Desigualdades vectoriales de operadores en espacios de Lebesgue con exponente variable

Marcos J. Bonich
Trabajo en conjunto con Daniel Carando y Martin Mazzitelli

IMAS, UBA-CONICET

3 de octubre de 2022

Teniendo un operador lineal y acotado $T\colon L^q(\Omega_1,\mu)\to L^p(\Omega_2,\nu)$, podemos considerar su extensión vectorial natural, dada por el operador

$$\tilde{T} : L^q(\ell^r) \longrightarrow L^p(\ell^r)$$

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \mapsto (T(f_1), T(f_2), \ldots, T(f_n), \ldots).$$

Teniendo un operador lineal y acotado $T\colon L^q(\Omega_1,\mu) \to L^p(\Omega_2,\nu)$, podemos considerar su extensión vectorial natural, dada por el operador

$$\tilde{T} : L^q(\ell^r) \longrightarrow L^p(\ell^r)$$

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots) \mapsto (T(f_1), T(f_2), \ldots, T(f_n), \ldots).$$

¿Es acotado?

$$\left\| \tilde{T}((f_n)_n) \right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C \, \|T\| \, \|(f_n)_n\|_{L^q(\ell^r)}, \qquad C \geq 1.$$

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene sucesiones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene sucesiones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

Entonces $\tilde{T}$ es acotado si existe $C \geq 1$ tal que

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(\Omega_2,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^q(\Omega_1,\mu)}$$

para toda sucesión $(f_n)_n \in L^q(\Omega_1, \mu)$.

El espacio $L^p(\ell^r)$ contiene funciones $(g_n)_n$ tales que

$$\|(g_n)_n\|_{L^p(\ell^r)} = \left\| \left(\sum_n |g_n|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\Omega,\nu)} < \infty$$

Entonces $\tilde{T}$ es acotado si existe $C \geq 1$ tal que

$$\left(\int_{\Omega_2} \left| \left(\sum_n |T(f_n)(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right|^p d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\|T\| \left(\int_{\Omega_1} \left| \left(\sum_n |f_n(x)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

para toda sucesión $(f_n)_n \in L^q(\Omega_1, \mu)$.

$$k_{L^q(\mu),L^p(\nu)}(r) = \text{ínf}\{C \geq 1\colon \left\|\tilde{T}((f_n)_n)\right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C\,\|T\|\,\|(f_n)_n\|_{L^q(\ell^r)}$$

$$\text{para toda } (f_n)_n \in L^q(\ell^r) \text{ y todo operador}$$

$$T\colon L^q(\Omega_1,\mu) \to L^p(\Omega_2,\nu)\}$$

$$k_{L^q(\mu),L^p(\nu)}(r) = \text{ínf}\Big\{C \geq 1\colon \left\| \tilde{T}((f_n)_n) \right\|_{L^p(\ell^r)} \leq C \,\|T\|\, \|(f_n)_n\|_{L^q(\ell^r)}$$
$$\text{para toda } (f_n)_n \in L^q(\ell^r) \text{ y todo operador}$$
$$T\colon L^q(\Omega_1,\mu) \to L^p(\Omega_2,\nu)\Big\}$$

$$k_{q,p}(r) = \sup\left\{ k_{L^q(\mu),L^p(\nu)}(r)\colon (\Omega_1,\mu),\, (\Omega_2,\nu) \text{ espacios de medida}\right\}$$

Marcinkiewicz y Zygmund ('39) probaron que dados cualesquiera $0 < p, q < \infty$, existe $C \geq 1$ tal que **todos** los operadores $T \colon L^q(\Omega_1, \mu) \to L^p(\Omega_2, \nu)$ verifican:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega_2,\nu)} \leq C \|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q(\Omega_1,\mu)} .$$

Marcinkiewicz y Zygmund ('39) probaron que dados cualesquiera $0 < p, q < \infty$, existe $C \geq 1$ tal que **todos** los operadores $T\colon L^q(\Omega_1, \mu) \to L^p(\Omega_2, \nu)$ verifican:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega_2,\nu)} \leq C \|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^q(\Omega_1,\mu)}.$$

