Lógica modal coalgebraica para probabilidades superiores e inferiores

Andrés Gallardo **Ignacio Viglizzo**

INMABB, CONICET-UNS y Departamento de Matemática, UNS, Bahía Blanca, ARGENTINA.

Motivación

Fuentes de incertidumbre:

- Jugar una partida de póker,
- Tirar un dado o una moneda al azar,
- Predecir el estado del clima,
- Evaluar riesgos de hacer una inversión,
- Medir la efectividad de un medicamento, etc.

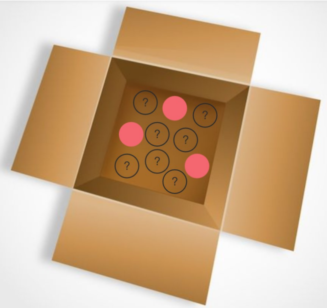
Motivación

La probabilidad es la herramienta más usada para modelar la incertidumbre

Ejemplo 1

$$\mu(R) = 0.3,\ \ \mu(V) = 0.4,\ \ \mu(A) = 0.3$$

Motivación



$$\mu(R) = 0.3,\ \ \mu(V) = ?,\ \ \mu(A) = ?$$

$$\mathcal{P} = \left\{\mu_v \mid v \in [0, 0.7]\right\}$$

$$\mu_v(R) = 0.3,\ \ \mu_v(V) = v,\ \ \mu_v(A) = 0.7 - v$$

Motivación

Existen varios lenguajes para hablar de probabilidades:

- No modales (*likelihood formulas*): [FHM90].
- Lógica modal: [LS91] y [OPR07].
- Lógica modal coalgebraica: [MV04].
  - Probabilistic frames [HF89], funtor: $(\Delta Id)^n$.
  - Type Spaces [MV04], funtor: $\Delta(Id \times M)$.
  - Probabilistic transition systems [dVR99], funtor: $(\Delta Id + \mathbf{1})^E$.

Conceptos básicos

Definición 1

Un álgebra de subconjuntos de un conjunto X es una clase no vacía Σ de subconjuntos de X tal que si $U \in \Sigma$ y $V \in \Sigma$ entonces $U \cup V \in \Sigma$, y $X \setminus U \in \Sigma$.

La categoría Meas*:

Objetos: Espacios medibles (X, Σ).
Morfismos: Funciones medibles $f : (X, \Sigma) \to (X', \Sigma')$ tal que $f^{-1}(U) \in \Sigma$ para todo $U \in \Sigma'$.

Conceptos básicos

Definición 2

Medida de probabilidad finitamente aditiva:

- $\mu : \Sigma \to [0,1]$.
- $\mu(\emptyset) = 0$ *y* $\mu(X) = 1$.
- $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$ *si* $U \cap V = \emptyset$.

Definición 3 (Probabilidad superior e inferior)

$\mathcal{P} = \{\mu_i\}_{i \in I}$ *conjunto de medidas de probabilidad sobre un espacio medible* (X, Σ), *definimos para* $U \in \Sigma$*:*

$$\mathcal{P}^*(U) = \sup_{\mu_i \in \mathcal{P}} \{\mu_i(U)\},$$

$$\mathcal{P}_*(U) = \inf_{\mu_i \in \mathcal{P}} \{\mu_i(U)\}.$$

Caracterización de las medidas de prob. superior

Definición 4

Un n-cubrimiento de un conjunto U es una sucesión finita de conjuntos $U_1, \ldots, U_m$ en Σ tal que existen $i_1, \ldots, i_n$ en $\{1, \ldots, m\}$ que cumplen

$$U \subseteq \bigcup_{\substack{J\subseteq\{1,\ldots,m\}, \\ |J|=n}} \Big(\bigcap_{j\in J} U_j \Big).$$

Un (n, k)-cubrimiento de (U, X) es una sucesión $U_1, \ldots, U_m$ que cubre X k veces, y cubre a U $n + k$ veces.

