Dominación italiana en grafos caterpillar

Lara Fernández*, Valeria Leoni
FCEIA, UNR - CONICET

UMA - Septiembre 2022

Motivación

Problema de dominación romana [Stewart, 1999][Cockayne et al., 2004]

Asignar a lo sumo dos tropas a una localidad. Si a una localidad no se le asigna, debe ser vecina de una localidad a la cual se hayan asignado dos.

Motivación

Problema de dominación romana [Stewart, 1999][Cockayne et al., 2004]

Asignar a lo sumo dos tropas a una localidad. Si a una localidad no se le asigna, debe ser vecina de una localidad a la cual se hayan asignado dos.

Motivación

Problema de dominación romana [Stewart, 1999][Cockayne et al., 2004]

Asignar a lo sumo dos tropas a una localidad. Si a una localidad no se le asigna, debe ser vecina de una localidad a la cual se hayan asignado dos.

Problema de dominación italiana [Chellali et al., 2016]

Asignar a lo sumo dos tropas a una localidad. Si a una localidad no se le asigna, debe tener al menos dos legiones asignadas a poblados vecinos.

Definiciones

Función italiana dominante (FID)

$f : V \to \{0,1,2\}$ tal que para todo $u \in V$ con $f(u) = 0$ verifique

$$\sum_{x \in N(u)} f(x) \geq 2.$$

$\gamma_I(G)$: $\min_f \{\sum_{v \in V} f(u) : f \text{ FID}\}$

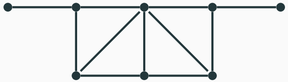
Definiciones

Función italiana dominante (FID)

$f : V \to \{0,1,2\}$ tal que para todo $u \in V$ con $f(u) = 0$ verifique

$$\sum_{x \in N(u)} f(x) \geq 2.$$

$\gamma_I(G)$: $\min_f \{ \sum_{v \in V} f(u) : f \text{ FID}\}$



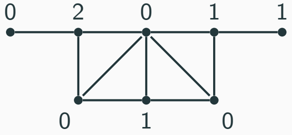
Definiciones

Función italiana dominante (FID)

$f : V \to \{0,1,2\}$ tal que para todo $u \in V$ con $f(u) = 0$ verifique

$$\sum_{x \in N(u)} f(x) \geq 2.$$

$\gamma_I(G)$: $\min_f \{ \sum_{v \in V} f(u) : f \ \text{ FID}\}$



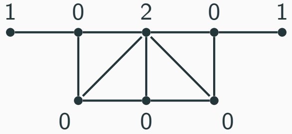
Definiciones

Función italiana dominante (FID)

$f : V \to \{0,1,2\}$ tal que para todo $u \in V$ con $f(u) = 0$ verifique

$$\sum_{x \in N(u)} f(x) \geq 2.$$

$\gamma_I(G)$: $\min_f \{ \sum_{v \in V} f(u) : f \;\; \text{FID} \}$



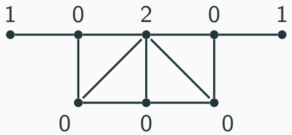
Definiciones

Función italiana dominante (FID)

$f : V \to \{0, 1, 2\}$ tal que para todo $u \in V$ con $f(u) = 0$ verifique

$$\sum_{x \in N(u)} f(x) \geq 2.$$

$\gamma_I(G)$: $\min_f \{ \sum_{v \in V} f(u) : f \text{ FID}\}$



Problema de dominación italiana (PDI)

Instancia: Un grafo G, $j \in \mathbb{N}$.

Pregunta: ¿Existe una FID de peso a lo sumo j?

Resultados previos

$\gamma(G)$: mínimo cardinal de un conjunto dominante.

Resultados previos

$\gamma(G)$: mínimo cardinal de un conjunto dominante.

[Chellali et al., 2016]

- $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq 2\gamma(G)$.
- $\gamma_I(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ y $\gamma_I(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
- $\frac{\gamma_R(T)}{\gamma_I(T)} \leq 4/3$, T árbol, $\gamma_R(T)$ número de dominación romana.

Resultados previos

$\gamma(G)$: mínimo cardinal de un conjunto dominante.

