El Problema Matricial de Bochner

Ignacio Nicolás Bono Parisi

Inés Pacharoni

UMA Neuquén 2022

23 de Septiembre, 2022

Preliminares

- Un peso matricial de tamaño N con soporte en un intervalo real (a, b), es una función $W : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{C})$ Hermitiana definida positiva para casi todo punto en (a, b), se anula fuera de (a, b), y $\int_{\mathbb{R}} x^n W(x) dx < \infty$.
- Dados $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$, se asocia al peso el producto interno

$$\langle P, Q \rangle_W = \langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x) W(x) Q(x)^* dx.$$

- Con este producto interno se construye una única sucesión de polinomios mónicos ortogonales $\{P(x, n)\}$

Preliminares

Dado un operador diferencial $\mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j$ y un polinomio matricial $Q(x)$ tenemos que

$$Q(x) \cdot \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j (Q(x)) F_j(x).$$

- Introducimos el álgebra $\mathcal{D}(W)$ asociada al peso W

$$\mathcal{D}(W) = \left\{ \mathfrak{D} = \sum_{j=0}^{m} \partial^j F_j \text{ tales que } P(x,n) \cdot \mathfrak{D} = \Lambda_n P(x,n) \right\}.$$

Problema de Bochner

Tenemos entonces W peso de tamaño $N \times N$,

$$W \to \langle \quad , \quad \rangle_W \to P(x,n) \to \mathcal{D}(W).$$

El Problema de Bochner: ¿Qué pesos W cumplen que su álgebra $\mathcal{D}(W)$ contiene algún operador de segundo orden $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2 + \partial F_1 + F_0$?.

$$P''(x,n)F_2 + P'(x,n)F_1 + P(x,n)F_0 = \Lambda_n P(x,n)$$

Solución:
$N = 1$, resuelto por el mismo Bochner.
$N > 1$, *resuelto* por R. Casper y M. Yakimov.

Problema de Bochner

Para pesos de tamaño $N = 1$ (caso escalar). Salvo cambio de variable afín estas son las tres familias de soluciones.

- **Hermite :**

$$w(x) = e^{-x^2}, \quad \mathfrak{d} = \partial^2 + \partial(-2x)$$

- **Laguerre :**

$$w(x) = x^\alpha e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x), \quad \mathfrak{d} = \partial^2 x + \partial(\alpha + 1 - x), \, \alpha > -1$$

- **Jacobi :**

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta 1_{(-1,1)}(x)$$

$$\mathfrak{d} = \partial^2(1-x^2) + \partial(\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x), \, \alpha, \beta > -1,$$

Problema Matricial de Bochner

Para el caso $N > 1$, necesitaremos antes introducir las siguientes definiciones.

- Álgebra completa.
- Transformación Biespectral no conmutativa de Darboux.

Problema Matricial de Bochner

Definición: Dado un peso W de tamaño $N \times N$, decimos que su álgebra asociada $\mathcal{D}(W)$ es un **álgebra completa** si existen $D_1, \dots, D_N \in \mathcal{D}(W)$ no nulos tal que $D_1 + \cdots + D_N$ es un elemento regular del centro, y $D_i D_j = 0$, para $i \neq j$.

Problema Matricial de Bochner

Definición: Dados dos pesos W, $\widetilde{W}$, decimos que $\widetilde{W}$ es una **transformación biespectral no conmutativa de Darboux** de W si existe un operador diferencial $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ que puede factorizarse como $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$ y cumple

- $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ está en $\mathcal{D}(\widetilde{W})$.
- $P(x, n) \cdot \mathfrak{v}$ es una sucesión de polinomios ortogonales para el peso $\widetilde{W}$. (siendo $P(x, n)$ la sucesión ortogonal de mónicos de W)

Problema Matricial de Bochner

Ahora sí... Para $N > 1$

Teorema de clasificación (Casper y Yakimov): Sea W un peso $N \times N$ tal que $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2 + \partial F_1 + F_0 \in \mathcal{D}(W)$ con $F_2 W$ hermitiana definida positiva y tal que $\mathcal{D}(W)$ es completa.
Entonces W es una transformación de Darboux de un peso $\operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_N)$, donde w_i es un peso escalar clásico para todo i. Más aún, $W(x) = T(x) \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_N) T(x)^*$ para alguna $T(x)$ racional.
Recíprocamente, si W es una transformación de Darboux de una suma directa de pesos escalares clásicos, entonces $\mathcal{D}(W)$ es completa.

Problema Matricial de Bochner

Ejemplo:

$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}$$

es solución al problema de Bochner.
$\widetilde{\mathfrak{D}} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{a^2} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(W)$.
Además $\mathcal{D}(W)$ contiene dos operadores D_1, D_2 de orden 4 con autovalores $\Lambda_n(D_1) = \begin{pmatrix} \lambda(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda_n(D_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(n) \end{pmatrix}$.

$$\lambda(n) = -\frac{a^4n^2 + a^4n + 4a^2n + 2a^2 + 4}{2a^3}$$

Problema Matricial de Bochner

Luego se tiene que $\Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2) = 0 = \Lambda_n(D_2)\Lambda_n(D_1)$, y $\Lambda_n(D_1) + \Lambda_n(D_2) = \lambda(n)I$.

Así D_1, D_2 forma un sistema ortogonal de $\mathcal{D}(W)$, luego el álgebra será completa y W será transformación biespectral de Darboux de una diagonal de pesos clásicos.
En este caso de pesos de una diagonal de pesos de Hermite, $e^{-x^2}I$.
Veamos el Darboux explícitamente.

Tomamos $\mathfrak{D} = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{a^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(e^{-x^2} I)$.
Factorizamos este operador como $\mathfrak{D} = \mathfrak{v}\mathfrak{n}$.

$$\mathfrak{v} = \partial \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -ax \end{pmatrix} - \frac{2}{a} I,$$
$$\mathfrak{n} = \partial \begin{pmatrix} -ax & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a} \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{n}\mathfrak{v}$ y $P(x, n) \cdot \mathfrak{v}$ es una sucesión de polinomios ortogonales de W. Además
$W = \begin{pmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*.$

Problema Matricial de Bochner

¿Qué estamos perdiendo asumiendo estas hipótesis 'naturales' en la clasificación?.

Veamos la siguiente solución al Problema Matricial de Bochner.

Consideremos el peso matricial

$$W(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} e^{2bx} + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el álgebra $\mathcal{D}(W)$ admite el siguiente operador diferencial de orden 2

$$D = \partial^2 I + \partial \begin{pmatrix} -2x + 2b & -2abx + 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema Matricial de Bochner

Teorema

El álgebra asociada a W es un álgebra polinomial sobre D, es decir, $\mathcal{D}(W) = \mathbb{C}[D]$.

Como corolario, el álgebra $\mathcal{D}(W)$ no es completa, pues no existen dos operadores no nulos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(W) = \mathbb{C}[D]$ tales que $D_1 D_2 = 0$.
Luego W no es transformación biespectral no conmutativa de Darboux de una diagonal de pesos escalares clásicos.
Sin embargo, sí puede factorizarse el peso de la siguiente manera

$$W(x) = \begin{pmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x^2+2bx} & 0 \\ 0 & e^{-x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* .$$

Está estrechamente relacionado con la diagonal de pesos clásicos de Hermite $\operatorname{diag}(e^{-x^2+2bx}, e^{-x^2})$ pero no podrán ser transformación biespectral no conmutativa de Darboux.

¿Será este un ejemplo patológico?¿O habrá que relajar las hipótesis para que esta solución pueda entrar dentro de la clasificación?.

Muchas gracias por escuchar

:)