Acotación de la integral fraccionaria asociada al operador de Schrödinger bi-armónico en espacios con pesos

Comunicaciones UMA 2022

Bruno Urrutia

en colaboración con Bruno Bongioanni y Marisa Toschi

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

23 de septiembre de 2022

Indice

Indice

Definiciones

Operador de Schrödinger bi-armónico

Consideremos el operador de Schrödinger bi-armónico en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 5$,

$$\mathcal{L} = (-\Delta)^2 + V^2,$$

donde el potencial V es no negativo, no es identicamente cero y, para algún $q > d/2$, satisface una desigualdad de Hölder inversa

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B V(y)^q \, dy \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B V(y) \, dy,$$

para cada bola $B \subset \mathbb{R}^d$.

Definiciones

Función de Radio Crítico asociada a V

Dado un potencial V, la función de radio crítico asociada a ella es

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \ \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bajo las condiciones que se le exigen al potencial V, se puede chequear que $0 < \rho(x) < \infty$.

Existen constantes $C > 0$ y $k_0 \geq 1$ tales que

$$C^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-k_0} \leq \rho(y) \leq C\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}.$$

Definiciones

Función de Radio Crítico asociada a V

Dado un potencial V, la función de radio crítico asociada a ella es

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \ \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bajo las condiciones que se le exigen al potencial V, se puede chequear que $0 < \rho(x) < \infty$.

Existen constantes $C > 0$ y $k_0 \geq 1$ tales que

$$C^{-1}\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-k_0} \leq \rho(y) \leq C\rho(x)\left(1 + \frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}.$$

Definiciones

Integral Fraccionaria asociada a $\mathcal{L}$

La Integral Fraccionaria de orden $\alpha > 0$ asociada a $\mathcal{L}$ puede ser expresada en términos del semigrupo del calor asociado a ese operador de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^{-\alpha/4} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}} f(x)\, t^{\alpha/4}\, \frac{dt}{t}.$$

Núcleos del calor

Para cada $t > 0$, los operadores $e^{-t\mathcal{L}}$ y $e^{-t(-\Delta)^2}$ son operadores integrales. Llamaremos a sus núcleos $k_t(x,y)$ y $h_t(x,y)$, respectivamente. Esto es,

$$e^{-t\mathcal{L}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x,y) f(y) dy \text{ y } e^{-t(-\Delta)^2} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(x,y) f(y) dy.$$

Definiciones

Integral Fraccionaria asociada a $\mathcal{L}$

La Integral Fraccionaria de orden $\alpha > 0$ asociada a $\mathcal{L}$ puede ser expresada en términos del semigrupo del calor asociado a ese operador de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^{-\alpha/4}f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathcal{L}}f(x)\, t^{\alpha/4}\, \frac{dt}{t}.$$

Núcleos del calor

Para cada $t > 0$, los operadores $e^{-t\mathcal{L}}$ y $e^{-t(-\Delta)^2}$ son operadores integrales. Llamaremos a sus núcleos $k_t(x,y)$ y $h_t(x,y)$, respectivamente. Esto es,

$$e^{-t\mathcal{L}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_t(x,y)f(y)dy \text{ y } e^{-t(-\Delta)^2}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(x,y)f(y)dy.$$

Definiciones

Representación integral para $\mathcal{L}^{-\alpha/4}$

También se puede pensar en escribir a la integral fraccionaria asociada a $\mathcal{L}$ de la siguiente manera

$$\mathcal{L}^{-\alpha/4}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_\alpha(x,y)f(y)dy,$$

siendo

$$K_\alpha(x,y) = \int_0^\infty k_t(x,y)t^{\alpha/4}\frac{dt}{t}.$$

Definiciones

Diferencia de los núcleos

Llamaremos a la diferencia de estos núcleos $q_t(x,y) = k_t(x,y) - h_t(x,y)$. Se sabe que q_t puede expresarse de la siguiente manera

$$q_t(x,y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h_s(x,z)[V(z)]^2 k_{t-s}(z,y)dzds.$$

Esta representación para q_t se obtiene usando propiedades de semigrupos.

Definiciones

Diferencia de los núcleos

Llamaremos a la diferencia de estos núcleos $q_t(x,y) = k_t(x,y) - h_t(x,y)$. Se sabe que q_t puede expresarse de la siguiente manera

$$q_t(x,y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h_s(x,z)[V(z)]^2 k_{t-s}(z,y)dzds.$$

Esta representación para q_t se obtiene usando propiedades de semigrupos.

