

Estudio de existencia y unicidad de solución de un problema de tipo Lotka-Volterra fraccionario con efecto Allee y cosecha

Melani Barrios, Daiana Bravo, Gabriela Reyero

UMA 2022



Índice

- 1 **Objetivos**
- 2 **Modelo depredador-presa fraccionario**
 - Cálculo fraccionario
 - Modelo fraccionario
- 3 **Existencia y unicidad**
 - Existencia y unicidad de soluciones de PVIF
 - Existencia y unicidad de soluciones del problema
- 4 **Invarianza no negativa**
- 5 **Ejemplos**
- 6 **Conclusiones**
- 7 **Bibliografía**

Objetivos

Estudiar un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de las presas y tiene en cuenta una cosecha de depredadores.

Objetivos

Estudiar un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de las presas y tiene en cuenta una cosecha de depredadores.

- Demostrar la existencia y unicidad de soluciones.

Objetivos

Estudiar un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de las presas y tiene en cuenta una cosecha de depredadores.

- Demostrar la existencia y unicidad de soluciones.
- Probar la invarianza no negativa de las soluciones.

Objetivos

Estudiar un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de las presas y tiene en cuenta una cosecha de depredadores.

- Demostrar la existencia y unicidad de soluciones.
- Probar la invarianza no negativa de las soluciones.
- Ejemplificar mediante la utilización de un método numérico fraccionario.

Índice

1 Objetivos

2 Modelo depredador-presa fraccionario

Cálculo fraccionario

Modelo fraccionario

3 Existencia y unicidad

Existencia y unicidad de soluciones de PVIF

Existencia y unicidad de soluciones del problema

4 Invarianza no negativa

5 Ejemplos

6 Conclusiones

7 Bibliografía

Cálculo Fraccionario

Definición: El operador **integral fraccionario de Riemann-Liouville** de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, está definido por:

$${}_a I_t^\alpha [x] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds.$$

Definición: El operador **diferencial fraccionario de Caputo** de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, está definido por:

$${}_a^C D_t^\alpha [x] = {}_a I_t^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dt^n} [x]$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

(Diethelm, 2010)

Cálculo Fraccionario

Definición: El operador **integral fraccionario de Riemann-Liouville** de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, está definido por:

$${}_a I_t^\alpha [x] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds.$$

Definición: El operador **diferencial fraccionario de Caputo** de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, está definido por:

$${}_a^C D_t^\alpha [x] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n x}{dt^n}(s) ds.$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

(Diethelm, 2010)

Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

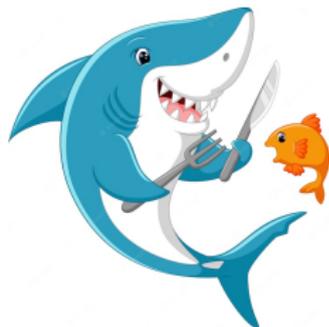
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

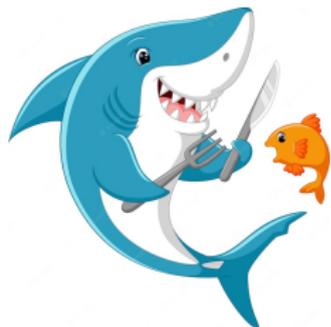
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

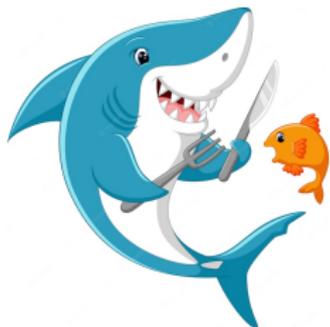
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

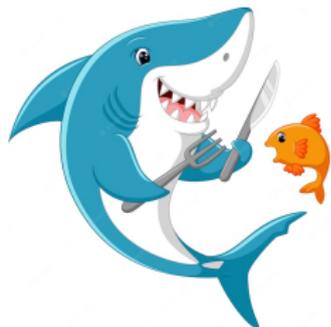
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

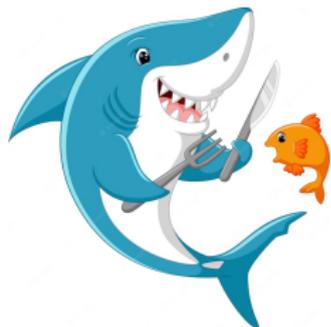
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

