s-filtros en Semigrupos Implicativos

Valeria M. Castaño - Daniela Montangie

Universidad Nacional del Comahue

Septiembre 2022

Nemitz,W. C.: Implicative semi-lattices, Trans. Amer. Math. Soc. **117**, 128-142 (1965).

Definición

Un semi-reticulado implicativo es una estructura $\langle A, \wedge, \to, 1\rangle$ tal que para todo $a, b, c \in A$ se cumple:

(1) $\langle A, \wedge, 1\rangle$ *es un semi-reticulado con último elemento 1,*

(2) $c \wedge a \leq b$ *si y sólo si* $c \leq a \to b$.

Chan, M. W., Shum, K. P.: Homomorphisms of Implicative Semigroups. Semigroup Forum **46**, 7-15 (1993).

Definición

Un semigrupo implicativo negativamente ordenado es una estructura $\langle A, \leq, \cdot, \to\rangle$ tal que para todo $a, b, c \in A$ se cumple:

(1) $\langle A, \leq\rangle$ *es un poset,*

(2) $\langle A, \cdot\rangle$ *es un semigrupo,*

(3) *si* $a \leq b$ *entonces* $c \cdot a \leq c \cdot b$ *y* $a \cdot c \leq b \cdot c$,

(4) $a \cdot b \leq a$ *y* $a \cdot b \leq b$,

(5) $c \cdot a \leq b$ *si y sólo si* $c \leq a \to b$.

Semigrupos implicativos

Obs.

- En un *n.p.o* semigrupo implicativo siempre existe el último elemento.
- Si **A** es un *n.p.o* semigrupo implicativo integral entonces

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x \rightarrow y = 1$$

Definición

Un semigrupo implicativo es una estructura $\langle A, \leq, \cdot, \rightarrow, 1 \rangle$ *tal que para todo* $a, b, c \in A$ *se cumple:*

(1) $\langle A, \leq, 1 \rangle$ *es un poset con último elemento* 1,

(2) $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ *es un monoide con identidad 1,*

(3) *si* $a \leq b$ *entonces* $c \cdot a \leq c \cdot b$,

(4) $c \cdot a \leq b$ *si y sólo si* $c \leq a \rightarrow b$.

Obs: n.p.o semigrupo implicativo con identidad 1 = semigrupos implicatvos.

Semigrupos implicativos

Proposición

Un álgebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \cdot, \rightarrow, 1\rangle$ *de tipo* $(2,2,0)$ *es un semigrupo implicativo si y sólo si satisface :*

($IS1$) $a \cdot (b \cdot c) \approx (a \cdot b) \cdot c$,

($IS2$) $a \cdot 1 \approx a$ *y* $1 \cdot a \approx a$,

($IS3$) *si* $a \rightarrow b \approx 1$ *entonces* $(c \cdot a) \rightarrow (c \cdot b) \approx 1$,

($IS4$) $a \rightarrow 1 \approx 1$ *y* $1 \rightarrow a \approx a$,

($IS5$) $a \rightarrow a \approx 1$,

($IS6$) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((c \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow b)) \approx 1$,

($IS7$) $a \rightarrow (b \rightarrow c) \approx (a \cdot b) \rightarrow c$,

($IS8$) *si* $a \rightarrow b \approx 1$ *y* $b \rightarrow a \approx 1$ *entonces* $a \approx b$.

$\mathcal{IS}$: cuasivariedad de los semigrupos implicativos.

Obs:

- La clase de los semigrupos implicativos **conmutativos** coincide con la clase de los pocrims (monoide parcialmente ordenado integral residuado y conmutativo).
- Los pocrims son los $\{\cdot, \rightarrow, 1\}$-subreductos de los reticulados residuados integrales conmutativos.

Definición

Un Reticulado residuado es una estructura $\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1\rangle$ *tal que*

- $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ *es un reticulado,*
- $\langle A, \cdot, 1\rangle$ *es un monoide,*
- $x \cdot y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z \iff y \leq x \rightsquigarrow z.$

$\langle A, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1\rangle$ se dice *integral* si $a \leq 1$ para todo $a \in A$.

