Sobre la propiedad de persistencia en la relajación clique del poliedro de los conjuntos estables en un grafo

M. Escalante[1,2] P. Fekete[1] L. Moroni[1] D. Delle Donne[3].

[1]Universidad Nacional de Rosario
Argentina

[2]CONICET

[3]ESSEC Business School of Paris, Cergy-Pontoise, France

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
Neuquén, Septiembre 20 - 23, 2022

Introducción

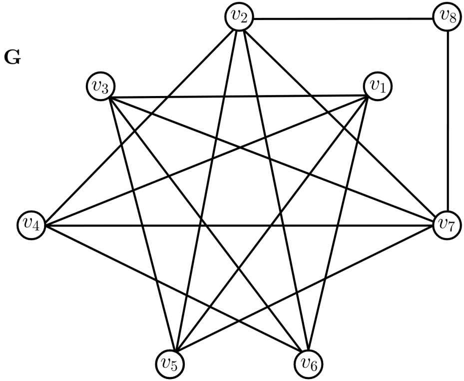
- Problemas de optimización combinatoria
- Formulación como problema lineal entero
- Herramientas poliedrales para su resolución
- Sobre el problema de máximo conjunto estable estudiamos la propiedad de persistencia

Tabla de contenidos

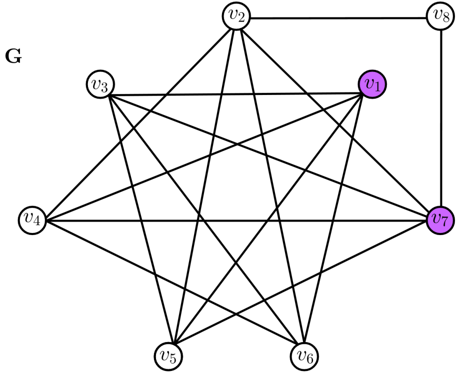
Tabla de contenidos

Conceptos previos

$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$
$\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$ es un conjunto estable si los vértices en S son mutuamente no adyacentes en G.

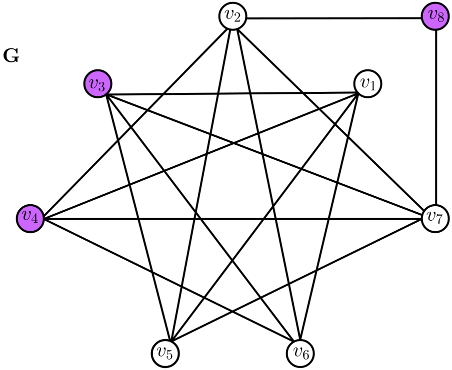


$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$
$\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$ es un conjunto estable si los vértices en S son mutuamente no adyacentes en G.



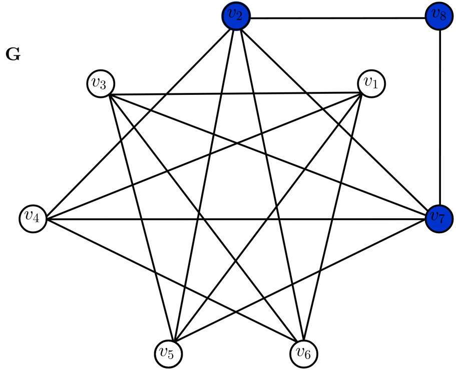
$$\mathrm{S}_1 = \{v_1, v_7\}$$

$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$
$\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$ es un conjunto estable si los vértices en S son mutuamente no adyacentes en G.



$$\mathrm{S}_2 = \{v_3, v_4, v_8\}$$

$\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$
$\mathrm{Q} \subset \mathrm{V}$ es una clique si los vértices en Q son mutuamente adyacentes en G.



