I M A S
CONICET
U B A

Frames de iteraciones de dos operadores que conmutan

Alejandra Aguilera

Trabajo en colaboración con Carlos Cabrelli, Diana Carbajal y Victoria Paternostro

Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina
UMA Neuquén 2022

Contenidos

Frames

Duffin y Schaeffer (1952) $\longrightarrow$ Series de Fourier no armónicas en $L^2[0,1]$.

Young (1980)

Daubechies (1992) $\longrightarrow$ Wavelets

Definición: Una familia de vectores $\{w_i\}_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un frame para $\mathcal{H}$ si existen constantes C_1, $C_2 > 0$ tales que para todo $v \in \mathcal{H}$

$$C_1\|v\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle v, w_i\rangle|^2 \leq C_2\|v\|^2.$$

Si $C_1 = C_2 = 1$, decimos que $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de Parseval:

$$\sum_{i\in I} |\langle v, w_i\rangle|^2 = \|v\|^2 \quad \forall\ v \in \mathcal{H}.$$

Frames

Duffin y Schaeffer (1952) $\longrightarrow$ Series de Fourier no armónicas en $L^2[0,1]$.

Young (1980)

Daubechies (1992) $\longrightarrow$ Wavelets

Definición: Una familia de vectores $\{w_i\}_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un frame para $\mathcal{H}$ si existen constantes C_1, $C_2 > 0$ tales que para todo $v \in \mathcal{H}$

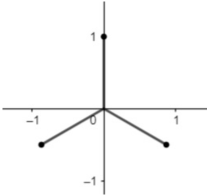
$$C_1\|v\|^2 \leq \underbrace{\sum_{i\in I} |\langle v, w_i\rangle|^2 \leq C_2\|v\|^2}_{\text{Bessel}}.$$

Si $C_1 = C_2 = 1$, decimos que $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de Parseval:

$$\sum_{i\in I} |\langle v, w_i\rangle|^2 = \|v\|^2 \quad \forall\ v \in \mathcal{H}.$$

Frames $\neq$ base ortonormal

Ejemplo: $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $w_1 = (0, 1)$, $w_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $w_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
$\|w_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se cumple



$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, w_i\rangle|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ es un frame ajustado con cotas $A = B = 3/2$.

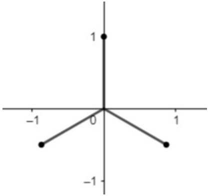
Si $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ entonces $\{cw_1, cw_2, cw_3\}$ es un frame de Parseval, ya que verifica

$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, cw_i\rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Propiedad: Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de Parseval de $\mathcal{H}$ y además $\|w_i\| = 1$ para todo $i \in I$ entonces $\{w_i\}_{i\in I}$ es una b.o.n. de $\mathcal{H}$.

Frames $\neq$ base ortonormal

Ejemplo: $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $w_1 = (0, 1)$, $w_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $w_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
$\|w_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se cumple



$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, w_i \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2$$

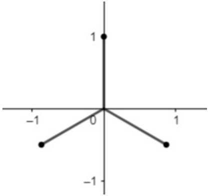
$\{w_1, w_2, w_3\}$ es un frame ajustado con cotas $A = B = 3/2$.
Si $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ entonces $\{cw_1, cw_2, cw_3\}$ es un frame de Parseval, ya que verifica

$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, cw_i \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Propiedad: Si $\{w_i\}_{i \in I}$ es un frame de Parseval de $\mathcal{H}$ y además $\|w_i\| = 1$ para todo $i \in I$ entonces $\{w_i\}_{i \in I}$ es una b.o.n. de $\mathcal{H}$.

Frames $\neq$ base ortonormal

Ejemplo: $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $w_1 = (0,1)$, $w_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $w_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
$\|w_i\| = 1$, $i = 1, 2, 3$. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se cumple



$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, w_i \rangle|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ es un frame ajustado con cotas $A = B = 3/2$.
Si $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ entonces $\{cw_1, cw_2, cw_3\}$ es un frame de Parseval, ya que verifica

$$\sum_{i=1}^{3} |\langle v, cw_i \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Propiedad: Si $\{w_i\}_{i \in I}$ es un frame de Parseval de $\mathcal{H}$ y además $\|w_i\| = 1$ para todo $i \in I$ entonces $\{w_i\}_{i \in I}$ es una b.o.n. de $\mathcal{H}$.

Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de $\mathcal{H}$:

- Operador de análisis $\longrightarrow R:\mathcal{H}\to\ell^2(I),\ Rv=\{\langle v,w_i\rangle\}_{i\in I}$.
- Operador de síntesis $\longrightarrow C:=R^*:\ell^2(I)\to\mathcal{H},\ Ca=\sum_{i\in I}a_iw_i$.
- Operador de frame:

$$M:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad Mv:=CRv=\sum_{i\in I}\langle v,w_i\rangle w_i$$

Propiedades: R es acotado, C es acotado y sobreyectivo, M es autoadjunto, positivo e inversible.

Además:

$$v=M^{-1}Mv=\sum_{i\in I}\langle v,w_i\rangle M^{-1}w_i$$

La sucesión $\{M^{-1}w_i\}_{i\in I}$ se llama frame dual canónico de $\{w_i\}_{i\in I}$.

Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de $\mathcal{H}$:

- Operador de análisis $\longrightarrow$ $R : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$, $Rv = \{\langle v, w_i\rangle\}_{i\in I}$.

- Operador de síntesis $\longrightarrow$ $C := R^* : \ell^2(I) \to \mathcal{H}$, $Ca = \sum_{i\in I} a_i w_i$.

- Operador de frame:

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Mv := CRv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle w_i$$

Propiedades: R es acotado, C es acotado y sobreyectivo, M es autoadjunto, positivo e inversible.

Además:

$$v = M^{-1}Mv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle M^{-1}w_i$$

La sucesión $\{M^{-1}w_i\}_{i\in I}$ se llama frame dual canónico de $\{w_i\}_{i\in I}$.

Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de $\mathcal{H}$:

- Operador de análisis $\longrightarrow R:\mathcal{H}\to \ell^2(I),\ Rv=\{\langle v,w_i\rangle\}_{i\in I}$.
- Operador de síntesis $\longrightarrow C:=R^*:\ell^2(I)\to\mathcal{H},\ Ca=\sum_{i\in I}a_iw_i$.
- Operador de frame:

$$M:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad Mv:=CRv=\sum_{i\in I}\langle v,w_i\rangle w_i$$

Propiedades: R es acotado, C es acotado y sobreyectivo, M es autoadjunto, positivo e inversible.

Además:

$$v=M^{-1}Mv=\sum_{i\in I}\langle v,w_i\rangle M^{-1}w_i$$

La sucesión $\{M^{-1}w_i\}_{i\in I}$ se llama frame dual canónico de $\{w_i\}_{i\in I}$.

Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de $\mathcal{H}$:

- Operador de análisis $\longrightarrow R : \mathcal{H} \to \ell^2(I),\ Rv = \{\langle v, w_i\rangle\}_{i\in I}$.
- Operador de síntesis $\longrightarrow C := R^* : \ell^2(I) \to \mathcal{H},\ Ca = \sum_{i\in I} a_i w_i$.
- Operador de frame:

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Mv := CRv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle w_i$$

Propiedades: R es acotado, C es acotado y sobreyectivo, M es autoadjunto, positivo e inversible.

Además:

$$v = M^{-1}Mv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle M^{-1} w_i$$

La sucesión $\{M^{-1}w_i\}_{i\in I}$ se llama frame dual canónico de $\{w_i\}_{i\in I}$.

Si $\{w_i\}_{i\in I}$ es un frame de $\mathcal{H}$:

- Operador de análisis $\longrightarrow R: \mathcal{H} \to \ell^2(I),\ Rv = \{\langle v, w_i\rangle\}_{i\in I}$.

- Operador de síntesis $\longrightarrow C := R^* : \ell^2(I) \to \mathcal{H},\ Ca = \sum_{i\in I} a_i w_i$.

- Operador de frame:

$$M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad Mv := CRv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle w_i$$

Propiedades: R es acotado, C es acotado y sobreyectivo, M es autoadjunto, positivo e inversible.