Definiciones

Clase Reverse-Hölder

Para $q > 1$, $w \in RH_q$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^q \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w,$$

para cada bola $B \subseteq \mathbb{R}^d$.

Clase de Duplicación

Para $\eta \geq 1$ decimos que $w \in D_\eta$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$w(tB) \leq C t^{d\eta} w(B),$$

para cada bola $B \subseteq \mathbb{R}^d$ y $t \geq 1$.

Definiciones

Clase Reverse-Hölder

Para $q > 1$, $w \in RH_q$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^q \right)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|} \int_B w,$$

para cada bola $B \subseteq \mathbb{R}^d$.

Clase de Duplicación

Para $\eta \geq 1$ decimos que $w \in D_\eta$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$w(tB) \leq C t^{d\eta} w(B),$$

para cada bola $B \subseteq \mathbb{R}^d$ y $t \geq 1$.

Definiciones

Espacio $L^{p,\infty}(w)$

Para $p > 1$, diremos que una funcion medible f pertenece al espacio $L^{p,\infty}(w)$ si

$$[f]_{p,w} = \left(\sup_{t>0} t^p \left| \left\{ x : \frac{|f(x)|}{w(x)} > t \right\} \right| \right)^{1/p}$$

es finito. La cantidad $[f]_{p,w}$ es una semi-norma.

Espacio de tipo BMO

Dada una función de radio crítico ρ, un peso w y $0 \leq \beta < 1$, decimos que una función localmente integrable $f \in BMO_\rho^\beta(w)$ si satisface

$$\int_B |f - f_B| \leq Cw(B)|B|^{\beta/d}, \; B = B(x,R), \; \text{para todo } R$$

y

$$\int_B |f| \leq Cw(B)|B|^{\beta/d}, \; B = B(x,R), \; \text{con } R \geq \rho(x),$$

donde f_B denota el promedio de f sobre la bola B.

Definiciones

Espacio $L^{p,\infty}(w)$

Para $p > 1$, diremos que una funcion medible f pertenece al espacio $L^{p,\infty}(w)$ si

$$[f]_{p,w} = \left(\sup_{t>0} t^p \left| \left\{ x : \frac{|f(x)|}{w(x)} > t \right\} \right| \right)^{1/p}$$

es finito. La cantidad $[f]_{p,w}$ es una semi-norma.

Espacio de tipo BMO

Dada una función de radio crítico ρ, un peso w y $0 \leq \beta < 1$, decimos que una función localmente integrable $f \in BMO_\rho^\beta(w)$ si satisface

$$\int_B |f - f_B| \leq Cw(B)|B|^{\beta/d}, \;\; B = B(x,R), \;\; \text{para todo } R$$

y

$$\int_B |f| \leq Cw(B)|B|^{\beta/d}, \;\; B = B(x,R), \;\; \text{con } R \geq \rho(x),$$

donde f_B denota el promedio de f sobre la bola B.

Indice

Bongioanni, Harboure, Salinas (2008)

Sea V un potencial en la clase RH_q con $q \geq d/2$ y sea $\delta_0 = \text{mín}\{1, 2 - d/q\}$. Sea $0 < \alpha < d$, $\dfrac{d}{\alpha} \leq p < \dfrac{d}{(\alpha - \delta_0)^+}$ y $w \in RH_{p'} \cap D_\eta$, donde $1 \leq \eta \leq 1 - \dfrac{\alpha}{d} + \dfrac{\delta_0}{d} + \dfrac{1}{p}$, luego el operador $(-\Delta + V)^{-\alpha/2}$ es acotado de $L^{p,\infty}(w)$ en $BMO_\rho^{\alpha - d/p}(w)$.