Caracterización de las medidas de prob. superior

Tenemos el siguiente resultado de Anger y Lembcke [AL85], que aparece en el paper de Halpern y Puccella.

Teorema 1

([HP02], Teorema 2.3) Sea X un conjunto, Σ un álgebra de subconjuntos de X, y $g : \Sigma \to [0,1]$ una función. Existe un conjunto $\mathcal{P}$ de medidas de probabilidad $\mathcal{P}$ con $g = \mathcal{P}^*$ si y solo si g verifica:

(UP1) $g(\emptyset) = 0$,

(UP2) $g(X) = 1$,

(UP3) *Para todos los enteros no negativos m, n, k y todos los (n, k)-cubrimientos $U_1, \ldots, U_m$ de (U, X),*

$$k + ng(U) \leq \sum_{i=1}^{m} g(U_i).$$

El funtor Δ^*

$\Delta^* : \text{Meas}^* \to \text{Meas}^*$
$(X, \Sigma) \longmapsto (\Delta^* X, \Delta^* \Sigma)$

- $\Delta^* X$: medidas de probabilidad superior definidas sobre (X, Σ).
- $\Delta^* \Sigma$ es el álgebra de subconjuntos de $\Delta^* X$ generada por los conjuntos

$$\beta^{p,q}(U) = \{g \in \Delta^* X \mid g(U) \geq p, 1 - g(U^c) \geq q.\}$$

Si $f : X \to X'$ es una función medible $\Delta^* f : \Delta^* X \to \Delta^* X'$ se define para $g \in \Delta^* X$ y $U \in \Sigma'$ como:

$$(\Delta^* f)(g)(U) = g(f^{-1}(U)).$$

Lema 1

- $(\Delta^* f)(g)$ *es una medida de probabilidad superior*
- $\Delta^* f$ *es un morfismo en* Meas*.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Meas}^* \arrow[dlll] \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
\text{Productos} \arrow[drrr] & \text{Coproductos} \arrow[drr] & Id \arrow[dr] & & \Delta^* \arrow[dl] & \text{Exponenciales} \arrow[dll] & \text{Constantes} \arrow[dlll] \\
 & & & \text{f.p.m.s} & & &
\end{tikzcd}$$

f.p.m.s: (endo) funtores polinomiales de medidas (de probabilidad) superior.

$$T = (\Delta^*(Id + M) \times Id)^E.$$

Vamos a trabajar con coálgebras para f.p.m.s. T.

Definición 5 (T-coálgebra)

Es un par (X, α), donde X es un objeto y $\alpha : X \to TX$.

Los ingredientes de T

Definición 6

El conjunto $\mathrm{Ing}\ T$ *de ingredientes de* T*, se define como:*

- *Si* $T = M$ *es un funtor constante, o* $T = Id$ *entonces* $\mathrm{Ing}\ T = \{T, Id\}$,
- *si* $T = T_1 + T_2$, *o* $T = T_1 \times T_2$ *entonces* $\mathrm{Ing}\ T = \{T\} \cup \mathrm{Ing}\ T_1 \cup \mathrm{Ing}\ T_2$, *y*
- *si* $T = S^E$ *o* $T = \Delta^* S$, $\mathrm{Ing}\ T = \{T\} \cup \mathrm{Ing}\ S$.

