistentes *sí* admiten semántica matricial finita (por ejemplo, las lógicas P^n; ver [Fer:22]; [FC:03]). Y adicionalmente en ellas pueden definirse semánticas bivaluadas. De hecho, para cada lógica P^n, la definición de la familia S^n respectiva puede darse de un modo general.

De este modo, muchas lógicas admitiendo semánticas matriciales "pueden pasarse a semánticas bivaluadas" con relativa facilidad. *El problema recíproco es algo más complejo*, y se intentará analizar en las lógicas *paraconsistentes* Ciu^n:

Las lógicas paraconsistentes Ciu^n

Motivación: la idea subyacente a la definición de muchas lógicas paraconsistentes (entre ellas, la jerarquía $\{C_n\}_{1 \leq n \leq \omega}$) es la siguiente:

Las lógicas paraconsistentes Ciu^n

Motivación: la idea subyacente a la definición de muchas lógicas paraconsistentes (entre ellas, la jerarquía $\{C_n\}_{1 \leq n \leq \omega}$) es la siguiente:

• En ninguna lógica paraconsistente es válido (en general) el *principio de no contradicción*
$(\mathbf{PNC})$: $\neg(\varphi \& \neg\varphi)$,
ni el principio de trivialización
$(\mathbf{PT})$: $\varphi \& \neg\varphi \to \psi$.

• Esta idea hace que a menudo ambos principios se consideren equivalentes.

Sin embargo, en [Ciu:20], J. Ciuciura postula que la noción central de la paraconsistencia es *la no validación de* $(\mathbf{PT})$: los resultados referidos a $(\mathbf{PNC})$ son laterales (sean válidos o no). Con esta motivación, fueron presentadas las lógicas Ciu^n, *por medio de semánticas bivaluadas*:

Sin embargo, en [Ciu:20], J. Ciuciura postula que la noción central de la paraconsistencia es *la no validación de* $(\mathbf{PT})$: los resultados referidos a $(\mathbf{PNC})$ son laterales (sean válidos o no). Con esta motivación, fueron presentadas las lógicas Ciu^n, *por medio de semánticas bivaluadas*:

Definición: Fijemos el conjunto de conectivos $C = \{\neg, \rightarrow\}$. Dado $n \geq 0$, la semántica bivaluada S_n es el conjunto de funciones $w : L(C) \rightarrow 2$ que verifican:
$(\mathbf{1})$ Si $w(\neg\varphi) = 0$, entonces $w(\varphi) = 1$.
$(\mathbf{2})$ Si $w(\neg^{n+1}\varphi) = 1$, entonces $w(\neg^n(\varphi)) = 0$.
$(\mathbf{3})$ Si $w(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 1$, entonces $w(\varphi \rightarrow \psi) = 0$.
$(\mathbf{4})$ $w(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ si y solo si $w(\varphi) = 0$ o $w(\psi) = 1$.

Observaciones:

- Toda bivaluación aplicada a $\varphi \to \psi$ "actúa Booleanamente". Y lo mismo ocurre para cualquier fórmula de la forma $\neg(\varphi \to \psi)$, o $\neg^n\varphi$. Esto *no ocurre* en expresiones $\neg^k\alpha$ con $k < n$, $\alpha \in \mathcal{V}$.

Observaciones:

- Toda bivaluación aplicada a $\varphi \to \psi$ "actúa Booleanamente". Y lo mismo ocurre para cualquier fórmula de la forma $\neg(\varphi \to \psi)$, o $\neg^n\varphi$. Esto *no ocurre* en expresiones $\neg^k\alpha$ con $k < n$, $\alpha \in \mathcal{V}$.

Por ejemplo: considerando S_1, la función $w : L \to 2$ definida por:

$$w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \notin \mathcal{V} \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

(Aquí, $-$ y $\vee$ son las operaciones Booleanas usuales)

Se tiene que $w \in S_1$ (sin que w sea homomorfismo).