$$\mathrm{Q} = \{v_2, v_7, v_8\}$$

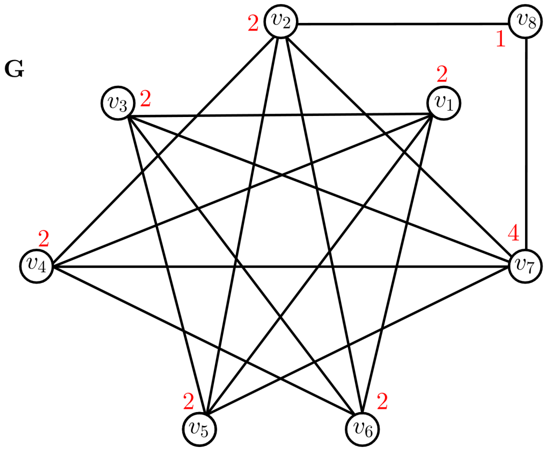
Problema del Máximo Conjunto Estable

Formulación clásica:

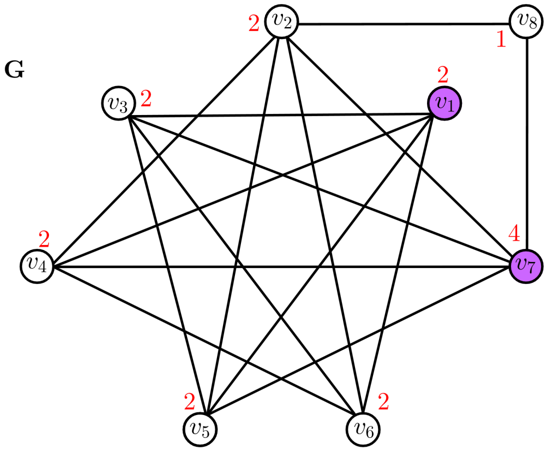
$$\begin{aligned} \max \sum_{u \in \mathrm{V}} x_u & \\ \text{s/a } x_u + x_v \leq 1 & \quad \{u, v\} \in \mathrm{E} \\ x_u \in \{0,1\} & \quad u \in \mathrm{V} \end{aligned}$$

Problema del Conjunto Estable de Máximo peso

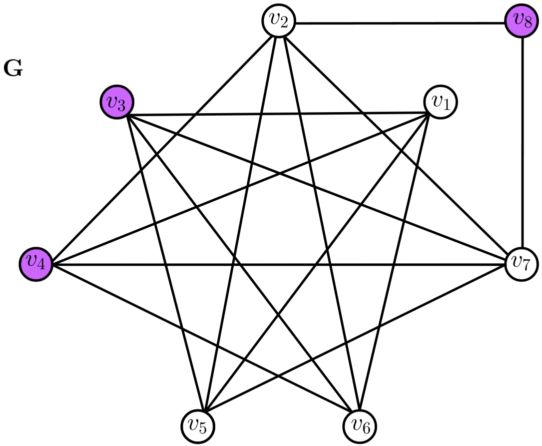
$$\begin{aligned} \max\, {\color{red} c} x & \\ \text{s/a } x_u + x_v \leq 1 & \quad \{u, v\} \in \mathrm{E} \\ x_u \in \{0,1\} & \quad u \in \mathrm{V} \end{aligned}$$



$$c = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 1)$$



G
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
2
2
2
2
2
2
4
1


G
v2
v8
v3
v1
v4
v7
v5
v6

Relajaciones del problema del conjunto estable

Politopo de los conjuntos estables:

$$\mathsf{STAB}(\mathrm{G}) := \mathsf{conv}\{\chi^{\mathrm{S}} : \mathrm{S} \text{ conjunto estable en } \mathrm{G}.\}$$

Relajación por aristas:

$$\mathsf{FRAC}(\mathrm{G}) := \{x \in [0,1]^{|\mathrm{V}|} : x_u + x_v \leq 1,\ \{u,v\} \in \mathrm{E}\}$$