Los ingredientes de T

Ejemplo 2

Para el funtor $T = (\Delta^*(Id + M) \times Id)^E$, *(*$M \in \Sigma$, E *un conjunto fijo) tenemos:*

$$\mathrm{Ing}\ T = \left\{Id, M, Id + M, \Delta^*(Id + M), \Delta^*(Id + M) \times Id, T\right\}.$$

El multigrafo de ingredientes

El conjunto Ing T induce un multigrafo $S \xrightarrow{\kappa} S'$ etiquetado según cada ingrediente, como sigue:

$S \in \text{Ing } T$	$S \xrightarrow{\kappa} S'$
$S = S_1 \times S_2$	$S_1 \times S_2 \xrightarrow{\text{pr}_1} S_1$, $S_1 \times S_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} S_2$
$S = S_1 + S_2$	$S_1 + S_2 \xrightarrow{\text{in}_1} S_1$, $S_1 + S_2 \xrightarrow{\text{in}_2} S_2$
$S = S^E$	$S^E \xrightarrow{\text{ev}_e} S$
$S = Id$	$Id \xrightarrow{\text{next}} T$
$\Delta^* S$	$\Delta^* S \xrightarrow{(p,q)} S$

Donde E es un conjunto fijo, $e \in E$ y $p, q \in [0, 1]$.

El multigrafo de ingredientes

Ejemplo 3

Para el funtor $T = (\Delta^*(Id + M) \times Id)^E$, *el multigrafo es el siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
Id \arrow[r, "\mathrm{next}"] & T \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{ev}_e"] \arrow[r, dotted, no head] \arrow[r, shift right=2] & \Delta^*(Id + M) \times Id \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{pr}_2"] & \Delta^*(Id + M) \arrow[r, shift left=2, "(p,q)"] \arrow[r, dotted, no head] \arrow[r, shift right=2] & Id + M \arrow[r, "\mathrm{in}_2"] \arrow[llll, bend right, "\mathrm{in}_1"'] & M
\end{tikzcd}$$

La sintaxis

- Cada f.p.m.s T tiene asociado un lenguaje modal.
- Las fórmulas modales se clasifican en tipos según los elementos de lng T.
- Esto fue hecho para la categoría Set en [Jac01] y [Rößi00].
- Posteriormente se extendió a la categoría Meas en [MV04].

La sintaxis

Definición 7

Las fórmulas se forman de acuerdo a las reglas:

$\perp_S : S$,
$A : M$, *si* $A \in \Sigma$ *o*
$A = \{m\}, m \in M$,
$\varphi_1 \to \varphi_2 : S$, *si* $\varphi_i : S$,
$[\mathrm{in}_i]\varphi : S_1 + S_2$, *si* $\varphi : S_i$,
$[\mathrm{pr}_i]\varphi : S_1 \times S_2$, *si* $\varphi : S_i$,
$[\mathrm{ev}_e]\varphi : S^E$, *si* $\varphi : S$, $e \in E$
$[\mathrm{next}]\varphi : Id$, *si* $\varphi : T$,
$[p, q]\varphi : \Delta^* S$, *si* $\varphi :: S$.

Notación: $\varphi :: S$ si $\varphi : S$ y cada subfórmula de tipo constante es medible. Notamos con Form_S al conjunto de fórmulas de tipo S.

La semántica

Definición 8

Dada una T-coálgebra (X,α), y una fórmula $\varphi : S$, la interpretación de φ es el conjunto $[\![\varphi]\!]^\alpha_S$, definido por:

$$
\begin{array}{ll}
[\![\perp_S]\!]^\alpha_S = \emptyset,\ [\![A]\!]^\alpha_M = A, & [\![[\mathrm{pr}_j]\varphi]\!]^\alpha_{S_1\times S_2} = \pi_j^{-1}[\![\varphi]\!]^\alpha_{S_j}, \\
[\![\varphi_1 \rightarrow \varphi_2]\!]^\alpha_S = (S(X)\setminus[\![\varphi_1]\!]^\alpha_S)\cup[\![\varphi_2]\!]^\alpha_S, & [\![[\mathrm{ev}_e]\varphi]\!]^\alpha_{S^E} = ev_e^{-1}[\![\varphi]\!]^\alpha_S, \\
[\![[\mathrm{in}_1]\varphi]\!]^\alpha_{S_1+S_2} = in_1([\![\varphi]\!]^\alpha_{S_1})\cup in_2(S_2X), & [\![[\mathrm{next}]\varphi]\!]^\alpha_{Id} = \alpha^{-1}[\![\varphi]\!]^\alpha_T, \\
[\![[\mathrm{in}_2]\varphi]\!]^\alpha_{S_1+S_2} = in_1(S_1X)\cup in_2([\![\varphi]\!]^\alpha_{S_2}), & [\![[p,q]\varphi]\!]^\alpha_{\Delta^* S} = \beta^{p,q}[\![\varphi]\!]^\alpha_S.
\end{array}
$$