Luego probaron que si $0 < \max\{p, q\} < r < 2$, entonces todos los T tienen extensión ℓ^r-vectorial acotada:

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^p(\Omega_2,\nu)} \leq C \|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^q(\Omega_1,\mu)}.$$

Teorema (Defant - Junge ('98))

Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *y*

$$I(p,q) = \begin{cases} (q, 2] & \text{si } p < q < 2 \\ [2, p) & \text{si } 2 < p < q \\ [\min\{2, q\}, \max\{2, p\}] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $k_{q,p}(r) < \infty$ *si y solo si* $r \in I(p,q)$.

¿Qué podemos decir si cambiamos las constantes p y q por variables $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$?

¿Qué podemos decir si cambiamos las constantes p y q por variables $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$?

Definición (Exponente variable)

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Entonces denotamos por $\mathcal{P}(\Omega, \mu)$ el conjunto de las funciones μ-medibles y acotadas $\mathbf{p} \colon \Omega \to [1, \infty)$. Además notaremos

$$p_- = ess \inf_{x \in \Omega} \mathbf{p}(x) \quad \text{and} \quad p_+ = ess \sup_{x \in \Omega} \mathbf{p}(x).$$

Definición

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Dada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Omega, \mu)$, definimos $L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ como el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que, para algún $\lambda > 0$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) < +\infty.$$

Definición

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Dada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Omega, \mu)$, definimos $L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ como el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que, para algún $\lambda > 0$

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) < +\infty.$$

Este conjunto se convierte en un espacio de Banach cuando se equipa con la norma de Luxemburgo

$$\|f\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} d\mu(x) \leq 1 \right\}.$$

Podríamos decir que "$L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ es un espacio de funciones que se convierte en un espacio L^p en distintas partes del dominio de $\mathbf{p}$".

Podríamos decir que "$L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ es un espacio de funciones que se convierte en un espacio L^p en distintas partes del dominio de $\mathbf{p}$". Por ejemplo, si consideramos el exponente variable

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

Podríamos decir que "$L^{\mathbf{p}}(\Omega, \mu)$ es un espacio de funciones que se convierte en un espacio L^p en distintas partes del dominio de $\mathbf{p}$".
Por ejemplo, si consideramos el exponente variable

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

La función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x, \end{cases}$$

está en $L^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_{>0})$.

Fijados (Ω_1, μ) y (Ω_2, ν), pensemos en operadores

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu).$$

¿Existe $C \geq 1$ tal que **todos** ellos cumplan

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega_2,\nu)} \leq C\|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_1,\mu)} ?$$

Fijados (Ω_1, μ) y (Ω_2, ν), pensemos en operadores

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu).$$

¿Existe $C \geq 1$ tal que **todos** ellos cumplan

$$\left\| \left(\sum_n |T(f_n)|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^{\mathbf{p}}(\Omega_2,\nu)} \leq C \|T\| \left\| \left(\sum_n |f_n|^r \right)^{1/r} \right\|_{L^{\mathbf{q}}(\Omega_1,\mu)} ?$$

Si existe llamaremos $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}^{(\Omega_1,\mu),(\Omega_2,\nu)}(r)$ al ínfimo de ellas y en caso contrario diremos que $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = \infty$.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ según consideramos distintos exponentes.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ según consideramos distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ y supongamos que

$$1 \leq \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 \leq \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ según consideramos distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ *y supongamos que*

$$1 \leq \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 \leq \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

Básicamente, $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ "crece" si $\mathbf{q}$ crece y $\mathbf{p}$ decrece.

El siguiente resultado (muy útil) nos dice cómo se comparan las constantes $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ según consideramos distintos exponentes.

Lema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_1, \nu)$, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2, \mu)$, $1 \leq r < \infty$ *y supongamos que*

$$1 \leq \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{p}_1 < \infty \quad y \quad 1 \leq \mathbf{q}_1 \leq \mathbf{q}_2 < \infty,$$

en casi todo punto. Entonces, $k_{\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1}(r) \lesssim k_{\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2}(r)$.