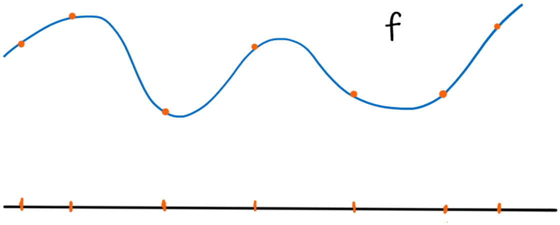
Además:

$$v = M^{-1}Mv = \sum_{i\in I} \langle v, w_i\rangle M^{-1} w_i$$

La sucesión $\{M^{-1}w_i\}_{i\in I}$ se llama frame dual canónico de $\{w_i\}_{i\in I}$.

El problema de muestreo

Recuperar una función $f \in V \subset L^2(\mathbb{R})$ a partir de un conjunto de muestras $\{f(x_i) : i \in I\}$, donde V es un subespacio apropiado e I es un conjunto (a lo sumo) numerable de índices.



En un RKHS: $f(x_i) = \langle f, k_{x_i} \rangle$

Muestreo y frames

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable.

Todo elemento $h \in \mathcal{H}$ se puede recuperar a partir de las "muestras" $\{\langle h, g_i\rangle\}_{i\in I}$ si y solo si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $h \in \mathcal{H}$

$$C_1\|h\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle h, g_i\rangle|^2 \leq C_2\|h\|^2.$$

i.e., $\{g_i\}_{i\in I}$ es un frame para $\mathcal{H}$.

En ese caso,

$$h = \sum_{i\in I} \langle h, g_i\rangle \widetilde{g}_i, \quad h \in \mathcal{H}$$

donde $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in I}$ se llama un *frame dual* de $\{g_i\}_{i\in I}$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable.

Todo elemento $h \in \mathcal{H}$ se puede recuperar a partir de las "muestras" $\{\langle h, g_i \rangle\}_{i\in I}$ si y solo si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que para todo $h \in \mathcal{H}$

$$C_1\|h\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle h, g_i\rangle|^2 \leq C_2\|h\|^2.$$

i.e., $\{g_i\}_{i\in I}$ es un frame para $\mathcal{H}$.

En ese caso,

$$h = \sum_{i\in I} \langle h, g_i\rangle \widetilde{g}_i, \quad h \in \mathcal{H}$$

donde $\{\widetilde{g}_i\}_{i\in I}$ se llama un *frame dual* de $\{g_i\}_{i\in I}$

Muestreo dinámico

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador lineal y acotado, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$.

¿Se puede recuperar $h \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle h, T^j f_i \rangle : i \in I, j \in K\}$?

$t = 0$	$t = 1$		$t = j$
$\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$	$\{\langle f, Tf_i \rangle\}_{i \in I}$	$\dots$	$\{\langle f, T^j f_i \rangle\}_{i \in I}$

Encontrar condiciones para que $\{T^j f_i : i \in I, j \in K\}$ sea un frame para $\mathcal{H}$, $I \subset \mathbb{N}_0, K \subset \mathbb{N}_0$.

Aldroubi, A., Cabrelli, C., Molter, U. and Tang, S., Dynamical sampling. Applied and Computational Harmonic Analysis, 42(3), 378-401 (2017)4.

Muestreo dinámico

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador lineal y acotado, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$.

¿Se puede recuperar $h \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle h, T^j f_i \rangle : i \in I, j \in K\}$?

$t = 0$	$t = 1$		$t = j$
$\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$	$\{\langle f, Tf_i \rangle\}_{i \in I}$	$\dots$	$\{\langle f, T^j f_i \rangle\}_{i \in I}$

Encontrar condiciones para que $\{T^j f_i : i \in I, j \in K\}$ sea un frame para $\mathcal{H}$, $I \subset \mathbb{N}_0, K \subset \mathbb{N}_0$.

Aldroubi, A., Cabrelli, C., Molter, U. and Tang, S., Dynamical sampling. Applied and Computational Harmonic Analysis, 42(3), 378-401 (2017)4.

Muestreo dinámico

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador lineal y acotado, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$.

¿Se puede recuperar $h \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle h, T^j f_i \rangle : i \in I, j \in K\}$?