Escribimos $\alpha, x \models_S \varphi$, si $x \in [\![\varphi]\!]^\alpha_S$.

Ejemplo 4

$$T = \Delta^*(Id \times M),\ M = \{a, b, c\},\ \Sigma_M = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\}$$
$$\text{Ing } T = \{Id, M, Id \times M, T\}.$$

S	$\varphi : S$
M	$\bot_M,\ \top_M,\ \{a\},\neg\{a\}\ldots$
Id	$\bot_{Id},\ \top_{Id} = \bot_{Id} \to \bot_{Id},\ldots$
$Id \times M$	$\bot_{Id\times M},\ \top_{Id\times M},\ [\mathrm{pr}_1]\top_{Id},[\mathrm{pr}_2]\neg\{a\}\ldots$
$T = \Delta^*(Id \times M)$	$\bot_T,\ \top_T,\ [0,1][\mathrm{pr}_1]\bot_{Id},\ [0.5, 0.2][\mathrm{pr}_2]\neg\{a\},\ldots$
Id	$[\mathrm{next}][0.5, 0.2][\mathrm{pr}_2]\neg\{a\},\ldots$

$$T = \Delta^*(Id \times M),\ M = \{a, b, c\},\ \Sigma_M = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\}$$
$$\operatorname{Ing}\ T = \{Id, M, Id \times M, T\}.$$

S	$\varphi : S$
M	$\perp_M,\ \top_M,\ \{a\},\ \neg\{a\} \ldots$
Id	$\perp_{Id},\ \top_{Id} = \perp_{Id} \to \perp_{Id}, \ldots$
$Id \times M$	$\perp_{Id\times M},\ \top_{Id\times M},\ [\mathrm{pr}_1]\top_{Id}, [\mathrm{pr}_2]\neg\{a\} \ldots$
$T = \Delta^*(Id \times M)$	$\perp_T,\ \top_T,\ [0,1][\mathrm{pr}_1]\perp_{Id},\ [0.5, 0.2][\mathrm{pr}_2]\neg\{a\}, \ldots$
Id	$[\mathrm{next}][0.5, 0.2][\mathrm{pr}_2]\neg\{a\}, \ldots$

Simplificando las fórmulas

Siguiendo el trabajo de [SDO15], simplificamos $[p, q]\varphi$ como sigue:

Reemplazamos	por
$[p, 0]\varphi$	$U_{\geq p}\varphi$
$[0, p]\varphi$	$L_{\geq p}\varphi$
$[0, 1-p]\neg\varphi$	$U_{\leq p}\varphi$
$[1-p, 0]\neg\varphi$	$L_{\leq p}\varphi$
$\neg[p, 0]\varphi$	$U_{<p}\varphi$
$\neg[0, p]\varphi$	$L_{<p}\varphi$
$\neg[0, 1-p]\neg\varphi$	$U_{>p}\varphi$
$\neg[1-p, 0]\neg\varphi$	$L_{>p}\varphi$
$U_{\geq p}\varphi \wedge U_{\leq p}\varphi$	$U_{=p}\varphi$
$L_{\geq p}\varphi \wedge L_{\leq p}\varphi$	$L_{=p}\varphi$

Axiomas

Dado un f.p.m.s T definimos el conjunto de axiomas $Ax_S \subseteq \mathrm{Form}_S$:

(1) Todas las tautologías booleanas $\varphi : S$.