[Chellali et al., 2016]

- $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq 2\gamma(G)$.
- $\gamma_I(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ y $\gamma_I(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
- $\frac{\gamma_R(T)}{\gamma_I(T)} \leq 4/3$, T árbol, $\gamma_R(T)$ número de dominación romana.

[Henning and Klostermeyer, 2017]

- Se caracterizan los árboles T tales que $\gamma(T) + 1 = \gamma_I(T)$.

Resultados previos

$\gamma(G)$: mínimo cardinal de un conjunto dominante.

[Chellali et al., 2016]

- $\gamma(G) \leq \gamma_I(G) \leq 2\gamma(G)$.
- $\gamma_I(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ y $\gamma_I(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
- $\frac{\gamma_R(T)}{\gamma_I(T)} \leq 4/3$, T árbol, $\gamma_R(T)$ número de dominación romana.

[Henning and Klostermeyer, 2017]

- Se caracterizan los árboles T tales que $\gamma(T) + 1 = \gamma_I(T)$.

[Klostermeyer and MacGillivray, 2019]

- G conexo, entonces $\gamma_I(G) \leq \frac{3n}{4}$.
- Caracterizan los árboles T tales que $\gamma_I(T) = 2\gamma(T)$.

Definiciones

Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.

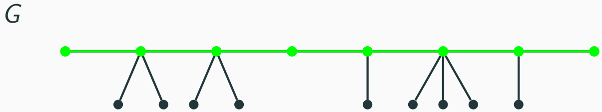
Definiciones

Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.

G

Definiciones

Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.



Definiciones

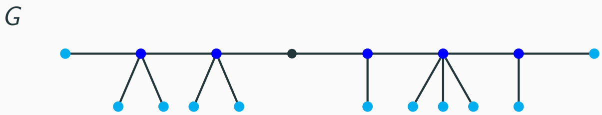
Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.

En un caterpillar G, decimos que $v \in V$ es **padre** si $d(v) \geq 3$. Llamamos a $x \in N(v)$ un **hijo de** v si x es una hoja de G.

Definiciones

Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.

En un caterpillar G, decimos que $v \in V$ es **padre** si $d(v) \geq 3$. Llamamos a $x \in N(v)$ un **hijo de** v si x es una hoja de G.



Definiciones

Dado un árbol G, decimos que G es un **caterpillar** si existe un camino (**camino principal**) tal que toda arista tiene al menos un vértice en el camino.

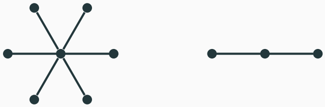
En un caterpillar G, decimos que $v \in V$ es **padre** si $d(v) \geq 3$. Llamamos a $x \in N(v)$ un **hijo de** v si x es una hoja de G.

Llamamos F_1,F_2,$F_{>2}$ a los conjuntos de padres con uno, dos, o más de dos hijos respectivamente.

Primeros resultados

Lema

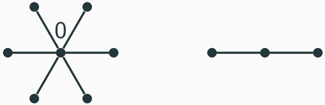
Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Primeros resultados

Lema

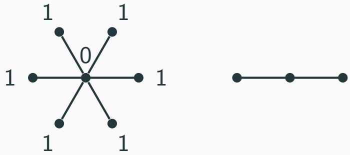
Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Primeros resultados

Lema

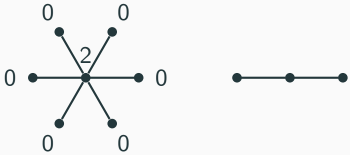
Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Primeros resultados

Lema

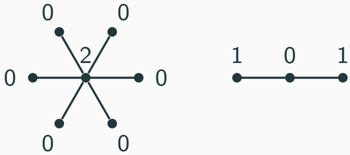
Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Primeros resultados

Lema

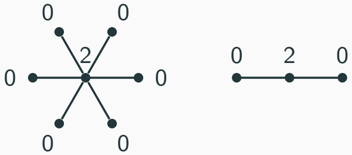
Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Primeros resultados

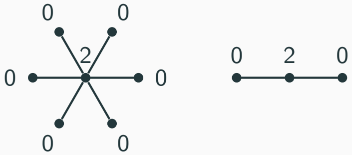
Lema

Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Lema

Sea G un caterpillar, $\gamma_I(G) = 2$ si y sólo si G es una estrella.