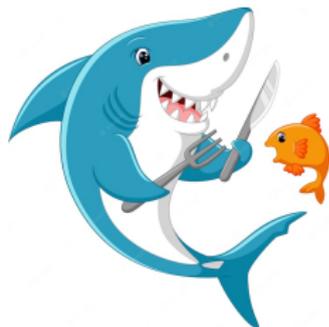
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

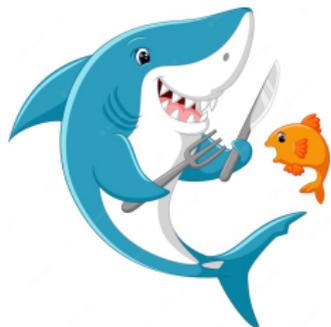
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

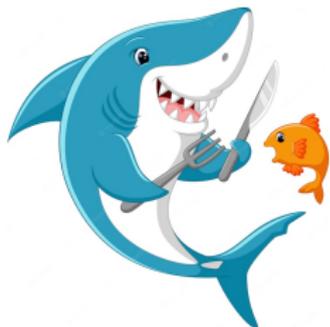
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

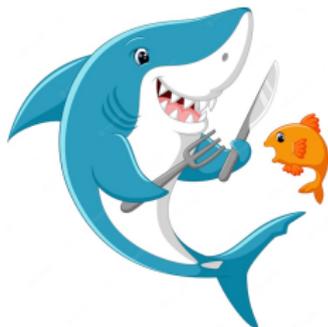
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Modelo fraccionario

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{array} \right.$$

r : tasa de crecimiento intrínseco.

K : capacidad de carga.

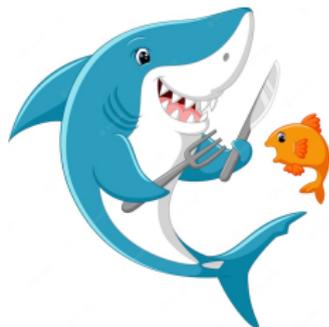
m : umbral del efecto Allee.

b : susceptibilidad de las presas a ser capturadas.

c : capacidad de depredación de los depredadores.

d : tasa de mortalidad de los depredadores.

e : cosecha de los depredadores.



Índice

1 Objetivos

2 Modelo depredador-presa fraccionario

Cálculo fraccionario

Modelo fraccionario

3 Existencia y unicidad

Existencia y unicidad de soluciones de PVIF

Existencia y unicidad de soluciones del problema

4 Invarianza no negativa

5 Ejemplos

6 Conclusiones

7 Bibliografía

Existencia y unicidad

Teorema:

Consideremos

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [u] = f(t, u(t)), \\ u(0) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (1)$$

con $0 < \alpha \leq 1$ y $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Sea $H > 0$, $h^* > 0$, definamos $G := [0, h^*] \times \Omega$ con $\Omega = [x_0 - H, x_0 + H] \times [y_0 - H, y_0 + H]$.

Si $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ es *continua* y satisface una *condición de Lipschitz* con respecto a su segunda variable, existe $h > 0$ y una única función $u \in C[0, h]$ que resuelve el problema de valores iniciales fraccionario (PVIF (1)).

(Diethelm, 2010)

Sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(t, u) = (f_1(t, u), f_2(t, u))$ con $f_1(t, u) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - bxy$ y $f_2(t, u) = cxy - dy - ey$.

- f es continua en G .
- f satisface la condición de Lipschitz, en efecto:
sean $u = (x, y), \bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|f(t, u) - f(t, \bar{u})\| &= |f_1(t, u) - f_1(t, \bar{u})| + |f_2(t, u) - f_2(t, \bar{u})| \\ &\leq L \|u - \bar{u}\| \end{aligned}$$

donde

$$L = \max\{r2H + rm + 3H^2 \frac{r}{K} + 2H \frac{r}{K} m + bH + cH, bH + cH + d + e\}.$$

Sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(t, u) = (f_1(t, u), f_2(t, u))$ con $f_1(t, u) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - bxy$ y $f_2(t, u) = cxy - dy - ey$.