Por otro lado, considerando S_2, la función $w : L \to 2$ definida por:

$$w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 0 & \text{si } \varphi = \neg^2\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \neq \neg^p\theta, \\ & \theta \in \mathcal{V},\ p = 0, 1 \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

O, si consideramos:

$$w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg^2\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \neq \neg^p\theta, \\ & \theta \in \mathcal{V},\ p = 0, 1 \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

O, si consideramos:

$$w(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg^2\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \neq \neg^p\theta, \\ & \theta \in \mathcal{V},\ p = 0, 1 \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \rightarrow \theta \end{cases}$$

Se tiene que ambas posibilidades son S_2-bivaluaciones.

Definición: Para todo $n \geq 0$, se define la lógica $Ciu^n{:=}(L(C), \models_{S_n})$.

Definición: Para todo $n \geq 0$, se define la lógica Ciu^n:=$(L(C), \models_{S_n})$.

Resultado: Definiendo $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ se tiene: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \models_{Ciu^n} \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, pero en general no vale $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi) \models_{Ciu^n} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Definición: Para todo $n \geq 0$, se define la lógica $Ciu^n := (L(C), \models_{S_n})$.

Resultado: Definiendo $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ se tiene: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \models_{Ciu^n} \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, pero en general no vale $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi) \models_{Ciu^n} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

Puede probarse que Ciu^0 y Ciu^1 pueden caracterizarse matricialmente. De hecho:

- Ciu^0 es la lógica clásica CL (y es el único caso donde las bivaluaciones son siempre homomorfismos).

- Ciu^1 es la lógica paraconsistente P^1 , definida por la matriz $M_{P^1} = (\mathbf{A_{P^1}}, \models_{\mathbf{P^1}})$, teniendo como soporte a $A_{P^1} := \{F_0, T_0, T_1\}$, siendo sus operaciones definidas por:

	F_0	T_1	T_0
$\neg$	T_0	T_0	F_0

$\rightarrow$	F_0	T_1	T_0
F_0	T_0	T_0	T_0
T_1	F_0	T_0	T_0
T_0	F_0	T_0	T_0

- Ciu^1 es la lógica paraconsistente P^1 , definida por la matriz $M_{P^1} = (\mathbf{A_{P^1}}, \models_{\mathbf{P^1}})$, teniendo como soporte a $A_{P^1} := \{F_0, T_0, T_1\}$, siendo sus operaciones definidas por:

	F_0	T_1	T_0
$\neg$	T_0	T_0	F_0

$\rightarrow$	F_0	T_1	T_0
F_0	T_0	T_0	T_0
T_1	F_0	T_0	T_0
T_0	F_0	T_0	T_0

El problema a abordarse, por ende, consiste en caracterizar a Ciu^n (con $n \geq 2$) por medio de matrices finitas. Para ello tomaremos como motivación a Ciu^2, en lo que sigue.

Semántica Matricial para Ciu^2

Recordar que Ciu^2 se define por medio de la semántica bivaluada S^2 consistente en funciones $w : L(C) \to 2$ tales que:

$(\mathbf{1})$ Si $w(\neg\varphi) = 0$, entonces $w(\varphi) = 1$.
$(\mathbf{2})$ Si $w(\neg^3\varphi) = 1$, entonces $w(\neg^2(\varphi)) = 0$.
$(\mathbf{3})$ Si $w(\neg(\varphi \to \psi)) = 1$, entonces $w(\varphi \to \psi) = 0$.
$(\mathbf{4})$ $w(\varphi \to \psi) = 1$ si y solo si $w(\varphi) = 0$ o $w(\psi) = 1$.