$t = 0$	$t = 1$		$t = j$
$\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$	$\{\langle f, Tf_i \rangle\}_{i \in I}$	$\dots$	$\{\langle f, T^j f_i \rangle\}_{i \in I}$

Encontrar condiciones para que $\{T^j f_i : i \in I, j \in K\}$ sea un frame para $\mathcal{H}$, $I \subset \mathbb{N}_0, K \subset \mathbb{N}_0$.

Aldroubi, A., Cabrelli, C., Molter, U. and Tang, S., Dynamical sampling. Applied and Computational Harmonic Analysis, 42(3), 378-401 (2017)4.

Muestreo dinámico

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador lineal y acotado, $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$.

¿Se puede recuperar $h \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle h, T^j f_i \rangle : i \in I, j \in K\}$?

$t = 0$	$t = 1$		$t = j$
$\{\langle f, f_i \rangle\}_{i \in I}$	$\{\langle f, Tf_i \rangle\}_{i \in I}$	$\dots$	$\{\langle f, T^j f_i \rangle\}_{i \in I}$

Encontrar condiciones para que $\{T^j f_i : i \in I, j \in K\}$ sea un frame para $\mathcal{H}$, $I \subset \mathbb{N}_0, K \subset \mathbb{N}_0$.

Aldroubi, A., Cabrelli, C., Molter, U. and Tang, S., Dynamical sampling. Applied and Computational Harmonic Analysis, 42(3), 378-401 (2017)4.

Muestreo dinámico en espacios invariantes por traslaciones

Sea $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un subespacio cerrado, T el operador de traslación por 1, i.e., $Tf(x) = f(x-1)$ y $L : V \to V$ un operador lineal y acotado.

- V es invariante por traslaciones, i.e, $TV \subseteq V$.
- L conmuta con las traslaciones, i.e., $TL = LT$ $(T^k L = LT^k,\ k \in \mathbb{Z})$.

Encontrar condiciones para que $\{L^j T^k \varphi : j \in J, k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Phi\}$ sea un frame de V, para cierto conjunto de índices J.

Caso: L normal $(LL^* = L^*L)$ y V es finitamente generado, es decir, existe $\ell \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ tal que $V = \overline{\text{span}}\{T^k f_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, \ell\}$.

A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, Appl. Comput. Harmon. Anal., 51, (2021), 258–274.

Muestreo dinámico en espacios invariantes por traslaciones

Sea $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un subespacio cerrado, T el operador de traslación por 1, i.e., $Tf(x) = f(x-1)$ y $L : V \to V$ un operador lineal y acotado.

- V es invariante por traslaciones, i.e, $TV \subseteq V$.
- L conmuta con las traslaciones, i.e., $TL = LT$ $(T^k L = LT^k,\ k \in \mathbb{Z})$.

Encontrar condiciones para que $\{L^j T^k \varphi : j \in J, k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Phi\}$ sea un frame de V, para cierto conjunto de índices J.

Caso: L normal $(LL^* = L^*L)$ y V es finitamente generado, es decir, existe $\ell \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ tal que $V = \overline{\text{span}}\{T^k f_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, \ell\}$.

A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, Appl. Comput. Harmon. Anal., 51, (2021), 258–274.

Sea $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un subespacio cerrado, T el operador de traslación por 1, i.e., $Tf(x) = f(x-1)$ y $L : V \to V$ un operador lineal y acotado.

- V es invariante por traslaciones, i.e, $TV \subseteq V$.
- L conmuta con las traslaciones, i.e., $TL = LT$ ($T^k L = LT^k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Encontrar condiciones para que $\{L^j T^k \varphi : j \in J, k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Phi\}$ sea un frame de V, para cierto conjunto de índices J.

Caso: L normal ($LL^* = L^*L$) y V es finitamente generado, es decir, existe $\ell \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ tal que $V = \overline{\text{span}}\{T^k f_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., \ell\}$.

A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, Appl. Comput. Harmon. Anal., 51, (2021), 258–274.

Muestreo dinámico en espacios invariantes por traslaciones

Sea $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un subespacio cerrado, T el operador de traslación por 1, i.e., $Tf(x) = f(x-1)$ y $L : V \to V$ un operador lineal y acotado.

- V es invariante por traslaciones, i.e, $TV \subseteq V$.
- L conmuta con las traslaciones, i.e., $TL = LT$ ($T^k L = LT^k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Encontrar condiciones para que $\{L^j T^k \varphi : j \in J, k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Phi\}$ sea un frame de V, para cierto conjunto de índices J.