Comentario: Cuando tengo un vértice con muchos pendientes (padre con muchos hijos), lo óptimo es asignarle 2 y 0 a los pendientes.

Primer reducción

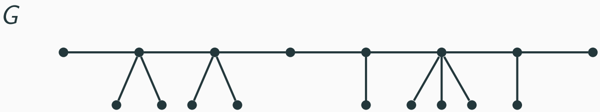
Teorema

Existe una transformación que reduce en tiempo lineal el problema PDI *en grafos caterpillar al problema* PDI *en grafos caterpillar con* $F_{>2} = \emptyset$.

Primer reducción

Teorema

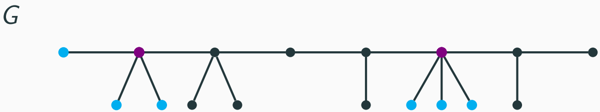
Existe una transformación que reduce en tiempo lineal el problema PDI *en grafos caterpillar al problema* PDI *en grafos caterpillar con* $F_{>2} = \emptyset$.



Primer reducción

Teorema

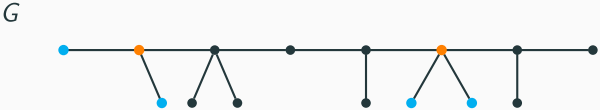
Existe una transformación que reduce en tiempo lineal el problema PDI *en grafos caterpillar al problema* PDI *en grafos caterpillar con* $F_{>2} = \emptyset$.



Primer reducción

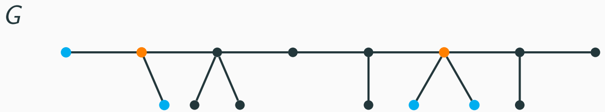
Teorema

Existe una transformación que reduce en tiempo lineal el problema PDI *en grafos caterpillar al problema* PDI *en grafos caterpillar con* $F_{>2} = \emptyset$.



Teorema

Existe una transformación que reduce en tiempo lineal el problema PDI *en grafos caterpillar al problema* PDI *en grafos caterpillar con* $F_{>2} = \emptyset$.



En adelante consideramos instancias con $F_{>2} = \emptyset$ y por ende $\Delta \leq 4$.

Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

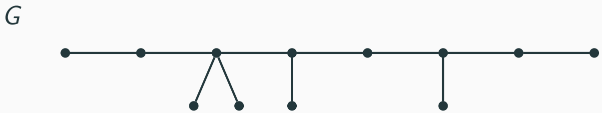
$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$

Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$

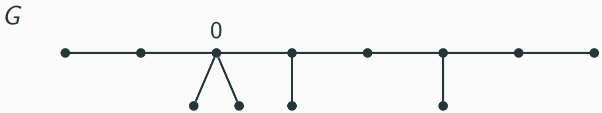


Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$

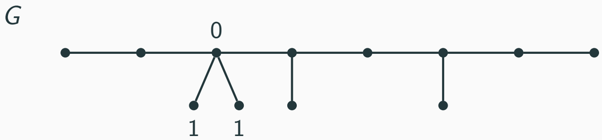


Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$



Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

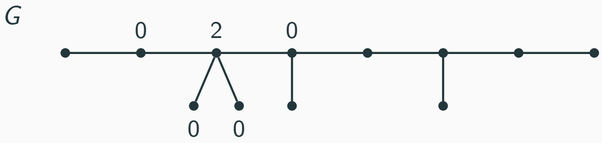
$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$

Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$

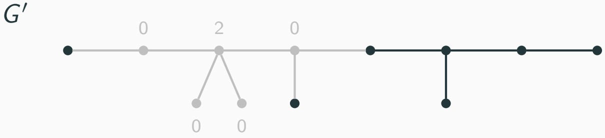


Padres con dos hijos

Lema

Sea G caterpillar con $F_2 = \{v\}$ y sea $G' = G \setminus N[v]$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2.$$



Padres con dos hijos

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2|F_2|$$

donde $G' = G \setminus \bigcup_{v \in F_2} N[v]$.