(2) Para $S = M$, $A : M$ y $c \in M$,

  (a) $\{c\} \to A$ si $c \in A$,
  (b) $\{c\} \to \neg A$ si $c \notin A$.

(3) Si $S = S_1 \times S_2$, $j \in \{1, 2\}$ y $\varphi : S_j$,

  (a) $\neg[\mathrm{pr}_j]\varphi \to [\mathrm{pr}_j]\neg\varphi$,
  (b) $\neg[\mathrm{pr}_j]\bot_{S_j}$,

Axiomas

(4) Si $S = S_1 + S_2$,

(a) $\neg[\mathrm{in}_j]\varphi \to [\mathrm{in}_j]\neg\varphi$,
(b) $\neg[\mathrm{in}_1]\bot_{S_1} \leftrightarrow [\mathrm{in}_2]\bot_{S_2}$,

(5) Si $S = S'^E$, y $\varphi : S'$,

(a) $\neg[\mathrm{ev}_e]\varphi \to [\mathrm{ev}_e]\neg\varphi$,
(b) $\neg[\mathrm{ev}_e]\bot_U$,

(6) Si $S = Id$, y $\varphi : T$,

(a) $\neg[\mathrm{next}]\varphi \to [\mathrm{next}]\neg\varphi$,
(b) $\neg[\mathrm{next}]\bot_T$,

Axiomas

(7) Para $S = \Delta^* S' \in \text{Ing } T$,

(a) $U_{\geq 0}\varphi$ (o bien, $L_{\geq 0}\varphi$),
(b) $U_{\leq p}\varphi \to U_{<q}\varphi$ si $p < q$,
(c) $U_{<p}\varphi \to U_{\leq p}\varphi$,
(d) si $\varphi \to \bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k+n} \bigwedge_{j\in J} \varphi_j :: S'$ y $\bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k} \bigwedge_{j\in J} \varphi_j :: S'$ son tautologías, y $\sum_{i=1}^{m} p_i - k \geq 0$, entonces $(U_{\leq p_1}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge U_{\leq p_m}\varphi_m) \to U_{\leq p}\varphi$ es un axioma, donde $p = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i - k}{n}$, $n \neq 0$,
(e) si $\bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k} \bigwedge_{j\in J} \varphi_j :: S'$ es una tautología y $\sum_{i=1}^{m} p_i < k$ (con $0 \leq p_i \leq 1$), entonces $\neg(U_{\leq p_1}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge U_{\leq p_m}\varphi_m)$ es un axioma,
(f) $L_{\geq 1}(\varphi \to \psi) \to (U_{\geq p}\varphi \to U_{\geq p}\psi)$,
(g) $[p, q]\varphi \leftrightarrow (U_{\geq p}\varphi \wedge L_{\geq q}\varphi)$.

Teorema 2

Para cada $S \in \operatorname{Ing} T$, todos los axiomas de tipo S son válidos en todas las T-coálgebras.

Definición 9 (T-sistema deductivo)

Es un conjunto de relaciones $\{\vdash_S \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Form}_S) \times \mathrm{Form}_S | S \in \mathrm{Ing}\ T\}$ *que satisface:*