Semántica Matricial para Ciu^2

Recordar que Ciu^2 se define por medio de la semántica bivaluada S^2 consistente en funciones $w : L(C) \longrightarrow 2$ tales que:

$(\mathbf{1})$ Si $w(\neg\varphi) = 0$, entonces $w(\varphi) = 1$.
$(\mathbf{2})$ Si $w(\neg^3\varphi) = 1$, entonces $w(\neg^2(\varphi)) = 0$.
$(\mathbf{3})$ Si $w(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 1$, entonces $w(\varphi \rightarrow \psi) = 0$.
$(\mathbf{4})$ $w(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ si y solo si $w(\varphi) = 0$ o $w(\psi) = 1$.
Un par de ejemplos standard de bivaluaciones no homomórficas son los siguientes:

$$w_1(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \notin \mathcal{V} \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

$$w_1(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \notin \mathcal{V} \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

$$w_2(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ 1 & \text{si } \varphi = \neg\neg\psi, \text{ con } \psi \in \mathcal{V} \\ -w(\psi) & \text{si } \varphi = \neg\psi, \text{ con } \psi \notin \mathcal{V} \\ -w(\psi) \vee w(\theta) & \text{si } \varphi = \psi \to \theta \end{cases}$$

Definición: Definimos la C-matriz $M_2^* := (\mathbf{A_2^*}, D_2^*)$, de soporte $A_2^* = \{T_0, T_1, T_2, F_1, F_0\}$, con $D_2^* := \{T_2, T_1, T_0\}$ y cuyas operaciones son:

	F_0	F_1	T_2	T_1	T_0
$\neg$	T_0	T_1	T_1	T_0	F_0

$\to$	F_0	F_1	T_2	T_1	T_0
F_0	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0
F_1	T_0	T_0	T_0	T_0	T_0
T_2	F_0	F_0	T_0	T_0	T_0
T_1	F_0	F_0	T_0	T_0	T_0
T_0	F_0	F_0	T_0	T_0	T_0

Proposición: Toda bivaluación $w \in S_2$ determina una M_2^*-valuación v_w tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $w(\varphi) = 1$ si y solo si $v_w(\varphi) \in \{T_0, T_1, T_2\}$.

Proposición: Toda bivaluación $w \in S_2$ determina una M_2^*-valuación v_w tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $w(\varphi) = 1$ si y solo si $v_w(\varphi) \in \{T_0, T_1, T_2\}$.

Proposición: Toda M_2^*-valuación v determina una bivaluación $w_v \in S_2$ tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $w_v(\varphi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) \in \{T_0, T_1, T_2\}$.

Proposición: Toda bivaluación $w \in S_2$ determina una M_2^*-valuación v_w tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $w(\varphi) = 1$ si y solo si $v_w(\varphi) \in \{T_0, T_1, T_2\}$.

Proposición: Toda M_2^*-valuación v determina una bivaluación $w_v \in S_2$ tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $w_v(\varphi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) \in \{T_0, T_1, T_2\}$.

Teorema: $\Gamma \models_{S_2} \varphi$ si y solo si $\Gamma \models_{M_2^*} \varphi$.

Generalización para todas las lógicas Ciu^n, $n \geq 0$

Notar que el cardinal del soporte las matrices de las lógicas Ciu^0, Ciu^1 y Ciu^2 obedecen a los primeros términos de la *sucesión de Fibonacci*. En efecto:

La sucesión standard de Fibonacci se define por: $Fb : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por:
$Fb(1) = 1$; $Fb(2) = 1$;
Para $k \geq 3$, $Fb(k) = Fb(k-1) + Fb(k-2)$

De este modo se obtiene la secuencia $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

Generalización para todas las lógicas Ciu^n, $n \geq 0$

Notar que el cardinal del soporte las matrices de las lógicas Ciu^0, Ciu^1 y Ciu^2 obedecen a los primeros términos de la *sucesión de Fibonacci*. En efecto:

La sucesión standard de Fibonacci se define por: $Fb : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por:
$Fb(1) = 1$; $Fb(2) = 1$;
Para $k \geq 3$, $Fb(k) = Fb(k-1) + Fb(k-2)$

De este modo se obtiene la secuencia $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$
Y en paralelo, recordemos que

$$|M_{Ciu^0}| = 2; \; |M_{Ciu^1}| = 3; \; |M_{Ciu^2}| = 5.$$

Esta vinculación puede explicarse considerando *expansión binaria de Fibonnacci* para $Fb(k)$ (ver [Lot:02]).