Padres con dos hijos

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2|F_2|$$

donde $G' = G \setminus \bigcup_{v \in F_2} N[v]$.

Idea: Existe una FID óptima tal que $f(v) = 2$ para todo $v \in F_2$ y $f(u) = 0$ para todo $u \in N(v)$ con $v \in F_2$ y tal que $u \notin F_2$.

Padres con dos hijos

Proposición

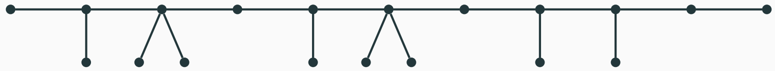
Sea G un caterpillar con $F_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2|F_2|$$

donde $G' = G \setminus \bigcup_{v \in F_2} N[v]$.

Idea: Existe una FID óptima tal que $f(v) = 2$ para todo $v \in F_2$ y $f(u) = 0$ para todo $u \in N(v)$ con $v \in F_2$ y tal que $u \notin F_2$.

G



Padres con dos hijos

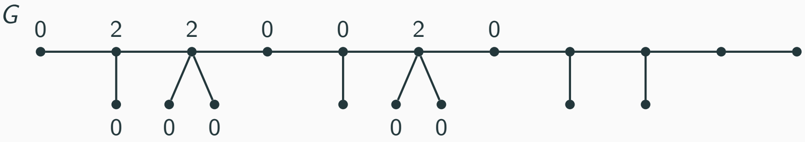
Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2|F_2|$$

donde $G' = G \setminus \bigcup_{v \in F_2} N[v]$.

Idea: Existe una FID óptima tal que $f(v) = 2$ para todo $v \in F_2$ y $f(u) = 0$ para todo $u \in N(v)$ con $v \in F_2$ y tal que $u \notin F_2$.



Padres con dos hijos

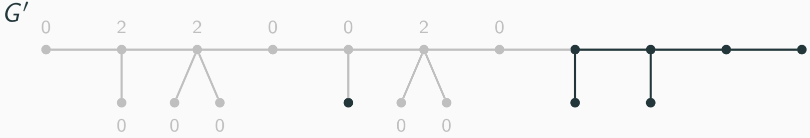
Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \gamma_I(G') + 2|F_2|$$

donde $G' = G \setminus \bigcup_{v \in F_2} N[v]$.

Idea: Existe una FID óptima tal que $f(v) = 2$ para todo $v \in F_2$ y $f(u) = 0$ para todo $u \in N(v)$ con $v \in F_2$ y tal que $u \notin F_2$.



Hijos únicos

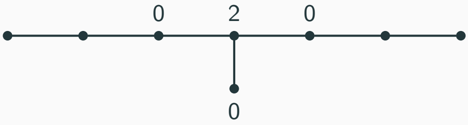
Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.

Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.

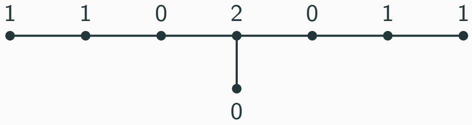
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



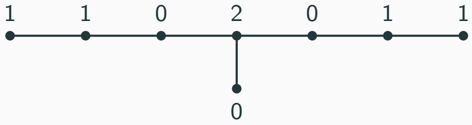
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Hijos únicos

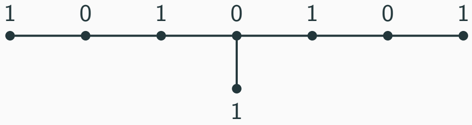
Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Esta asignación no es óptima.

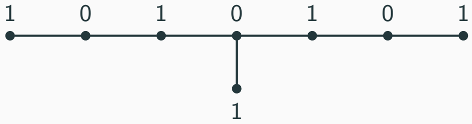
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Hijos únicos

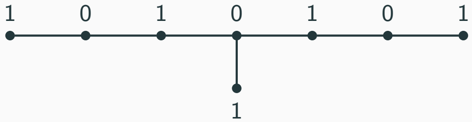
Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 5$.