- *Regla de suposición: Si* $\varphi \in \Gamma \cup Ax_S$*, entonces* $\Gamma \vdash_S \varphi$.
- *Modus ponens:* $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash_S \psi$.
- *Regla de corte: Si* $\Gamma \vdash_S \Lambda$ *y* $\Lambda \vdash_S \varphi$*, entonces* $\Gamma \vdash_S \varphi$.
- *Regla de deducción: Si* $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_S \psi$*, entonces* $\Gamma \vdash_S \varphi \to \psi$.
- *Regla de Necesitación: Para la arista* $S \overset{(0,1)}{\to} \Delta^* S$*, si* $\vdash_S \varphi$*, entonces* $\vdash_{\Delta^* S} L_{\geq 1}\varphi$.
- *Regla constante: Si* $M \in \mathrm{Ing}\ T$*, entonces* $\{\neg\{c\} \mid c \in M\} \vdash_M \bot_M$.
- *Regla del cuadrado determinista: Para cada* $\kappa \neq (p,q)$*,* $S \overset{\kappa}{\to} S'$*,* $\Gamma \vdash_{S'} \psi$ *implica* $[\kappa]\Gamma \vdash_S [\kappa]\psi$.
- *Reglas Arquimedeanas:* $\{U_{\geq q}\psi \mid q < p\} \vdash_{\Delta^* S} U_{\geq p}\psi$*. También,* $\{L_{\geq q}\psi \mid q < p\} \vdash_{\Delta^* S} L_{\geq p}\psi$.

Teorema 3

Para cada T-coálgebra (X, α),

$$Cons_T^{\alpha} = \{\models_S^{\alpha} \ \mid S \in \mathrm{Ing}\ \ T\}$$

$$Cons_T = \{\models_S \ \mid S \in \mathrm{Ing}\ \ T\}$$

son T-sistemas deductivos.

Buscamos caracterizar los conjuntos:

$$des_S^{\alpha}(x) = \{\varphi : S \mid \alpha, x \models_S \varphi\}$$

Definición 10

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}_S$, *con* $S \in \mathrm{Ing}\ T$. Γ *es*

- *cerrado bajo deducción: si* φ *y* $\varphi \to \psi \in \Gamma$ *implican* $\psi \in \Gamma$,
- *S-teoría: si es cerrado bajo deducción y* $Ax_S \subseteq \Gamma$,
- *negación completo: si para cada* $\varphi : S.\ \varphi \in \Gamma$ *ssi* $\neg\varphi \notin \Gamma$,
- $\bot$*-libre: si* $\bot_S \notin \Gamma$,
- $\vdash_S$*-consistente: si* $\Gamma \nvdash_S \bot_S$,
- $\vdash_S$*-maximal: si es* $\vdash_S$*-consistente y negación completo,*
- *correcto: si* $\Gamma \vdash_S \varphi$ *implica* $\Gamma \models_S \varphi$ *para todo* $S \in \mathrm{Ing}\ T$,
- *completo: si* $\Gamma \models_S \varphi$ *implica* $\Gamma \vdash_S \varphi$ *para todo* $S \in \mathrm{Ing}\ T$.

Lema 2

Si un T-sistema deductivo es correcto, entonces, los conjuntos

$$des_S^{\alpha}(x) = \{\varphi : S \mid \alpha, x \models_S \varphi\}$$

son $\vdash_S$-maximales.

Definición 11

Un T-sistema deductivo es Lindenbaum si para todo $S \in \text{lng } T$, cada conjunto $\vdash_S$-consistente de fórmulas está incluido en algún conjunto $\vdash_S$-maximal.

La coálgebra canónica

Fijemos un T-sistema deductivo Lindenbaum D. Definimos:

- (X_S^D, Σ_S^D)
- $X_S^D = \{x \subseteq \mathrm{Form}_S \mid x \text{ es } \vdash_S \text{-maximal}\}$
- $\Sigma_S^D = \{|\varphi|_S \mid \varphi :: S\}$
- $|\varphi|_S = \{x \in X_S^D \mid \varphi \in x\}$

Buscamos armar la coálgebra

$$\alpha^D : X_{Id} \longrightarrow T(X_{Id})$$

La coálgebra canónica

Para construir α^D se prueba la existencia de los morfismos:

1. $\rho_{S_1 \times S_2} : X_{S_1 \times S_2} \to X_{S_1} \times X_{S_2}$.
2. $\rho_{S_1 + S_2} : X_{S_1 + S_2} \to X_{S_1} + X_{S_2}$.
3. $\rho_{S^E} : X_{S^E} \to (X_S)^E$.
4. $\rho_{Id} : X_{Id} \to X_T$.
5. $\rho_{\Delta^* S} : X_{\Delta^* S} \to \Delta^*(X_S)$.