Proposición

Los semigrupos implicativos son los $\{\cdot, \rightarrow, 1\}$*-subreductos de los reticuladdos residuados integrales.*

$$\mathbf{A} = \langle A, \cdot, \rightarrow 1\rangle \quad \longmapsto \quad \mathbf{L} = \langle P_d(A), \cap, \cup, A\rangle \text{ ret. distributivo}$$

En $\mathbf{L}$ definimos:

- $X \cdot Y = \downarrow\{x \cdot y, x \in X, y \in Y\}$
- $X \rightarrow Y = \bigcup\{Z \in P_d(A) : Z \cdot X \subseteq Y\}$
- $X \rightsquigarrow Y = \bigcup\{Z \in P_d(A) : X \cdot Z \subseteq Y\}$

y entonces $\langle L, \cap, \cup, \cdot, \rightarrow, \rightsquigarrow, A\rangle$ es un reticulado residuado tal que

$$\langle \mathbf{A}, \cdot, \rightarrow, 1\rangle \hookrightarrow \langle P_d(A), \cdot, \rightarrow, A\rangle.$$

Semigrupos implicativos

$$\begin{tikzcd} & \langle \mathbf{A}, \wedge, \vee, \cdot, \to, \rightsquigarrow, 1\rangle \arrow[dl, "\text{conmutat.}"'] \arrow[dr, "\text{caso general}"] & \\ \boxed{\text{Pocrims}} & & \boxed{\text{Semigrupos implicativos}} \end{tikzcd}$$

$\{\cdot, \to, 1\}$-**subreductos:** Pocrims $(\to = \rightsquigarrow)$ | Semigrupos implicativos

Congruencias: Sist. deductivos | ?

Sistemas deductivos y *s*-filtros

Un subconjunto no vacío F de $\mathbf{A} = \langle A, \leq, \cdot, \to, 1\rangle$ es un *sistema deductivo* si

(D1) $1 \in F$, $\leftrightarrow$ (D'1) $a, b \in F$ implica $a \cdot b \in F$,

(D2) $a, a \to b \in F$ implica $b \in F$. (D'2) $a \leq b$ y $a \in F$ implica $b \in F$.

- $Ds_g(X) = \{a \in A : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq a, \text{ para algún } x_1, \ldots, x_n \in X\}$.
- $\langle \mathrm{Ds}(\boldsymbol{A}), \wedge, \vee, A\rangle$ es un reticulado acotado donde
  - $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$
  - $F_1 \vee F_2 = Ds_g(F_1 \cup F_2) = \{a \in A : x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq a, \text{ para algún } x_1, \ldots, x_n \in F_1 \cup F_2\}$

Jun,Y. B., Kim, K. H.: On ideales of Implicative Semigroups. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **27**, 77-82 (2001).

Definición

Sea **A** *un semigrupo implicativo. Un subconjunto no vacío* F *de* A *es un s-filtro de* **A** *si cumple*

($sF1$) $a \in A$ *y* $f \in F$ *implica* $a \to f \in F$,

($sF2$) $a \in A$ *y* $f_1, f_2 \in F$ *implica* $(f_1 \to (f_2 \to a)) \to a \in F$.

Obs: $s\text{-}\mathrm{Fi}\,(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathrm{Ds}\,(\boldsymbol{A})$.

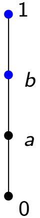
Sistemas deductivos y s-filtros

$\mathrm{Ds}\,(\boldsymbol{A}) \nsubseteq s\text{-}\mathrm{Fi}\,(\boldsymbol{A})$.

Contraejemplo:
$A = \{0, a, b, 1\}$ semigrupo implicativo donde

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1



$F = \{1, b\}$ es un sistema deductivo pero no es un s-filtro.

En efecto, $1, b \in F$ pero

$$(b \to (1 \to 0)) \to 0 = (b \to 0) \to 0 = a \to 0 = a \notin F.$$

Sistemas deductivos y s-filtros

Caracterización de los s-filtros:

$F \neq \emptyset$ es s-filtro si y sólo si

1. - $1 \in F$,
   - $(f \to a) \to a \in F$ para todo $f \in F$ y $a \in A$,
   - Si $f \in F$ y $f \leq a$, entonces $a \in F$.
2. - $1 \in F$,
   - $a \to (f \to b) \in F$ y $f \in F$ implica $a \to b \in F$, para todo $a, b \in A$.
3. - F es un sistema deductivo,
   - $a \to b \in F$ implies $(b \to c) \to (a \to c) \in F$

Proposición

Sea $\mathbf{A}$ *un semigrupo implicativo y* $F \in s\text{-}Fi(\mathbf{A})$. *Si* $a \to b \in F$ *entonces* $(c \cdot a) \to (c \cdot b) \in F$.