Caso: L normal ($LL^* = L^*L$) y V es finitamente generado, es decir, existe $\ell \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ tal que $V = \overline{\operatorname{span}}\{T^k f_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., \ell\}$.

A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, Appl. Comput. Harmon. Anal., 51, (2021), 258–274.

Sea $V \subseteq L^2(\mathbb{R})$ un subespacio cerrado, T el operador de traslación por 1, i.e., $Tf(x) = f(x-1)$ y $L : V \to V$ un operador lineal y acotado.

- V es invariante por traslaciones, i.e, $TV \subseteq V$.
- L conmuta con las traslaciones, i.e., $TL = LT$ $(T^k L = LT^k,\ k \in \mathbb{Z})$.

Encontrar condiciones para que $\{L^j T^k \varphi : j \in J, k \in \mathbb{Z}, \varphi \in \Phi\}$ sea un frame de V, para cierto conjunto de índices J.

Caso: L normal $(LL^* = L^* L)$ y V es finitamente generado, es decir, existe $\ell \in \mathbb{N}$ y $\{f_i\}_{i=1}^{\ell}$ tal que $V = \overline{\text{span}}\{T^k f_i : k \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., \ell\}$.

A. Aguilera, C. Cabrelli, D. Carbajal and V. Paternostro, Dynamical sampling for shift-preserving operators, Appl. Comput. Harmon. Anal., 51, (2021), 258–274.

Una generalización

Consideramos:

- $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable.
- T, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $TL = LT$, y T inversible.
- $\{w_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ colección a lo sumo numerable de vectores.

Caracterizar las tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i \in I})$ tales que el sistema

$$\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$$

forma un frame (frame de Parseval) de $\mathcal{H}$.

Consideramos $J = \mathbb{N}_0$ ó $\mathbb{Z}$.

Una generalización

Consideramos:

- $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable.
- T, $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $TL = LT$, y T inversible.
- $\{w_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ colección a lo sumo numerable de vectores.

Caracterizar las tuplas $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i \in I})$ tales que el sistema

$$\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$$

forma un frame (frame de Parseval) de $\mathcal{H}$.

Consideramos $J = \mathbb{N}_0$ ó $\mathbb{Z}$.

Similaridad

Dos tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo acotado $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que satisface

$$C(v_i) = w_i \ \ \forall\, i \in I, \quad T_2 C = C T_1 \quad \text{y} \quad L_2 C = C L_1 \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "{T_1, L_1}"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "{T_2, L_2}"] \\ \mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] & \mathcal{H}_2 \end{tikzcd}$$

- La relación de similaridad es una relación de equivalencia.
- La relación de similaridad preserva la propiedad de frame.
- Si C es unitario, las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes*.

Similaridad

Dos tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo acotado $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que satisface

$$C(v_i) = w_i \ \ \forall\ i \in I, \quad T_2 C = C T_1 \quad \text{y} \quad L_2 C = C L_1 \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{C} & \mathcal{H}_2 \\ {\scriptstyle T_1, L_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_2, L_2} \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{C} & \mathcal{H}_2 \end{array}$$

- La relación de similaridad es una relación de equivalencia.
- La relación de similaridad preserva la propiedad de frame.
- Si C es unitario, las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes*.

Similaridad

Dos tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo acotado $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que satisface

$$C(v_i) = w_i \quad \forall\ i \in I, \qquad T_2 C = C T_1 \quad \text{y} \quad L_2 C = C L_1 \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{C} & \mathcal{H}_2 \\ {\scriptstyle T_1, L_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_2, L_2} \\ \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{C} & \mathcal{H}_2 \end{array}$$

- La relación de similaridad es una relación de equivalencia.
- La relación de similaridad preserva la propiedad de frame.
- Si C es unitario, las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes*.

Similaridad

Dos tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo acotado $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que satisface

$$C(v_i) = w_i \ \ \forall\ i \in I, \quad T_2 C = C T_1 \quad \text{y} \quad L_2 C = C L_1 \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "{T_1, L_1}"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "{T_2, L_2}"] \\
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] & \mathcal{H}_2
\end{tikzcd}$$

- La relación de similaridad es una relación de equivalencia.
- La relación de similaridad preserva la propiedad de frame.
- Si C es unitario, las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes*.