Esta vinculación puede explicarse considerando *expansión binaria de Fibonnacci* para $Fb(k)$ (ver [Lot:02]). La misma se basa en la sustitución de 0s y 1s (comenzando por la palabra 0 del alfabeto $\{1, 0\}$), definida así:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{10} \qquad\qquad \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1}$$

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$W(1)$ **0**

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$W(1)$	$\mathbf{0}$
$W(2)$	$\mathbf{1}$

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$W(1)$		$\mathbf{0}$	
$W(2)$		$\mathbf{1}$	
$W(3)$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$W(1)$			**0**	
$W(2)$			**1**	
$W(3)$		**1**		**0**
$W(4)$	**1**		**0**	**1**

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$W(1)$				**0**			
$W(2)$				**1**			
$W(3)$			**1**			**0**	
$W(4)$		**1**		**0**		**1**	
$W(5)$	**1**		**0**	**1**	**1**		**0**

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
W(1) & & & & & & \mathbf{0} & & & & & \\
W(2) & & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
W(3) & & & & \mathbf{1} & & & & & & \mathbf{0} & \\
W(4) & & & \mathbf{1} & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} & \\
W(5) & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\
W(6) & \color{red}{\mathbf{1}} & & \color{blue}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{1}} & \color{red}{\mathbf{1}} & & \color{blue}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{1}} & & \color{blue}{\mathbf{0}} & \color{red}{\mathbf{1}}
\end{array}
$$

De este modo, y comenzando con la palabra $W(1) = 0$, se tiene:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
W(1) & & & & & & \mathbf{0} & & & & & \\
W(2) & & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
W(3) & & & & \mathbf{1} & & & & & & \mathbf{0} & \\
W(4) & & & \mathbf{1} & & & \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} & \\
W(5) & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\
W(6) & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

(Notar que $Long(W(n)) = Fb(n)$)

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$W(1)$				**0**			
$W(2)$				**1**			
$W(3)$			**1**			**0**	
$W(4)$		**1**		**0**		**1**	
$W(5)$	**1**		**0**	**1**	**1**		**0**
	w_1						

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$W(1)$				**0**			
$W(2)$				**1**			
$W(3)$			**1**			**0**	
$W(4)$		**1**		**0**		**1**	
$W(5)$	**1**		**0**	**1**	**1**		**0**
			w_2				

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$W(1)$				**0**			
$W(2)$				**1**			
$W(3)$			**1**			**0**	
$W(4)$		**1**		**0**		**1**	
$W(5)$	**1**		**0**	**1**	**1**		**0**
				w_3			

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$W(1)$				**0**			
$W(2)$				**1**			
$W(3)$			**1**			**0**	
$W(4)$		**1**		**0**		**1**	
$W(5)$	**1**		**0**	**1**	**1**		**0**
					w_4		

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$W(1)$				$\mathbf{0}$			
$W(2)$				$\mathbf{1}$			
$W(3)$			$\mathbf{1}$			$\mathbf{0}$	
$W(4)$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$	
$W(5)$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$
							w_5

Por otro lado, dado $n \geq 0$, **cada rama del árbol** obtenido para la expansión de $W(n+3)$ puede ser asociada a una **bivaluación posible de** S^n. Por ejemplo, considerando S_2 (y $W(5)$):

$$
\begin{array}{lccccccc}
W(1) & & & & \mathbf{0} & & & \\
W(2) & & & & \mathbf{1} & & & \\
W(3) & & & \mathbf{1} & & & \mathbf{0} & \\
W(4) & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & \\
W(5) & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & w_5
\end{array}
$$