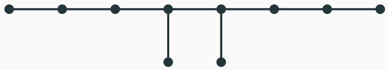
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



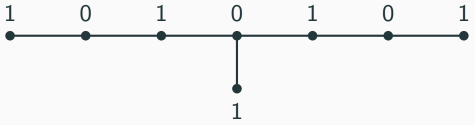
Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 5$.

Ejemplo: Optimizar el camino principal y asignar 1 a cada hijo.



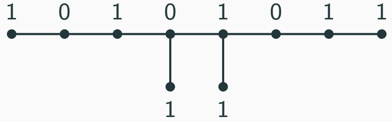
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



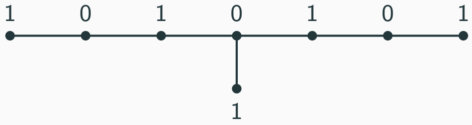
Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 5$.

Ejemplo: Optimizar el camino principal y asignar 1 a cada hijo.



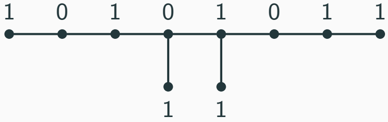
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 5$.

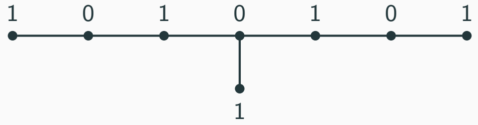
Ejemplo: Optimizar el camino principal y asignar 1 a cada hijo.



Esta asignación no es óptima.

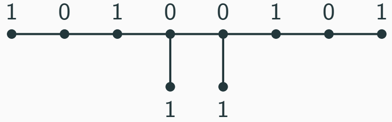
Hijos únicos

Ejemplo: Caterpillar con $F_2 = \emptyset$ y $|F_1| = 1$.



Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 5$.

Ejemplo: Optimizar el camino principal y asignar 1 a cada hijo.



Esta asignación es óptima y $\gamma_I(G) = 6$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

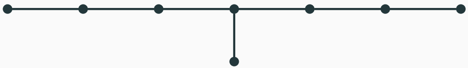
$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

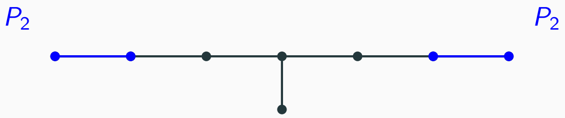


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_l(G) = \begin{cases} \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

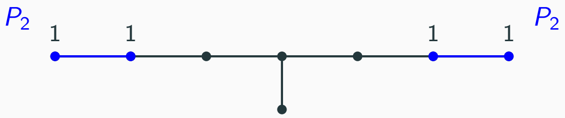


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_l(G) = \begin{cases} \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

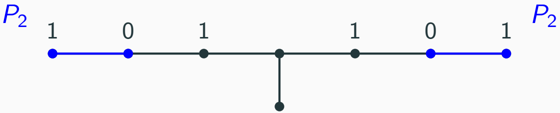


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

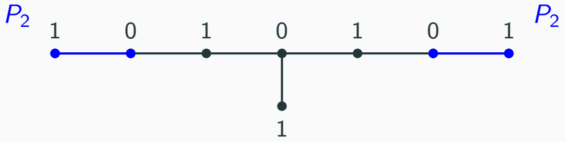


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$



$$\gamma_I(G) = 2 + 2 + 1 = 5$$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

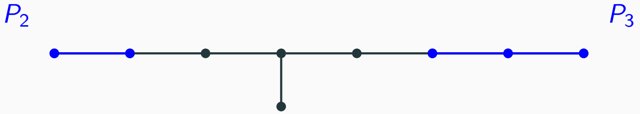
$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

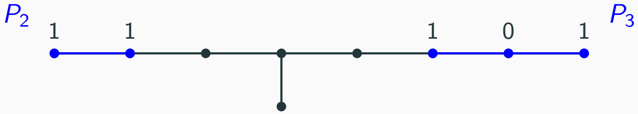


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

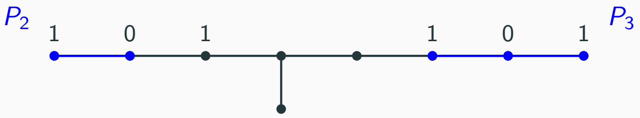


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

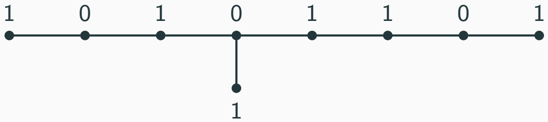


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



$$\gamma_I(G) = 2 + 2 + 2 = 6$$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