Relajación clique:

$$\mathsf{QSTAB}(\mathrm{G}) := \{x \in [0,1]^{|\mathrm{V}|} : \sum_{u \in \mathrm{Q}} x_u \leq 1,\ \mathrm{Q} \text{ clique en } \mathrm{G}\}$$

Observación

$$\mathsf{STAB}(\mathrm{G}) \subset \mathsf{QSTAB}(\mathrm{G}) \subset \mathsf{FRAC}(\mathrm{G})$$

Tabla de contenidos

Propiedad de Persistencia

Teorema [Nemhauser - Trotter (1975)]

Dado $c \in \mathbb{R}^n$ *y* x *en* $\mathrm{FRAC}(\mathrm{G})$ *c-óptimo y sea* $T = \{v_j : x_j = 1\}$*. Entonces existe un conjunto estable c-óptimo en* G *que contiene a* T*.*

Dado $c \in \mathbb{R}^n$ *y* $x \in \mathrm{FRAC}(\mathrm{G})$ *c-óptimo. Entonces existe* $y \in \mathrm{STAB}(\mathrm{G})$ *c-óptimo tal que* $y_i = x_i$ *cuando* $x_i = 1$*.*

Definición [Rodríguez-Heck - Strikler - Walter - Weltge (2020)]

$P \subset [0,1]^n$ *tiene persistencia si dado* $c \in \mathbb{R}^n$ *y* $x \in P$ *c-óptimo, existe* $y \in P \cap \{0,1\}^n$ *c-óptimo tal que* $y_i = x_i$ *cuando* $x_i \in \{0,1\}$*.*

$R : R(\mathrm{G})$ es una relajación de $\mathrm{STAB}(\mathrm{G})$

QSTAB, FRAC y STAB.

R tiene persistencia si $R(\mathrm{G})$ tiene persistencia para todo G.

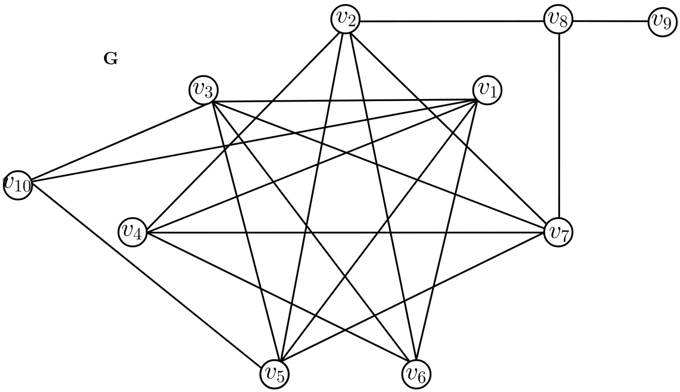
Teorema [Rodríguez-Heck - Strikler - Walter - Weltge (2020)]

R tiene persistencia si y sólo si $R = \mathrm{FRAC}$ o $R = \mathrm{STAB}$.

QSTAB no tiene la propiedad de persistencia.

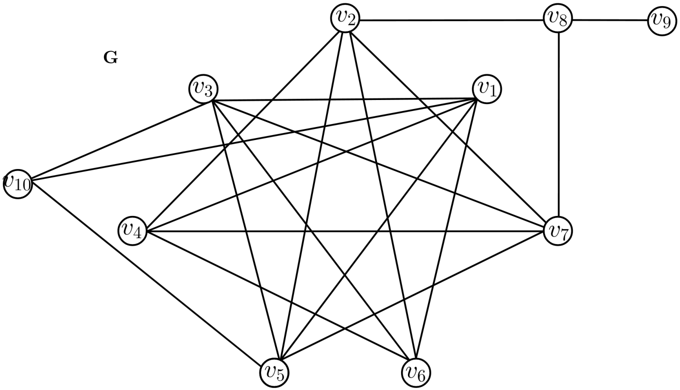
Definición

$P \subset [0,1]^n$ tiene 1-persistencia si dado $c \in \mathbb{R}^n$ y $x \in P$ c-óptimo, existe $y \in P \cap \{0,1\}^n$ c-óptimo tal que $y_i = x_i$ cuando $x_i = 1$.