Similaridad

Dos tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *similares* si existe un isomorfismo acotado $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ que satisface

$$C(v_i) = w_i \;\; \forall\, i \in I, \quad T_2 C = C T_1 \quad \text{y} \quad L_2 C = C L_1 \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] \arrow[d, "{T_1, L_1}"'] & \mathcal{H}_2 \arrow[d, "{T_2, L_2}"] \\
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "C"] & \mathcal{H}_2
\end{tikzcd}$$

- La relación de similaridad es una relación de equivalencia.
- La relación de similaridad preserva la propiedad de frame.
- Si C es unitario, las tuplas $(\mathcal{H}_1, T_1, L_1, \{v_i\}_{i\in I})$ y $(\mathcal{H}_2, T_2, L_2, \{w_i\}_{i\in I})$ son *unitariamente equivalentes*.

Idea

Caso $J = \{0\}$, $\#I = 1$: Si $\{T^k w : k \in \mathbb{Z}\}$ es un frame, su operador de síntesis $C : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$, $Cf = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k T^k w$ pero como $\ell^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(\mathbb{T})$, podemos escribir $C : L^2(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}$.

- $\ker(C)^\perp \subseteq L^2(\mathbb{T})$ es invariante por U y U^*, donde $Uf(z) = zf(z)$ $\Rightarrow \ker(C)^\perp = L^2(B)$ para algún conjunto de Borel $B \subset \mathbb{T}$.
- $U_B = U|_{L^2(B)} : L^2(B) \to L^2(B)$,

Teorema

$(\mathcal{H}, T, w)$ genera un frame de $\mathcal{H}$ si y solo si es similar a $(L^2(B), U_B, 1_B)$ para algún conjunto de Borel $B \subset \mathbb{T}$.

Christensen O., Hasannasab M., and Philipp F., Frame properties of operator orbits, Math. Nachr. 293 (2020), 52-66.

Idea

Caso $J = \{0\}$, $\#I = 1$: Si $\{T^k w : k \in \mathbb{Z}\}$ es un frame, su operador de síntesis $C : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}$, $Cf = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k T^k w$ pero como $\ell^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(\mathbb{T})$, podemos escribir $C : L^2(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}$.

- $\ker(C)^\perp \subseteq L^2(\mathbb{T})$ es invariante por U y U^*, donde $Uf(z) = zf(z)$ $\Rightarrow \ker(C)^\perp = L^2(B)$ para algún conjunto de Borel $B \subset \mathbb{T}$.
- $U_B = U|_{L^2(B)} : L^2(B) \to L^2(B)$,

Teorema

$(\mathcal{H}, T, w)$ genera un frame de $\mathcal{H}$ si y solo si es similar a $(L^2(B), U_B, 1_B)$ para algún conjunto de Borel $B \subset \mathbb{T}$.

Christensen O., Hasannasab M., and Philipp F., Frame properties of operator orbits, Math. Nachr. 293 (2020), 52-66.

Nuestro caso: Supongamos que el sistema $\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$ es un frame. Su operador de síntesis es:

$$C : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{kj} T^k L^j w_i$$

Observación: $\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \cong L^2(\mathbb{T}, (H^2)^{\#I}) \cong L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Objetivo: Construir una tupla "básica" $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ tal que

$$(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I}) \text{ es similar a } (\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$$

con $\mathcal{N}$ es un subconjunto de un espacio apropiado y U, A dos operadores actuando en $\mathcal{N}$.

Nuestro caso: Supongamos que el sistema $\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$ es un frame. Su operador de síntesis es:

$$C : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{kj} T^k L^j w_i$$

Observación: $\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \cong L^2(\mathbb{T}, (H^2)^{\#I}) \cong L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Objetivo: Construir una tupla "básica" $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ tal que

$$(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i \in I}) \text{ es similar a } (\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$$

con $\mathcal{N}$ es un subconjunto de un espacio apropiado y U, A dos operadores actuando en $\mathcal{N}$.