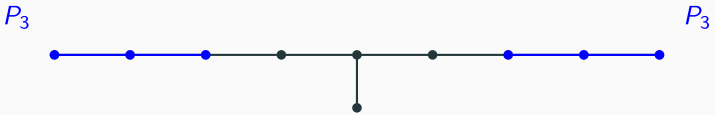
$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_l(G) = \begin{cases} \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 1 & \textit{si } m, l \textit{ son ambos pares.} \\ \gamma_l(P_m) + \gamma_l(P_l) + 2 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

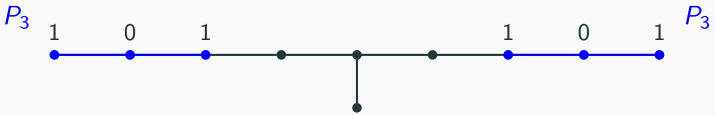


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

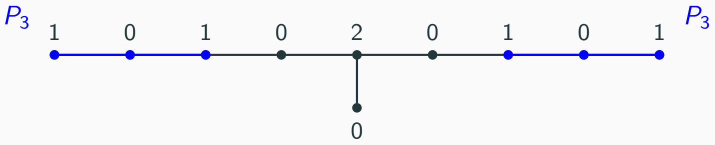


Único hijo

Proposición

Sea G un caterpillar con $F_2 = \emptyset$, $F_1 = \{v\}$ y tal que $G \setminus N[v] = P_m \cup P_l$. Entonces

$$\gamma_I(G) = \begin{cases} \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 1 & \text{si } m, l \text{ son ambos pares.} \\ \gamma_I(P_m) + \gamma_I(P_l) + 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



$$\gamma_I(G) = 2 + 2 + 2 = 6$$

Cotas existentes

Teorema ([Klostermeyer and MacGillivray, 2019])

Para todo grafo conexo con $n \geq 3$ vértices,

$$\gamma_I(G) \leq \frac{3n}{4}.$$

Cotas existentes

Teorema ([Klostermeyer and MacGillivray, 2019])

Para todo grafo conexo con $n \geq 3$ *vértices,*

$$\gamma_I(G) \leq \frac{3n}{4}.$$

Teorema ([Chellali et al., 2016])

Si G *es un grafo conexo de orden* n *y grado máximo* Δ*, entonces*

$$\gamma_I(G) \geq 2n/(\Delta + 2).$$

Cotas existentes

Teorema ([Klostermeyer and MacGillivray, 2019])

Para todo grafo conexo con $n \geq 3$ vértices,

$$\gamma_I(G) \leq \frac{3n}{4}.$$

Teorema ([Chellali et al., 2016])

Si G es un grafo conexo de orden n y grado máximo Δ, entonces

$$\gamma_I(G) \geq 2n/(\Delta + 2).$$

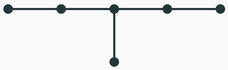
Corolario

Si G es un caterpillar de orden $n \geq 6$ con $F_2 = \emptyset$, entonces

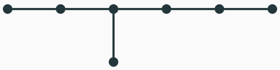
$$\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil \leq \gamma_I(G) \leq \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor.$$

Cota superior ($\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$)

$n = 6$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 4$

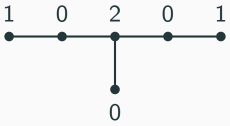


$n = 7$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 5$



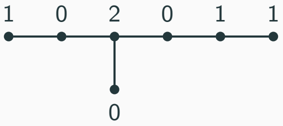
Cota superior ($\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$)

$n = 6$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 4$



$$\gamma_I(G) = 4$$

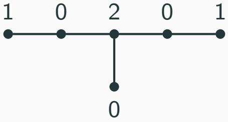
$n = 7$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 5$



$$\gamma_I(G) = 5$$

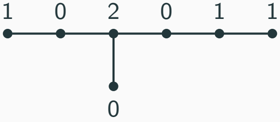
Cota superior ($\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$)

$n = 6$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 4$



$$\gamma_I(G) = 4$$

$n = 7$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 5$



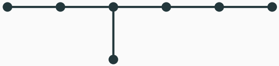
$$\gamma_I(G) = 5$$

Observación: La cota superior es ajustada.