y se construye a partir de éstos, para cada $S \in \mathrm{Ing}\ T$, un morfismo

$$\mathrm{r}_S : X_S \to S(X_{Id}).$$

La coálgebra canónica

Ejemplo 5

Si $T = \Delta^*(Id \times Id^E)$, *tenemos*

$$
\begin{tikzcd}
X_T \arrow[d, "\rho_{\Delta^*}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{r}_T"'] \\
\Delta^*(X_{Id \times Id^E}) \arrow[d, "\Delta^*(\rho_{Id \times Id^E})"] \\
\Delta^*(X_{Id} \times X_{Id^E}) \arrow[d, "\Delta^*(Id \times \rho_{Id^E})"] \\
\Delta^*(X_{Id} \times (X_{Id})^E) = T(X_{Id})
\end{tikzcd}
$$

La coálgebra canónica

$$(X_{Id}, \alpha^D)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_T \arrow[dr, "\mathrm{r}_T"] & \\
X_{Id} \arrow[ur, "\rho_{Id}"] \arrow[rr, dashed, "\alpha^D"] & & T(X_{Id})
\end{tikzcd}$$

Completitud

Lema 3 (Lema de la verdad, [Gol10])

Para cada $\varphi : S$, y cada conjunto $\vdash_S$-maximal x, tenemos que

$$\varphi \in x \text{ ssi } \alpha^D, \mathrm{r}_S(x) \models_S \varphi.$$

Además:

$$\begin{tikzcd} X_S \arrow[r, shift left, "\mathrm{r}_S"] & S(X_{Id}) \arrow[l, shift left, "des_S^{\alpha^D}"] \end{tikzcd}$$

y r_S es un isomorfismo.

Completitud

Teorema 4 (Completitud)

Para cualquier T-sistema deductivo Lindenbaum
$D = \{\vdash_S^D \mid S \in \text{Ing } T\}$

$$\Gamma \models_S \varphi \Longrightarrow \Gamma \models_S^{\alpha^D} \varphi \iff \Gamma \vdash_S^D \varphi.$$

$Conseq_T = \{\models_S \mid S \in \text{Ing } T\}$ es el *único* T-sistema deductivo Lindenbaum que es correcto.

El funtor Δ

Agregamos un ingrediente a la clase de los f.p.m.s. Δ que denotará a las medidas de probabilidad finitamente aditivas:

$$\Delta : \mathrm{Meas}^* \to \mathrm{Meas}^*$$

Añadimos aristas para cada $p \in [0,1]$

$$\Delta X \xrightarrow{\geq p} X$$

Fórmulas modales probabilísticas:

$$P_{\geq p}\varphi.$$

Observación 1

Si

$$\mathcal{P}^*(U) = \mathcal{P}_*(U)$$

entonces $\mathcal{P}^*$ es una medida de probabilidad finitamente aditiva.

Axiomas para $\Delta S \in \mathrm{Ing}\ T$

(8)(a) $P_{\geq 0}\varphi$,

(8)(b) $P_{\geq 1-p}\neg\varphi \to \neg P_{\geq q}\varphi$ si $p < q$,

(8)(c) $\neg P_{\geq p}\varphi \to P_{\geq 1-p}\neg\varphi$,

(8)(d) si $\varphi \to \bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k+n} \bigwedge_{j\in J}\varphi_j :: S'$ y $\bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k} \bigwedge_{j\in J}\varphi_j :: S'$ son tautologías, y $\sum_{i=1}^{m} p_i - k \geq 0$, entonces $(P_{\geq 1-p_1}\neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge P_{\geq 1-p_m}\neg\varphi_m) \to P_{\geq 1-p}\neg\varphi$ es un axioma, donde $p = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i - k}{n}$, $n \neq 0$,