Estas ramas se diferencian a partir de $W(3)$, pues $W(1)$ y $W(2)$ son irrelevantes. Así, en este caso:

$W(3)$			$\mathbf{1}$			$\mathbf{0}$	
$W(4)$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$	
$W(5)$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$
	w_1		w_2	w_3	w_4		w_5

$$
\begin{array}{lccccccc}
W(3) & & & \mathbf{1} & & & \mathbf{0} & \\
W(4) & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & & \mathbf{1} & \\
W(5) & \mathbf{1} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \\
 & w_1 & & w_2 & w_3 & w_4 & & w_5
\end{array}
$$

En resumen, en este caso:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (1, 1, 1) \\
w_2 &= (1, 1, 0) \\
w_3 &= (1, 0, 1) \\
w_4 &= (0, 1, 1) \\
w_5 &= (0, 1, 0)
\end{aligned}
$$

$W(3)$			$\mathbf{1}$			$\mathbf{0}$	
$W(4)$		$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$		$\mathbf{1}$	
$W(5)$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$		$\mathbf{0}$
	w_1		w_2	w_3	w_4		w_5

En resumen, en este caso:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (1, 1, 1) \\
w_2 &= (1, 1, 0) \\
w_3 &= (1, 0, 1) \\
w_4 &= (0, 1, 1) \\
w_5 &= (0, 1, 0)
\end{aligned}
$$

Las 3-uplas de este ejemplo pueden entenderse de dos modos:

- Por un lado, indican las diferentes bivaluaciones "de base" que pueden obtenerse para una fórmula atómica: dada $\alpha \in \mathcal{V}$ debe considerarse $w(\alpha)$, $w(\neg\alpha)$ y $w(\neg^2\alpha)$ por separado *con ciertas restricciones*.

- Por un lado, indican las diferentes bivaluaciones “de base” que pueden obtenerse para una fórmula atómica: dada $\alpha \in \mathcal{V}$ debe considerarse $w(\alpha)$, $w(\neg\alpha)$ y $w(\neg^2\alpha)$ por separado *con ciertas restricciones*.

- Con esto en mente, cada bivaluación específica codifica la pertenencia/no pertenencia de $w(\neg^k\alpha)$, $k = 0, 1, 2$ al conjunto de valores disitinguidos D_2^*:

En efecto, Y recordando la tabla de verdad para M_2^*, se tiene:

$T_2 \in D_2^*$; $\neg T_2 = T_1 \in D_2^*$; $\neg\neg T_2 = T_0 \in D_2^*$. Luego,

$T_2 \longrightarrow (1,1,1) = w_1$

En efecto, Y recordando la tabla de verdad para M_2^*, se tiene:

$T_2 \in D_2^*$; $\neg T_2 = T_1 \in D_2^*$; $\neg\neg T_2 = T_0 \in D_2^*$. Luego,

$T_2 \longrightarrow (1, 1, 1) = w_1$

$T_1 \in D_2^*$; $\neg T_1 = T_0 \in D_2^*$; $\neg\neg T_1 = F_0 \notin D_2^*$. Luego,

$T_1 \longrightarrow (1, 1, 0) = w_2$.

En efecto, Y recordando la tabla de verdad para M_2^*, se tiene:

$T_2 \in D_2^*$; $\neg T_2 = T_1 \in D_2^*$; $\neg\neg T_2 = T_0 \in D_2^*$. Luego,

$T_2 \longrightarrow (1, 1, 1) = w_1$

$T_1 \in D_2^*$; $\neg T_1 = T_0 \in D_2^*$; $\neg\neg T_1 = F_0 \notin D_2^*$. Luego,

$T_1 \longrightarrow (1, 1, 0) = w_2$. Similarmente,

$T_0 \longrightarrow (1, 0, 1) = w_3$
$F_1 \longrightarrow (0, 1, 1) = w_4$
$F_0 \longrightarrow (0, 1, 0) = w_5$

Observaciones:

- En Ciu^1 (E.d. P^1) y en Ciu^0 (E.d. CL) la situación es similar, utilizando 2-uplas y "1-uplas", respectivamente.