- f es continua en G .
- f satisface la condición de Lipschitz, en efecto:
sean $u = (x, y), \bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$

$$\begin{aligned} \|f(t, u) - f(t, \bar{u})\| &= |f_1(t, u) - f_1(t, \bar{u})| + |f_2(t, u) - f_2(t, \bar{u})| \\ &\leq L\|u - \bar{u}\| \end{aligned}$$

donde

$$L = \max\{r2H + rm + 3H^2 \frac{r}{K} + 2H \frac{r}{K} m + bH + cH, bH + cH + d + e\}.$$

Existe una única solución $u \in C[0, h]$ del sistema
para cada condición inicial $u_0 = (x_0, y_0)$

Índice

1 Objetivos

2 Modelo depredador-presa fraccionario

Cálculo fraccionario

Modelo fraccionario

3 Existencia y unicidad

Existencia y unicidad de soluciones de PVIF

Existencia y unicidad de soluciones del problema

4 Invarianza no negativa

5 Ejemplos

6 Conclusiones

7 Bibliografía

Invarianza no negativa

Teorema:

La solución del modelo planteado permanece en \mathbb{R}_+^2 , $\forall t \geq 0$.

D/

Invarianza no negativa

Teorema:

La solución del modelo planteado permanece en \mathbb{R}_+^2 , $\forall t \geq 0$.

D/

Corolario: Sea $f(t) \in AC[0, T]$, $T > 0$ y ${}_0^C D_t^\alpha [f] \in C(0, T]$ para $0 < \alpha \leq 1$.

- Si ${}_0^C D_t^\alpha [f] \geq 0$ (${}_0^C D_t^\alpha [f] > 0$), $\forall t \in (0, T)$, entonces $f(t)$ es **no decreciente** (creciente) para todo $t \in [0, T]$.
- Si ${}_0^C D_t^\alpha [f] \leq 0$ (${}_0^C D_t^\alpha [f] < 0$), $\forall t \in (0, T)$, entonces $f(t)$ es **no creciente** (decreciente) para todo $t \in [0, T]$.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Caso $x_0 = 0, y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= 0, \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= (-d - e)y_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ e $y(t)$ decrece asintóticamente a cero, pudiendo ser cero a partir de un valor, pero nunca negativa.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Caso $x_0 = 0, y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= 0, \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= (-d - e)y_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ e $y(t)$ decrece asintóticamente a cero, pudiendo ser cero a partir de un valor, pero nunca negativa.

Caso $x_0 > 0, y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) (x_0 - m), \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ y $x(t)$ depende del valor de x_0 .

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Caso $x_0 = 0, y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= 0, \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= (-d - e)y_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ e $y(t)$ decrece asintóticamente a cero, pudiendo ser cero a partir de un valor, pero nunca negativa.

Caso $x_0 > 0, y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) (x_0 - m), \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ y $x(t)$ depende del valor de x_0 .

Caso $x_0 = 0, y_0 = 0$. El sistema no evoluciona.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Caso $x_0 = 0, y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= 0, \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= (-d - e)y_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ e $y(t)$ decrece asintóticamente a cero, pudiendo ser cero a partir de un valor, pero nunca negativa.

Caso $x_0 > 0, y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) (x_0 - m), \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ y $x(t)$ depende del valor de x_0 .

Caso $x_0 = 0, y_0 = 0$. El sistema no evoluciona.

Caso $x_0 > 0, y_0 > 0$. Se analiza similar al primer caso.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$.

Caso $x_0 = 0, y_0 > 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= 0, \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= (-d - e)y_0 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ e $y(t)$ decrece asintóticamente a cero, pudiendo ser cero a partir de un valor, pero nunca negativa.

Caso $x_0 > 0, y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{0+}^\alpha [x] &= rx_0 \left(1 - \frac{x_0}{K}\right) (x_0 - m), \\ {}_0^C D_{0+}^\alpha [y] &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $y(t) = 0 \forall t \in [0, T]$ y $x(t)$ depende del valor de x_0 .

Caso $x_0 = 0, y_0 = 0$. El sistema no evoluciona.