(8)(e) si $\bigvee_{J\subseteq\{1,\ldots,m\},\ |J|=k} \bigwedge_{j\in J}\varphi_j :: S'$ es una tautología y $\sum_{i=1}^{m} p_i < k$ (con $0 \leq p_i \leq 1$), entonces $\neg(P_{\geq 1-p_1}\neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge P_{\geq 1-p_m}\neg\varphi_m)$ es un axioma,

(8)(f) $P_{\geq 1}(\varphi \to \psi) \to (P_{\geq p}\varphi \to P_{\geq p}\psi)$.

La demostración del teorema de completitud se obtiene adaptando las construcciones anteriores.

Ideas futuras

- Enriquecer la clase de endofuntores sobre Meas* para expresar
  - medidas de Plausibilidad y Creencia (introducidas en [Dem67]).
  - medidas de probabilidad (superior) de rango finito como en [SDO17].
  - funciones de Ranking y Posibilidad.
- Formalizar estos resultados para un lenguaje numerable. Trabajar con racionales en vez de reales para expresar cosas como $\mathcal{P}^*(\llbracket\varphi\rrbracket) = \sqrt{2}/2$.
  - Idea: restringir a una clase de funtores con ingredientes constantes numerables.

Fin

¡Muchas gracias!

Bernd Anger and Jörn Lembcke.
Infinitely subadditive capacities as upper envelopes of measures.
Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 68(3):403–414, 1985.

A. P. Dempster.
Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping.
Ann. Math. Statist., 38:325–339, 1967.

E. P. de Vink and J. J. M. M. Rutten.
Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach.
volume 221, pages 271–293. 1999.
ICALP '97 (Bologna).

Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, and Nimrod Megiddo.

A logic for reasoning about probabilities.
Information and Computation, 87(1):78–128, 1990.
Special Issue: Selections from 1988 IEEE Symposium on Logic in Computer Science.

Robert Goldblatt.
Deduction systems for coalgebras over measurable spaces.
J. Logic Comput., 20(5):1069–1100, 2010.

Joseph Halpern and Ronald Fagin.
Modelling knowledge and action in distributed systems.
Distributed Computing, 3:159–177, 01 1989.

Joseph Y. Halpern and Riccardo Pucella.
A logic for reasoning about upper probabilities.
J. Artificial Intelligence Res., 17:57–81, 2002.

Bart Jacobs.

Many-sorted coalgebraic modal logic: a model-theoretic study.
Theor. Inform. Appl., 35(1):31–59, 2001.
Coalgebraic methods in computer science (Berlin, 2000).

Kim G. Larsen and Arne Skou.
Bisimulation through probabilistic testing.
Inform. and Comput., 94(1):1–28, 1991.

Lawrence S. Moss and Ignacio D. Viglizzo.
Harsanyi type spaces and final coalgebras constructed from satisfied theories.
In *Proceedings of the Workshop on Coalgebraic Methods in Computer Science*, volume 106 of *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, pages 279–295. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2004.

Zoran Ognjanović, Aleksandar Perovic, and Miodrag Raskovic.
An axiomatization of qualitative probability.

In *5th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, SISY 2007*, pages 151 – 154, 09 2007.

Martin Rößiger.
Coalgebras and modal logic.
In *CMCS'2000: coalgebraic methods in computer science (Berlin)*, volume 33 of *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, page 22. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2000.

Nenad Savić, Dragan Doder, and Zoran Ognjanović.
A logic with upper and lower probability operators.
In Thomas Augustin, Serena Doria, Enrique Miranda, and Erik Quaeghebeur, editors, *ISIPTA '15: Proceedings of the Ninth International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications*, pages 267–276, 2015.

Nenad Savić, Dragan Doder, and Zoran Ognjanović.
Logics with lower and upper probability operators.

International Journal of Approximate Reasoning, 88:148–168, 2017.