Básicamente, $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r)$ "crece" si $\mathbf{q}$ crece y $\mathbf{p}$ decrece.
La demostración de dichas propiedades de crecimiento y decrecimiento es una adaptación de las mismas propiedades en el caso en que p y q son constantes.

El Teorema principal (parcial), es el análogo al visto en el caso constante:

El Teorema principal (parcial), es el análogo al visto en el caso constante:

Teorema (B. - Carando - Mazzitelli)

Sean $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Omega_1, \mu)$, $\mathbf{q} \in \mathcal{P}(\Omega_2, \nu)$ *y*

$$I(p_-, q_+) = \begin{cases} (q_+, 2] & \text{if } p_- < q_+ < 2, \\ [2, p_-) & \text{if } 2 < p_- < q_+, \\ [\min\{2, q_+\}, \max\{2, p_-\}] & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $r \in I(p_-, q_+)$, *entonces* $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$. *Además,*

- *si* $p_- < q_+ < 2$ *y* $r < q_+$ *entonces* $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = \infty$.
- *si* $2 < p_- < q_+$ *y* $r > p_-$ *entonces* $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = \infty$.

Dem. (idea):
La primera parte se consigue por crecimiento y decrecimiento:

$$k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) \lesssim k_{q_+,p_-}(r) < \infty.$$

Dem. (idea):
La primera parte se consigue por crecimiento y decrecimiento:

$$k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) \lesssim k_{q_+,p_-}(r) < \infty.$$

La segunda parte se consigue mostrando que existe un operador que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $1 < p_- + \epsilon < q_+ - \epsilon < 2$

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $1 < p_- + \epsilon < q_+ - \epsilon < 2$

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $1 < p_- + \epsilon < q_+ - \epsilon < 2$

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \hat{\mu}\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \hat{\nu}\right)$$

Sea $\epsilon > 0$ tal que $1 < p_- + \epsilon < q_+ - \epsilon < 2$

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{\mathbf{q}}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \hat{\mu}\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \hat{\nu}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0, 1]$$

Finalmente la implicación que queremos es

$$T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$$

$$\Downarrow$$

$$S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0,1]$$

es decir, si $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$ entonces todo operador $S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0,1]$ tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada.

Pero sabemos que si $r < q_+ - \epsilon$ existe $S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0,1]$ que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada (Gasch - Maligranda ('94)).

Pero sabemos que si $r < q_+ - \epsilon$ existe $S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0,1]$ que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada (Gasch - Maligranda ('94)).

Con lo cual, existe $T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$ que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada, $\therefore\ k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = \infty$.

Pero sabemos que si $r < q_+ - \epsilon$ existe $S : \ell^{q_+ - \epsilon} \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}[0,1]$ que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada (Gasch - Maligranda ('94)).
Con lo cual, existe $T : L^{\mathbf{q}}(\Omega_1, \mu) \longrightarrow L^{\mathbf{p}}(\Omega_2, \nu)$ que no tiene extensión ℓ^r-vectorial acotada, $\therefore\ k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) = \infty$.
El caso $2 < p_- < q_+$ y $r > p_-$ se consigue usando la siguiente propiedad de dualidad:

$$k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty \iff k_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'}(r') < \infty.$$

Actualmente, queremos completar la vuelta del teorema, es decir, suponiendo que $k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$, poder decir que $r \in I(p_-, q_+)$.
Dificultad:

$$k_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(r) < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\Omega_1^{(q(x) > q_+ - \epsilon)}, \mu\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\Omega_2^{(p(x) > p_- + \epsilon)}, \nu\right)$$

$$¿\Downarrow?$$

$$T : L^{q_+ - \epsilon}\left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\mu}\right) \longrightarrow L^{p_- + \epsilon}\left(\tilde{\Omega}_2, \tilde{\nu}\right)$$

para todo $\left(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\mu}\right)$ y $\left(\tilde{\Omega}_2, \tilde{\nu}\right)$.

¡Gracias!