Caso $x_0 > 0, y_0 > 0$. Se analiza similar al primer caso.

$$x(t) \geq 0, y(t) \geq 0 \forall t \in [0, T].$$

Índice

1 Objetivos

2 Modelo depredador-presa fraccionario

Cálculo fraccionario

Modelo fraccionario

3 Existencia y unicidad

Existencia y unicidad de soluciones de PVIF

Existencia y unicidad de soluciones del problema

4 Invarianza no negativa

5 Ejemplos

6 Conclusiones

7 Bibliografía

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(K, 0), P_3(m, 0), P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(K, 0), P_3(m, 0), P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(m, 0), P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(m, 0), P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(0.5, 0), P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(0.5, 0), P_4 \left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{d+e}{cK}\right) \left(\frac{d+e}{c} - m\right) \right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}^C_0 D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(0.5, 0), P_4\left(\frac{0.35+e}{0.35}, \frac{0.5}{0.7} \left(1 - \frac{0.35+e}{1.05}\right) \left(\frac{0.35+e}{0.35} - 0.5\right)\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases}$$

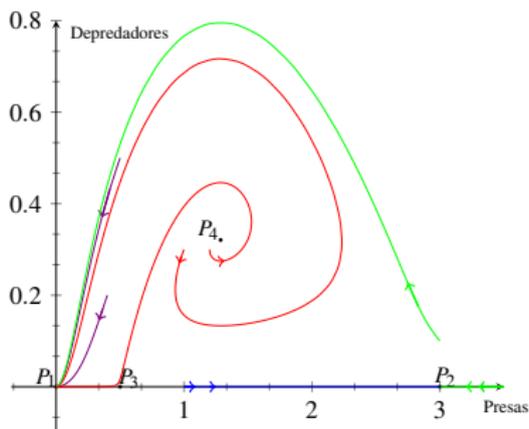
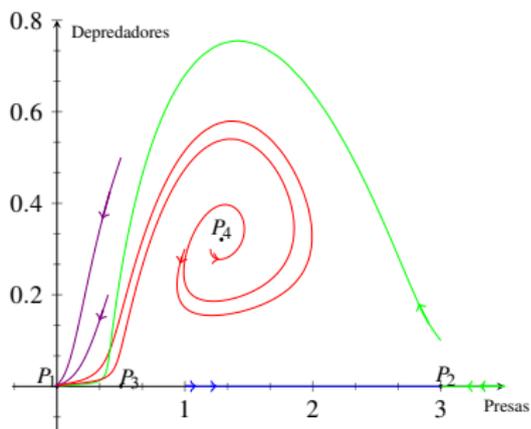
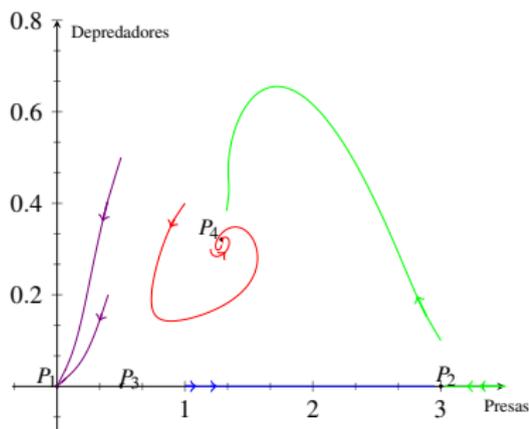
Puntos de equilibrio:

$$P_1(0, 0), P_2(3, 0), P_3(0.5, 0), P_4\left(\frac{0.35+e}{0.35}, \frac{0.5}{0.7} \left(1 - \frac{0.35+e}{1.05}\right) \left(\frac{0.35+e}{0.35} - 0.5\right)\right)$$

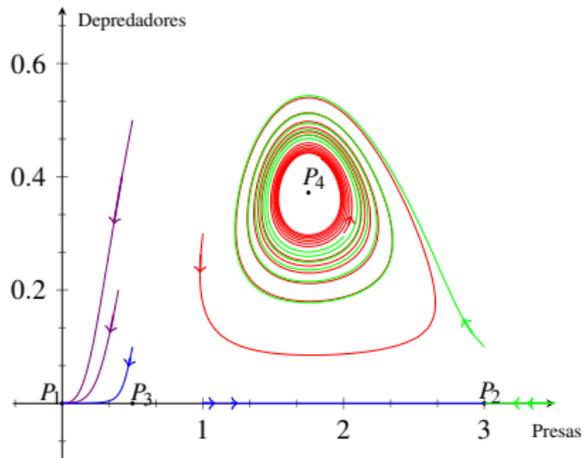
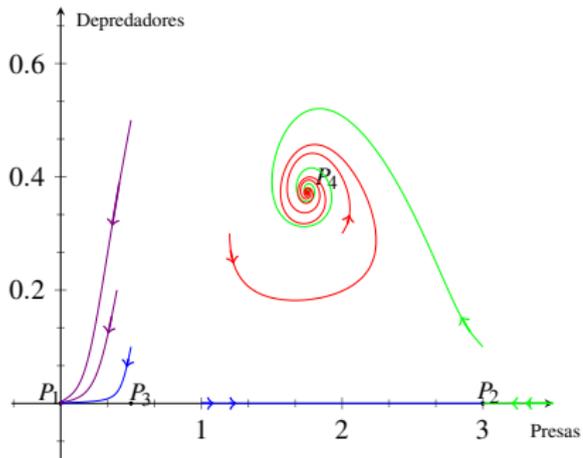
Utilizamos el método de Adams fraccionario para las siguientes gráficas.