Nuestro caso: Supongamos que el sistema $\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$ es un frame. Su operador de síntesis es:

$$C : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{kj} T^k L^j w_i$$

Observación: $\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \cong L^2(\mathbb{T}, (H^2)^{\# I}) \cong L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Objetivo: Construir una tupla "básica" $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ tal que

$$(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I}) \text{ es similar a } (\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i\in I})$$

con $\mathcal{N}$ es un subconjunto de un espacio apropiado y U, A dos operadores actuando en $\mathcal{N}$.

Nuestro caso: Supongamos que el sistema $\{T^k L^j w_i : k \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I\}$ es un frame. Su operador de síntesis es:

$$C : \ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \to \mathcal{H}, \qquad Cf = \sum_{k,j,i} f^i_{kj} T^k L^j w_i$$

Observación: $\ell^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 \times I) \cong L^2(\mathbb{T}, (H^2)^{\# I}) \cong L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Objetivo: Construir una tupla "básica" $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ tal que

$$(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i \in I}) \text{ es similar a } (\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$$

con $\mathcal{N}$ es un subconjunto de un espacio apropiado y U, A dos operadores actuando en $\mathcal{N}$.

Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable.

$$L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathcal{K} : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\lambda < \infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), g(\lambda)\rangle_{\mathcal{K}} \, d\lambda, \quad f, g \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}).$$

Funciones coordenadas de f respecto a la base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$:
$f_i := \langle f(\cdot), \varepsilon_i\rangle_{\mathcal{K}} \in L^2(\mathbb{T})$

$$f(\lambda) = \sum_{i\in I} \langle f(\lambda), \varepsilon_i\rangle_{\mathcal{K}} \varepsilon_i = \sum_{i\in I} f_i(\lambda)\varepsilon_i, \quad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) = L^2(\mathbb{T})$.

Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert separable.

$$L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathcal{K} : f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{T}} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{K}}^2 \, d\lambda < \infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_{\mathcal{K}} \, d\lambda, \quad f, g \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}).$$

Funciones coordenadas de f respecto a la base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{K}$:
$f_i := \langle f(\cdot), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}} \in L^2(\mathbb{T})$

$$f(\lambda) = \sum_{i \in I} \langle f(\lambda), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{K}} \varepsilon_i = \sum_{i \in I} f_i(\lambda) \varepsilon_i, \quad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) = L^2(\mathbb{T})$.

El espacio de Hardy vectorial

$$H^2_{\mathcal{K}} = H^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) := \{f \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) : f_i \in H^2 \text{ para todo } i \in I\}$$

Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $H^2_{\mathcal{K}} = H^2$.

Operador shift:

- $U : L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$,

$$Uf(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T},\ f \in L^2(\mathbb{T},\mathcal{K}),$$

  shift bilateral en $L^2(\mathbb{T},\mathcal{K})$. U es unitario.

- $S : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$, $U|_{H^2_{\mathcal{K}}}$ es el shift unilateral en $H^2_{\mathcal{K}}$. S es una isometría.

El espacio de Hardy vectorial

$$H^2_{\mathcal{K}} = H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) : f_i \in H^2 \text{ para todo } i \in I\}$$

Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $H^2_{\mathcal{K}} = H^2$.

Operador shift:

- $U : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$,

$$Uf(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T},\ f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}),$$

  shift bilateral en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. U es unitario.

- $S : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$, $U|_{H^2_{\mathcal{K}}}$ es el shift unilateral en $H^2_{\mathcal{K}}$. S es una isometría.

El espacio de Hardy vectorial

$$H^2_{\mathcal{K}} = H^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) : f_i \in H^2 \text{ para todo } i \in I\}$$

Si $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $H^2_{\mathcal{K}} = H^2$.

Operador shift:

- $U : L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}) \to L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$,

$$Uf(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T},\ f \in L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K}),$$

  shift bilateral en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$. U es unitario.

- $S : H^2_{\mathcal{K}} \to H^2_{\mathcal{K}}$, $U|_{H^2_{\mathcal{K}}}$ es el shift unilateral en $H^2_{\mathcal{K}}$. S es una isometría.

"Levantamiento" de S y b.o.n. de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$

Consideramos $\mathcal{K} = H^2_{\ell^2(I)}$ en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ base canónica de $\ell^2(I)$.

Definimos $\widehat{S} : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ por

$$\widehat{S} f(\lambda) = S(f(\lambda)), \qquad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T},\ f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}),$$

donde S es el shift unilateral en $H^2_{\ell^2(I)}$.