Sea **A** un semigrupo implicativo y $F_1, F_2 \in s\text{-}Fi(\mathbf{A})$ entonces

- $$\begin{aligned} sF_g(F_1 \cup F_2) &= \{a \in A : x \cdot y \leq a, \text{ para algún } x \in F_1, y \in F_2\} \\ &= \{a \in A : x \to a \in F_2, \text{ para algún } x \in F_1\}. \end{aligned}$$

- $sF_g(F_1 \cup F_2) = Ds_g(F_1 \cup F_2)$.

Proposición

$\langle s\text{-}Fi(\mathbf{A}), \wedge, \vee, \{1\}, A\rangle$ es un subreticulado distributivo de $\langle Ds(\mathbf{A}), \wedge, \vee, \{1\}, A\rangle$.

Obs. Si $\boldsymbol{A}$ es un semigrupo implicativo conmutativo entonces

$$s\text{-}\mathrm{Fi}\,(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Ds}\,(\boldsymbol{A})\,.$$

Congruencias relativas

Definición

Sea $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad. Una congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ *se dice $\mathcal{Q}$-congruencia si* $\mathbf{A}/\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$

$\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$: conjunto de congruencias relativas sobre $\mathbf{A}$.

Si $\mathbf{A}$ es un semigrupo implicativo y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{IS}}(\mathbf{A})$ entonces

$$\mathbf{A}/\theta = \langle A/\theta, \cdot, \to, 1/\theta \rangle$$

es un semigrupo implicativo donde

- $a/\theta \cdot b/\theta = (a \cdot b)/\theta$,
- $a/\theta \to b/\theta = (a \to b)/\theta$,
- $a/\theta \leq b/\theta$ si y sólo si $a/\theta \to b/\theta = 1/\theta$,
- $1/\theta$ es el último elemento y el elemento identidad.

Congruencias relativas

Proposición

Sea **A** *un semigrupo implicativo y* $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{IS}}(\mathbf{A})$ *entonces para todo* $a, b, c \in A$*:*

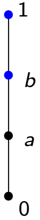
(1) $1/\theta \in \mathrm{Ds}\,(\boldsymbol{A})$,

(2) $a \to b \in 1/\theta$ *implica* $(c \cdot a) \to (c \cdot b) \in 1/\theta$ *y* $(b \to c) \to (a \to c) \in 1/\theta$.

Si $A = \{0, a, b, 1\}$ semigrupo implicativo donde

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1



para el sistema deductivo $F = \{1, b\}$ no hay ninguna congruencia θ tal que $1/\theta = F$.

Congruencias relativas

Sea **A** un semigrupo implicativo,

- si θ es una $\mathcal{IS}$-congruencia de **A** entonces

$$1/\theta \in s\text{-}Fi(\boldsymbol{A}).$$

  Además, $\theta_{1/\theta} = \theta$.

- si $F \in s\text{-}Fi(\boldsymbol{A})$ entonces la relación $\theta_F \subseteq A \times A$ dada por:

$$(a, b) \in \theta_F \quad \text{if and only if} \quad a \to b, b \to a \in F$$

  es una $\mathcal{IS}$-congruencia de **A** tal que $1/\theta_F = F$.

Sea **A** un semigrupo implicativo:

- Correspondencia $\mathrm{Con}_{\mathcal{IS}}(\mathbf{A}) \longmapsto s\text{-}Fi(\mathbf{A})$:

$$\theta \longmapsto 1/\theta; \qquad F \longmapsto \theta_F.$$

¡Muchas gracias!

- Chan, M. W., Shum, K. P.: Homomorphisms of Implicative Semigroups. Semigroup Forum **46**, 7-15 (1993).
- Galatos,N., Jipsen, P., Kowalski,T. , Ono, H.: Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics, Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, Elsevier (2007).
- Jun, Y. B., Meng, J., Xin, X. L.: On ordered filters of implicative semigroups, Semigroup Forum **54** no. 1, 75-82 (1997).
- Jun,Y. B., Kim, K. H.: On ideales of Implicative Semigroups. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **27**, 77-82 (2001).
- Kowalski,T., Ono, H.: Residuated lattices: an algebraic glimpse at logics without contraction, Japan Advanced Institute of Science and Technology (2001).
- Nemitz,W. C.: Implicative semi-lattices, Trans. Amer. Math. Soc. **117**, 128-142 (1965).