Cao, Liu, Yang (2010)

Sea V un potencial en la clase RH_q con $q \geq d/2$, $d \geq 5$ y $0 < \alpha < d$

- Si $1 < p < \frac{d}{\alpha}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$, luego $\mathcal{L}^{-\alpha/4}$ es acotado de L^p en L^q. Más aún, existe una constante C tal que
$$\|\mathcal{L}^{-\alpha/4} f\|_q \leq C\|f\|_p, \text{ para toda } f \in L^p.$$
- $\mathcal{L}^{-\alpha/4}$ también está acotado de $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^d)$ en $L^{n/(n-\alpha)}$. Más aún, existe una constante C tal que
$$\|\mathcal{L}^{-\alpha/4} f\|_{n/(n-\alpha)} \leq C\|f\|_{H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^d)}, \text{ para toda } f \in H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^d).$$

Chen, Zhang (2022)

Sean $\alpha, \beta > 0$ y $\mathcal{T}_\beta$ denota el potencial de Bessel o la integral fracionaria de orden β. Entonces

i) $\|\mathcal{T}_\beta f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\frac{\alpha+\beta}{4}}} \leq C\|f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}}$,

ii) $\|\mathcal{T}_\beta f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\beta/4}} \leq C\|f\|_{\infty}$.

Chen, Zhang (2022)

Si $0 < \beta < \alpha$ y $f \in \Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}$, luego

$$\|\mathcal{L}^{\beta/4} f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\frac{\alpha-\beta}{4}}} \leq C\|f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}}.$$

Chen, Zhang (2022)

1) Para $0 < \alpha \leq 1 - d/q$, luego $\|\mathcal{R}_i f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}} \leq C\|f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}}$ $i = 1, \ldots, d$.

2) Para $1 < \alpha \leq 2 - d/q$, luego $\|\mathcal{R}_i f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}} \leq C\|f\|_{\Lambda^{\mathcal{L}}_{\alpha/4}}$ $i = 1, \ldots, d$.

Si $\delta = 2 - \frac{d}{q}$ y $p_t(x,y)$ es el núcleo del calor asociado a $-\Delta + V$.

Kurata (2000)

Para cada $M > 0$ existe una constante $C_M > 0$ tal que

$$p_t(x,y) \leq C_M t^{-d/2} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-M}$$

Dziubanski, Zienkiewicz (2003)

Para cada $0 < \epsilon < \min\{1, \delta\}$ existe una constante $c > 0$ tal que para cada $M > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que para $|h| < \sqrt{t}$, tenemos

$$|p_t(x, y+h) - p_t(x,y)| \leq C \left(\frac{|h|}{\sqrt{t}}\right)^{\epsilon} t^{-d/2} e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho(y)}\right)^{-M},$$

Cao, Liu, Yang (2010)

Para cada $N \in \mathbb{N}$, existen constantes $C_N, c > 0$ tales que

$$|k_t(x,y)| \leq C_N t^{-d/4} e^{-c\frac{|x-y|^{4/3}}{t^{1/3}}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho^2(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho^2(y)}\right)^{-M}.$$

Esta estimación para k_t nos permite llegar a la siguiente estimación para K_α

$$K_\alpha(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{d-\alpha}}.$$

Cao, Liu, Yang (2010)

Sea $\delta = 2 - d/q$. Existen constantes $C, c > 0$ tales que

$$|q_t(x,y)| \leq C \left(\frac{\sqrt[4]{t}}{\rho(x)} \right)^{2\delta} t^{-d/4} e^{-c \frac{|x-y|^{4/3}}{t^{1/3}}}.$$

Indice

Lema

Para cada $0 < \varepsilon < \min\{1, \delta\}$ existe una constante $c > 0$ tal que para cada $M > 0$ existe una constante $C > 0$ tal que para $|h| < |x-y|/4$, $|h| < C\rho(y)$, tenemos que

$$|q_t(x, y+h) - q_t(x, y)| \leq C \left(\frac{|h|}{\rho(x)} \right)^{\varepsilon} t^{-d/4} e^{-c \frac{|x-y|^{4/3}}{t^{1/3}}}.$$

Lema

Para cada $0 < \varepsilon < \min\{1, \delta\}$ y para cada $M > 0$ existe una constante $C > 0$ tal que para $|h| < \sqrt[4]{t}$, tenemos que

$$|k_t(x, y+h) - k_t(x, y)| \leq C \left(\frac{|h|}{\sqrt[4]{t}} \right)^{\varepsilon} t^{-d/4} e^{-c \frac{|x-y|^{4/3}}{t^{1/3}}} \left(1 + \frac{\sqrt{t}}{\rho^2(x)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho^2(y)} \right)^{-M},$$

Teorema

Sea V un potencial en la clase RH_q, para algún $q \geq d/2$ y sea $\delta_0 = \text{mín}\{1, \delta\}$. Sean $0 < \alpha < d$, $\dfrac{d}{\alpha} \leq p < \dfrac{d}{(\alpha - \delta_0)^+}$ y $w \in RH_{p'} \cap D_\eta$ con $1 \leq \eta < 1 - \frac{\alpha}{d} + \frac{\delta_0}{d} + \frac{1}{p}$. Luego $\mathcal{L}^{-\alpha/4}$ es acotado de $L^{p,\infty}(w)$ en $BMO_\rho^{\alpha - d/p}(w)$.