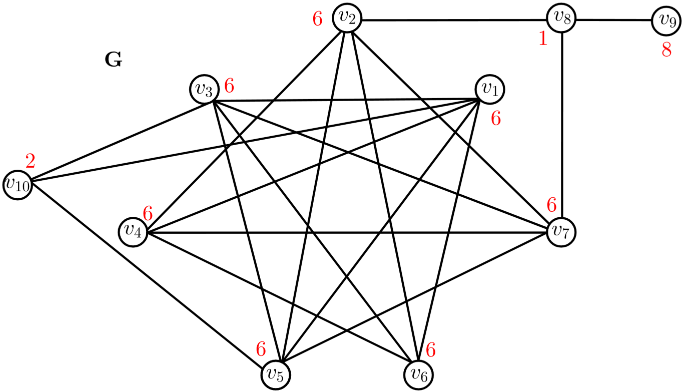


QSTAB(G) tiene 1-persistencia,

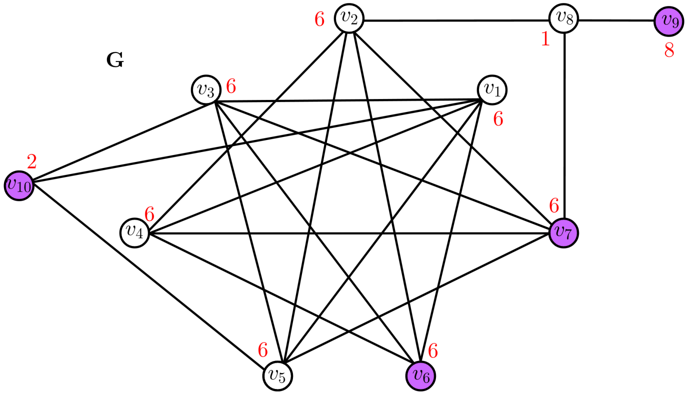
pero... no tiene la propiedad de persistencia



$$c = (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 1, 8, 2)$$

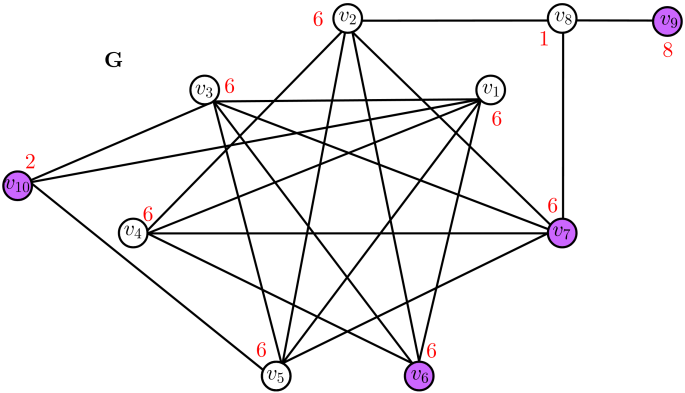


$$x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, 0\right)$$



$$x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, 0\right)$$

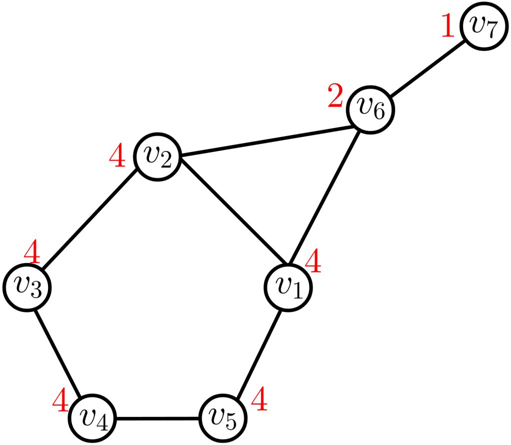
$\mathrm{S} = \{v_6, v_7, v_9, v_{10}\}$ es el único conjunto estable c-óptimo.