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \arrow[r, "\widehat{S}"] \arrow[d, "ev_\lambda"'] & L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \arrow[d, "ev_\lambda"] \\ H^2_{\ell^2(I)} \arrow[r, "S"] & H^2_{\ell^2(I)} \end{tikzcd}$$

Propiedades:

- $\widehat{S}$ y U conmutan.
- $\{U^k \widehat{S}^j \varepsilon_i : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I\}$ es una b.o.n de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Consideramos $\mathcal{K} = H^2_{\ell^2(I)}$ en $L^2(\mathbb{T}, \mathcal{K})$ y $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ base canónica de $\ell^2(I)$.

Definimos $\widehat{S} : L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \to L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ por

$$\widehat{S}f(\lambda) = S(f(\lambda)), \qquad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T},\ f \in L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}),$$

donde S es el shift unilateral en $H^2_{\ell^2(I)}$.

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) & \xrightarrow{\widehat{S}} & L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)}) \\
{\scriptstyle ev_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ev_\lambda} \\
H^2_{\ell^2(I)} & \xrightarrow{S} & H^2_{\ell^2(I)}
\end{array}$$

Propiedades:

- $\widehat{S}$ y U conmutan.
- $\{U^k\widehat{S}^j\varepsilon_i : k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}_0, i \in I\}$ es una b.o.n de $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$.

Tuplas básicas en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$

- $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.
- $A : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$, i.e., $A = P_{\mathcal{N}} \widehat{S}|_{\mathcal{N}}$.
- $\varphi_i = P_{\mathcal{N}} \varepsilon_i$ con $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ la base canónica de $\ell^2(I)$.

Proposición

La tupla $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ genera un frame de Parseval.

Tuplas básicas en $L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$

- $\mathcal{N} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.
- $A : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$, i.e., $A = P_{\mathcal{N}} \widehat{S}|_{\mathcal{N}}$.
- $\varphi_i = P_{\mathcal{N}} \varepsilon_i$ con $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ la base canónica de $\ell^2(I)$.

Proposición

La tupla $(\mathcal{N}, U, A, \{\varphi_i\}_{i \in I})$ genera un frame de Parseval.

Algunos resultados

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame si y solo si es similar a una única tupla básica $(\mathcal{N}, U, P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}}, \{P_{\mathcal{N}}\varepsilon_i\}_{i\in I})$.

$P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N} = \ker(C)^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ es invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla básica.

Algunos resultados

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame si y solo si es similar a una única tupla básica $(\mathcal{N}, U, P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}}, \{P_{\mathcal{N}}\varepsilon_i\}_{i\in I})$.

$P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N} = \ker(C)^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ es invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla básica.

Algunos resultados

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame si y solo si es similar a una única tupla básica $(\mathcal{N}, U, P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}}, \{P_{\mathcal{N}}\varepsilon_i\}_{i\in I})$.

$P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N} = \ker(C)^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ es invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ genera un frame de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla básica.

Algunos resultados

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ *genera un frame si y solo si es similar a una única tupla básica* $(\mathcal{N}, U, P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}}, \{P_{\mathcal{N}}\varepsilon_i\}_{i\in I})$.

$P_{\mathcal{N}}\widehat{S}|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es la compresión de $\widehat{S}$ a $\mathcal{N}$.

$\mathcal{N} = \ker(C)^{\perp} \subseteq L^2(\mathbb{T}, H^2_{\ell^2(I)})$ es invariante por U, U^* y $\widehat{S}^*$.

Teorema

Una tupla $(\mathcal{H}, T, L, \{w_i\}_{i\in I})$ *genera un frame de Parseval si y solo si es unitariamente equivalente a una tupla básica.*

Referencias

- O. Christensen, M. Hasannasab, and F. Philipp, Frame properties of operator orbits, Math. Nachrichten, **293**, 1 (2019), 52-66.
- S.R.Garcia, J. Mashreghi, and W.T. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge U.P. (2015).
- P. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), **1961**, (1961), 102–112.
- H. Helson, Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, London, 1964.
- B. Sz. Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces. Springer, 2010.
- H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant Subspaces, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

¡Gracias!