Esquema de la demostración

La demostración se reduce a probar que existe una constante $C > 0$ tal que se cumplen las dos siguientes condiciones

i) Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{w(B(x_0,\rho(x_0)))}\int_{B(x_0,\rho(x_0))} |\mathcal{L}^{-\alpha/4}f| \leq C|B(x_0,\rho(x_0))|^{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}}[f]_{p,w}.$$

ii) Para cada bola $B = B(x_0, r)$ con $r < \rho(x_0)$ y alguna constante C_B

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |\mathcal{L}^{-\alpha/4}f(x) - C_B|dx \leq C|B|^{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}}[f]_{p,w}.$$

Esquema de la demostración

Dada $f \in L^1_{loc}$ y $B = B(x_0, r)$; $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{w(B)} \int_B \mathcal{L}^{-\alpha/4}(|f\chi_{2B}|) = \frac{1}{w(B)} \int_B \int_{2B} K_\alpha(x,y)|f(y)|dydx \leq C|B|^{\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}}[f]_{p,w}.$$

i) Para $r = \rho(x_0)$, separamos a la función como $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{2B}$.

$$\mathcal{L}^{-\alpha/4}f_2(x) = \int_0^{R^4} e^{-t\mathcal{L}}f_2(x)t^{\alpha/4}\frac{dt}{t} + \int_{R^4}^{\infty} e^{-t\mathcal{L}}f_2(x)t^{\alpha/4}\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^{R^4}\int_{(2B)^C} k_t(x,y)|f(y)|t^{\alpha/4}dy\frac{dt}{t} + \int_{R^4}^{\infty}\int_{(2B)^C} k_t(x,y)|f(y)|t^{\alpha/4}dy\frac{dt}{t}.$$

Esquema de la demostración

ii) Para $B = B(x_0, r)$, con $r < \rho(x_0)$. Separamos a la función como $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{2B}$ y elegimos la constante

$$C_B = \int_{R^4}^{\infty} e^{-t\mathcal{L}} f_2(x_0) t^{\alpha/2-1} dt.$$

Con esto, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(B)} \int_B |\mathcal{L}^{-\alpha/4}(f) - C_B| &\leq \frac{1}{w(B)} \int_B \mathcal{L}^{-\alpha/4}(|f_1|) + \frac{1}{w(B)} \int_B |\mathcal{L}^{-\alpha/4}(f_2) - C_B| \\ &\leq C|B|^{\frac{\alpha}{d} - \frac{1}{p}} [f]_{p,w} + \frac{1}{w(B)} \int_B |\mathcal{L}^{-\alpha/4}(f_2) - C_B|.\end{aligned}$$

Esquema de la demostración

A su vez,

$$\frac{1}{w(B)}\int_B |\mathcal{L}^{-\alpha/4}f_2(x)-C_B|dx =$$

$$\frac{1}{w(B)}\int_B \left|\int_0^{r^4} e^{-t\mathcal{L}}f_2(x)t^{\alpha/4-1}dt\right| dx+\frac{1}{w(B)}\int_B \left|\int_{r^4}^{\infty} e^{-t\mathcal{L}}f_2(y)t^{\alpha/4-1}dt-C_B\right| dx.$$

Resta acotar el segundo término

$$\begin{aligned}\left|\int_{r^4}^{\infty} e^{-t\mathcal{L}}f_2(y)t^{\alpha/4-1}dt-C_B\right| &\leq \int_{r^4}^{\infty}\int_{(2B)^C}|k_t(x,y)-k_t(x_0,y)||f(y)|dy t^{\alpha/4-1}dt\\ &\leq Cw(B)r^{\alpha-d-\frac{d}{p}}[f]_{p,w}.\end{aligned}$$

Indice

- Tratamiento de otros operadores asociados al operador bi-armónico
- Estudio de otros operadores de la teoría del análisis armónico
- Estudio de estos problemas en menos dimensiones

¡Muchas gracias!