(Li y Zeng, 2015)

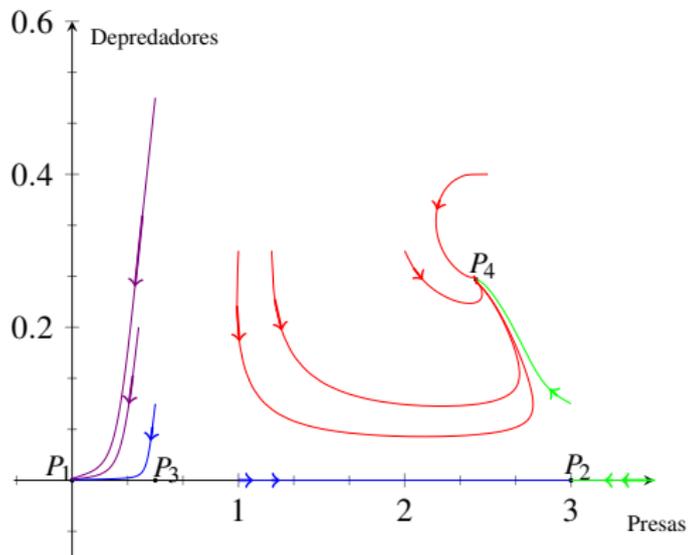
Soluciones con $e = 0.1$ para $\alpha = 0.6$, $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 1$.



Soluciones con $e = 0.2625$ para $\alpha = 0.9$ y $\alpha = 1$.



Soluciones con $e = 0.5$ para $\alpha = 0.9$.



Índice

1 Objetivos

2 Modelo depredador-presa fraccionario

Cálculo fraccionario

Modelo fraccionario

3 Existencia y unicidad

Existencia y unicidad de soluciones de PVIF

Existencia y unicidad de soluciones del problema

4 Invarianza no negativa

5 Ejemplos

6 Conclusiones

7 Bibliografía

Conclusiones

- Consideramos un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de la presa y tiene en cuenta una cosecha de depredadores.
- Pudimos demostrar existencia y unicidad de soluciones.
- Logramos demostrar la no negatividad de las soluciones, necesaria para este tipo de problemas que modelan crecimiento poblacional.
- Las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario son, al menos, tan estables como las de orden entero.

GRACIAS

melani@fceia.unr.edu.ar

Índice

- 1 **Objetivos**
- 2 **Modelo depredador-presa fraccionario**
 - Cálculo fraccionario
 - Modelo fraccionario
- 3 **Existencia y unicidad**
 - Existencia y unicidad de soluciones de PVIF
 - Existencia y unicidad de soluciones del problema
- 4 **Invarianza no negativa**
- 5 **Ejemplos**
- 6 **Conclusiones**
- 7 **Bibliografía**

Bibliografía

- [1] Melani Barrios, Gabriela Reyero, and Mabel Tidball, *Harvest management problem with a fractional logistic equation*, *Mathematica Pannonica* **27** (2021), no. 2, 152–163.
- [2] Colin Clark, *The optimal management of renewable resources*, vol. 2, *Mathematical Bioeconomics*, 1990.
- [3] Kai Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] Kai Diethelm, Neville Ford, and Alan Freed, *A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations*, *Nonlinear Dynamics* **29** (2002), no. 1, 3–22.
- [5] Alberto Ferrari and Eduardo Santillan Marcus, *Study of a fractional-order model for HIV infection of CD4+ T-cells with treatment*, *Journal of Fractional Calculus and Applications* **11** (2020), no. 2, 12–22.
- [6] Changpin Li and Fanhai Zeng, *Numerical methods for fractional calculus*, vol. 24, CRC Press, 2015.