- Esta codificación de los valores de verdad utilizados responde a cierta técnica habitual (ver [Ram:Fer:09], [Fer:Muc:18], en el contexto de Estructuras Discriminantes).

- Con esta motivación se podrá demostrar (a partir de los siguientes resultados técnicos) que todas las lógicas Ciu^n admiten semántica matricial, y que el cardinal de cada matriz respectiva se corresponde con la sucesión de Fibonacci:

Definición: Para $n \geq 0$, la matriz $M_n^* := (\mathbf{A_n^*}, D_n^*)$, de soporte A_n^*, se define recursivamente por:

- $A_0^* = \{0, 1\}$ $(= 2)$.
- Conociendo A_n^*, se define A_{n+1}^* del siguiente modo:

$A_{n+1}^* = \{\vec{x} \in 2^{n+2} : \vec{x} \text{ verifica } \diamond\}$

Condición $\diamond$:
Dado $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\vec{x}$ verifica $\diamond$ si y solo si:

(a) $(x_0, \ldots, x_n) \in A_n^*$
(b) Si $x_n = 0$, entonces $x_{n+1} = 1$
(No hay restricciones para x_{n+1} si $x_n = 1$).

Definición: Para $n \geq 0$, la matriz $M_n^* := (\mathbf{A_n^*}, D_n^*)$, de soporte A_n^*, se define recursivamente por:

- $A_0^* = \{0, 1\}$ (= 2).
- Conociendo A_n^*, se define A_{n+1}^* del siguiente modo:

$A_{n+1}^* = \{\vec{x} \in 2^{n+2} : \vec{x} \text{ verifica } \diamond\}$

Condición $\diamond$:
Dado $\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\vec{x}$ verifica $\diamond$ si y solo si:

(a) $(x_0, \ldots, x_n) \in A_n^*$
(b) Si $x_n = 0$, entonces $x_{n+1} = 1$
(No hay restricciones para x_{n+1} si $x_n = 1$).

- Además, para todo $n \geq 0$, $D_n^* = \{\vec{x} \in A_n^* : x_1 = 1\}$.

Ejemplos:

Si $n = 0$, $A_0^* = \{0, 1\}$; $D_0^* = \{1\}$.

Si $n = 1$, $A_1^* = \{(0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$, $D_1^* = \{(1, 0); (1, 1)\}$.

Ejemplos:

Si $n = 0$, $A_0^* = \{0, 1\}$; $D_0^* = \{1\}$.

Si $n = 1$, $A_1^* = \{(0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$, $D_1^* = \{(1, 0); (1, 1)\}$.

Si $n = 2$, $A_2^* = \{(0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$,
$D_1^* = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$.

Si $n = 3$, $A_3^* = \{(0, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0); , (0, 1, 1, 1); (1, 0, 1, 0);$
$(1, 0, 1, 1); (1, 1, 0, 1); (1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1)\}$
$D_3^* = \{(1, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 1); (1, 1, 0, 1); (1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1)\}$.

Ejemplos:

Si $n = 0$, $A_0^* = \{0, 1\}$; $D_0^* = \{1\}$.

Si $n = 1$, $A_1^* = \{(0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$, $D_1^* = \{(1, 0); (1, 1)\}$.

Si $n = 2$, $A_2^* = \{(0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$,
$D_1^* = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$.

Si $n = 3$, $A_3^* = \{(0, 1, 0, 1); (0, 1, 1, 0); , (0, 1, 1, 1); (1, 0, 1, 0);$
$(1, 0, 1, 1); (1, 1, 0, 1); (1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1)\}$
$D_3^* = \{(1, 0, 1, 0); (1, 0, 1, 1); (1, 1, 0, 1); (1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1)\}$.

Proposición: para todo $n \geq 0$, $|A_n^*| = Fb(n + 3)$;
$|D_n^*| = Fb(n + 2)$.