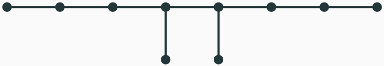
Cota inferior ($\lceil \frac{2n}{5} \rceil$)

$n = 6$, $\lceil \frac{2n}{5} \rceil = 3$

$n = 7$, $\lceil \frac{2n}{5} \rceil = 3$

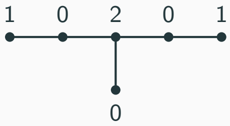


$n = 10$, $\lceil \frac{2n}{5} \rceil = 4$, $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor = 7$



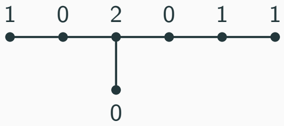
Cota inferior ($\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$)

$n = 6$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 3$



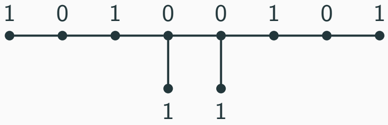
$\gamma_I(G) = 4$

$n = 7$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 3$



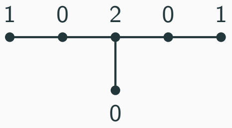
$\gamma_I(G) = 5$

$n = 10$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 4$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 7$



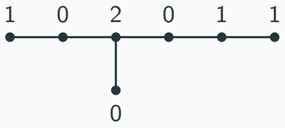
Cota inferior ($\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$)

$n = 6$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 3$



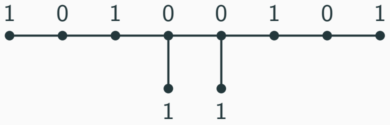
$\gamma_I(G) = 4$

$n = 7$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 3$



$\gamma_I(G) = 5$

$n = 10$, $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 4$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 7$



$\gamma_I(G) = 6$

Mejora de la cota inferior

Proposición

Sea G caterpillar con P su camino principal, entonces

$$\gamma_I(P) \leq \gamma_I(G).$$

Más aún, si $n \geq 6$ y $F_2 = \emptyset$, entonces

$$\gamma_I(P) + 1 \leq \gamma_I(G).$$

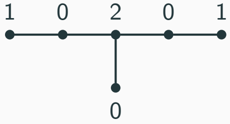
Corolario

Sea G caterpillar de orden $n \geq 6$ y $F_2 = \emptyset$, entonces

$$\gamma_I(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

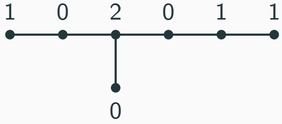
Cota inferior($\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$)

$n = 6$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = 4$



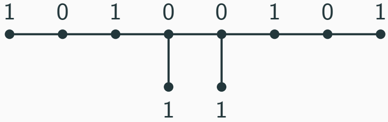
$\gamma_I(G) = 4$

$n = 7$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = 5$



$\gamma_I(G) = 5$

$n = 10$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = 6$, $\left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor = 7$



$\gamma_I(G) = 6$

Observación: La cota inferior es ajustada.

Gracias

Bibliografía

Chellali, M., Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., and McRae, A. A. (2016).
Roman {2}-domination.
Discrete Applied Mathematics, 204:22–28.

Cockayne, E. J., Dreyer Jr, P. A., Hedetniemi, S. M., and Hedetniemi, S. T. (2004).
Roman domination in graphs.
Discrete mathematics, 278(1-3):11–22.

Henning, M. A. and Klostermeyer, W. F. (2017).
Italian domination in trees.
Discrete Applied Mathematics, 217:557–564.

Klostermeyer, W. and MacGillivray, G. (2019).
Roman, italian, and 2-domination.
J. Combin. Math. Combin. Comput, 108:125–146.

Preguntas?