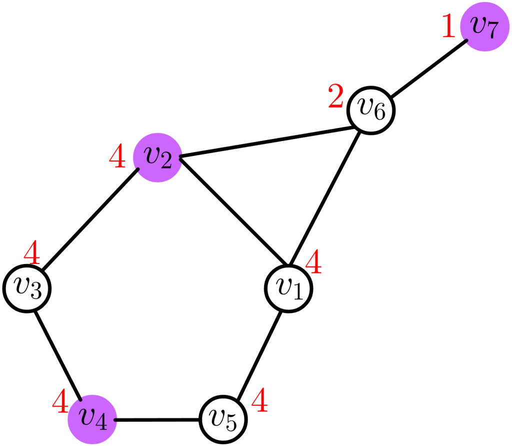
$$x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, {\color{red}0}\right)$$

$$\mathrm{S} = \{v_6, v_7, v_9, {\color{red}v_{10}}\} \;\leftrightsquigarrow\; y = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, {\color{red}1})$$

Tabla de contenidos



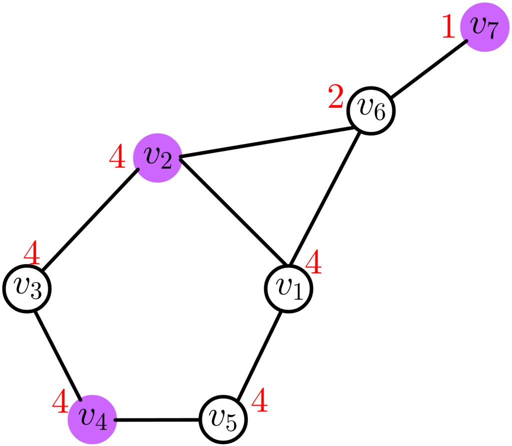
$$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right) \text{ es c-óptimo en } \mathrm{QSTAB(G)}$$



$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$ es c-óptimo en $\mathrm{QSTAB(G)}$

.

$y = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ es el único punto c-óptimo en $\mathrm{QSTAB(G)} \cap \{0, 1\}^7$.



$$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

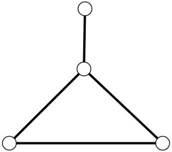
$$y = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\mathcal{F} := \{\mathrm{G} : \mathsf{QSTAB}(\mathrm{G}) \text{ tiene 1-persistencia}\}$$

Algunos elementos de $\mathcal{F}$

- G tal que $\omega(\mathrm{G}) \leq 2, (\mathsf{QSTAB}(\mathrm{G}) = \mathsf{FRAC}(\mathrm{G}))$
- G perfecto, $(\mathsf{STAB}(\mathrm{G}) = \mathsf{QSTAB}(\mathrm{G}))$
- G antiagujero y agujero impar
- G tal que $\bar{\mathrm{G}}$ es de rango perfecto
- G es near-bipartito

Grafo pata (paw)

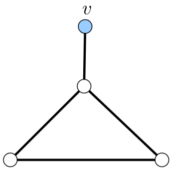


Grafo libre de pata si no tiene a una pata como subgrafo inducido.

Teorema

Si G *es libre de pata entonces* $\mathrm{QSTAB}(\mathrm{G})$ *tiene 1-persistencia.*

Decimos que una pata es una pata mala si $\mathrm{G} \ominus v$ es imperfecto.



Teorema

Si G *es libre de pata mala entonces* $\mathrm{QSTAB}(\mathrm{G})$ *tiene 1-persistencia.*

Tabla de contenidos

Trabajo futuro

- Caracterizar la familia $\mathcal{F}$.
  - Buscar subestructuras prohibidas.
  - Estudiar el comportamiento de los elementos de $\mathcal{F}$ bajo operaciones en grafos.

Gracias