Por otro lado, en la matriz las operaciones del álgebra $\mathbf{A_n^*}$ están definidas por:
(Usando $T_0 = (1,0,1,0,\dots)$; $F_0 = (0,1,0,1,\dots) \in A_n^*$)

Si $\vec{x_i}$, $\vec{x_j} \in A_n^*$, entonces

$$\vec{x_i} \rightarrow \vec{x_j} := \begin{cases} T_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 1 \\ F_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, en la matriz las operaciones del álgebra $\mathbf{A_n^*}$ están definidas por:
(Usando $T_0 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$; $F_0 = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in A_n^*$)

Si $\vec{x_i}$, $\vec{x_j} \in A_n^*$, entonces

$$\vec{x_i} \to \vec{x_j} := \begin{cases} T_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 1 \\ F_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 0 \end{cases}$$

Además, para todo $\vec{x} \in A_n^*$, $\neg(\vec{x}) := (x_1, \ldots, x_n, -x_n)$

Por otro lado, en la matriz las operaciones del álgebra $\mathbf{A_n^*}$ están definidas por:
(Usando $T_0 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$; $F_0 = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in A_n^*$)

Si $\vec{x_i}$, $\vec{x_j} \in A_n^*$, entonces

$$\vec{x_i} \rightarrow \vec{x_j} := \begin{cases} T_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 1 \\ F_0 & \text{si } -x_0^i \vee x_0^j = 0 \end{cases}$$

Además, para todo $\vec{x} \in A_n^*$, $\neg(\vec{x}) := (x_1, \ldots, x_n, -x_n)$

(Aquí, $-$ y $\vee$ son las usuales operaciones booleanas en $\mathbf{2}$).

Proposición: Para toda bivaluación de S_n $w : L \to \{0,1\}$, existe una M_n^*-valuación v_w tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $v_w(\varphi) \in D_n^*$ si y solo si $v(\varphi) = 1$.

Demostración: (Sketch): para toda $\alpha \in \mathcal{V}$ se define $v_w(\alpha) := (w(\alpha), w(\neg\alpha), \ldots, w(\neg^n\alpha))$, y se extiende v_w homomórficamente. Y el resultado se demuestra por inducción en la complejidad de $\varphi \in L(C)$

Proposición: Para toda bivaluación de S_n $w : L \to \{0, 1\}$, existe una M_n^*-valuación v_w tal que, para todo $\varphi \in L(C)$, $v_w(\varphi) \in D_n^*$ si y solo si $v(\varphi) = 1$.

Demostración: (Sketch): para toda $\alpha \in \mathcal{V}$ se define $v_w(\alpha)$:= $(w(\alpha), w(\neg\alpha), \ldots, w(\neg^n\alpha))$, y se extiende v_w homomórficamente. Y el resultado se demuestra por inducción en la complejidad de $\varphi \in L(C)$

Similarmente:

Proposición: Sea $n \geq 0$. Para toda M_n^*-valuación $v : L \to A_n^*$ existe una bivaluación w_v de S_n tal que, para todo $\varphi \in L$, $w_v(\varphi)$ $= 1$ si y solo si $v(\varphi) \in D_n$.

Demostración: (Sketch): para toda $\alpha \in \mathcal{V}$, $0 \leq k \leq n$ se define

$$w_v(\neg^k \alpha) := \begin{cases} 1 & \text{si } v(\neg^k \alpha) \in D_n^* \\ 0 & \text{si } v(\neg^k \alpha) \notin D_n^* \end{cases}$$

Demostración: (Sketch): para toda $\alpha \in \mathcal{V}$, $0 \leq k \leq n$ se define

$$w_v(\neg^k\alpha) := \begin{cases} 1 & \text{si } v(\neg^k\alpha) \in D_n^* \\ 0 & \text{si } v(\neg^k\alpha) \notin D_n^* \end{cases}$$

(Y, para el resto de fórmulas $\varphi \in L(C)$ se extiende homomórfimamente w_v, utilizando la información previa). Puede probarse que $w_v \in S_n$ y que $w_v(\varphi) = 1$ si y solo si $v(\varphi) \in D_n^*$.

Teorema: Para todo $n \geq 0$, $\Gamma \models_{Ciu^n} \varphi$ si y solo si $\Gamma \models_{M_n^*} \varphi$.

(Es decir, toda lógica C_n admite representación matricial finita).

Teorema: Para todo $n \geq 0$, $\Gamma \models_{Ciu^n} \varphi$ si y solo si $\Gamma \models_{M_n^*} \varphi$.

(Es decir, toda lógica C_n admite representación matricial finita).

Observación:
• No es habitual que el crecimiento de valores de verdad (según n) se corresponda con sucesiones de tipo Fibonacci (usualmente, el mismo es lineal en relación a n)

Trabajo Futuro:

- En la medida en que las lógicas Ciu^n admiten semántica matricial pueden intentarse demostraciones de completitud alternativas (por ejemplo, con la técnica de Kalmár).

Trabajo Futuro:

• En la medida en que las lógicas Ciu^n admiten semántica matricial pueden intentarse demostraciones de completitud alternativas (por ejemplo, con la técnica de Kalmár).

• Dado que Ciu^0 $(= CL)$ y Ciu^1 $(= P^1)$ son *algebrizables*, estudiar la algebrizabilidad de Ciu^n, en general.

Trabajo Futuro:

• En la medida en que las lógicas Ciu^n admiten semántica matricial pueden intentarse demostraciones de completitud alternativas (por ejemplo, con la técnica de Kalmár).

• Dado que Ciu^0 $(= CL)$ y Ciu^1 $(= P^1)$ son *algebrizables*, estudiar la algebrizabilidad de Ciu^n, en general.

• Por otro lado, este estudio puede realizarse en las lógicas Ciu^{*n} (también definidas en [Ciu:20]). Conjetura (de momento): estas lógicas *no admiten semántica matricial finita*.

Algunas Referencias

Bibliografía sobre las Lógicas C^n.

[Arr:75] A. Arruda. Remarques sur les systèmes C_n. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, Séries A-B, 280: 1253–1256, 1975.

[Ciu:20] J. Ciuciura. Sette's Calculus P^1 and some hierarchies of Paraconsistent systems. *Journal of Logic and Computation*, 30: 1109–1124, 2020.

[daC:74] N. da Costa. On the Theory of Inconsistent Formal Systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic* (15). Págs: 497-510, 1974.

[Fer:22] V. Fernández. A Kalmár-style completeness Proof for the logics of the Hierarchy I^nP^k. Submitted (preliminar version in ArXiv: 1812.00983v1), 2022.

[Qui:22] V. Quiroga. *Estudio de un Modelo Algebraico - Relacional para C_1 y $CILA$. La Semántica de F_1-estructuras*. Tesis Doctoral; UNSL, 2022.

[Set:73] A. Sette. On the Propositional Calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, 18 (13): 173–180, 1973.

Bibliografía sobre Semánticas no Matriciales

[FC:03] V. Fernández; M. Coniglio.Combining Valuations with Society Semantics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 13(1): 21–46, 2003.

[FM:18] V. Fernández; C. Murciano. Discriminant Structures Associated to Matrix Semantics. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 52(2): 185 - 209, 2018 .

[RF:09] F. Ramos; V. Fernández. Twist-structures Semantics for the Logics of the Hierarchy I^nP^k. *Journal of Applied Non - Classical Logics*, 19(2): 183 - 209, 2009.

Bibliografía General

[Cze:01] J. Czelakowski. *Protoalgebraic Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[Fon:16] J. M. Font. *Abstract Algebraic Logic: an Introductory Textbook*. College Publications, London, 2016.

[Lot:02] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

¡MUCHAS GRACIAS!