Levantamiento de morfismos entre grupos de Grothendieck graduados de álgebras de Leavitt

Guido Arnone

IMAS (DM-UBA)

21 de septiembre de 2022

Álgebras de Leavitt

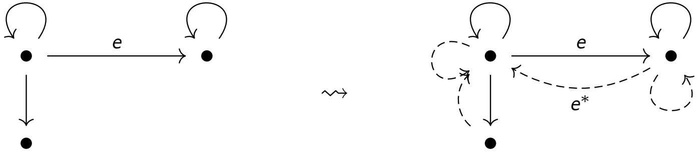
Fijamos un anillo conmutativo ℓ con un morfismo involutivo $*\colon \ell \to \ell$.

(Ej.: $\ell = \mathbb{C}$, $(a + ib)^* = a - ib$).

Un grafo E es un par de funciones $s, r\colon E^1 \to E^0$. Asumimos $\#E^0, \#E^1 < \infty$.

$$\bullet_{s(e)} \xrightarrow{e} \bullet_{r(e)}$$

La ℓ-álgebra de Leavitt $L(E)$ de E es un cociente del álgebra de caminos del grafo doble de E.



Álgebras de Leavitt

Un álgebra de Leavitt $L(E)$ es:

- graduada sobre $\mathbb{Z}$, via $|v| = 0$, $|e| = 1$, $|e^*| = -1$;
- una $*$-álgebra, extendiendo $*$ a $v^* = v$, $(e)^* = e^*$;
- casi siempre no-conmutativa;
- infinito dimensional si el grafo tiene ciclos y matricial si no.

Ejemplos:

- $M_n(\ell)$
- $M_n(\ell[t, t^{-1}])$
- $\ell\{x, x^* : x^*x = 1\}$
- $L_2 = \frac{\ell\{x_1, x_2, x_1^*, x_2^*\}}{\langle x_i^* x_i - 1,\ x_1^* x_2,\ x_2^* x_1,\ x_1 x_1^* + x_2 x_2^* - 1\rangle}$.

Sobre $\mathbb{C}$, completando a $L(E)$ se obtiene la C^*-álgebra de grafo $C^*(E)$.

Módulos de Bowen-Franks

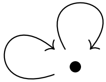
Sean E un grafo y $\mathbb{Z}[\sigma]$ el anillo de polinomios de Laurent.

Un vértice es regular si emite alguna arista; la matriz de adyacencia $A_E \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{reg}(E)\times E^0}$ de E se define como

$$(A_E)_{v,w} = \#\{e \in E^1 : s(e) = v, r(e) = w\}.$$

El módulo de Bowen-Franks de E es

$$\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = \mathrm{coker}(I - \sigma A_E^t) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}}{\langle v = \sigma \sum_{e:\ v \to w} r(e) : v \in \mathrm{reg}(E)\rangle}$$

Ej.: si $E =$  entonces $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = \mathbb{Z}[\sigma]/(1-2\sigma) \simeq \mathbb{Z}[1/2]$.

El módulo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}$ y K-teoría graduada

Hazrat probó que si ℓ es un cuerpo, entonces $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) = K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$.

Teorema (A., Cortiñas, '22)

Si ℓ es un anillo conmutativo, entonces $K_\bullet^{\mathrm{gr}}(L(E)) = K_\bullet(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E)$.

En particular, hay una asignación canónica

$$f\colon L(E) \to L(F) \rightsquigarrow K_0^{\mathrm{gr}}(f)\colon K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \to K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F).$$

Decimos que f levanta a un morfismo $\phi\colon \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$ si

$$\begin{tikzcd}
K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \arrow[r, "K_0^{\mathrm{gr}}(f)"] & K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F) \\
\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \arrow[u, "{[1]\otimes -}"] \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F) \arrow[u, "{[1]\otimes -}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Las conjeturas de Hazrat

Conjetura (Hazrat, '13)

Si $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$ *entonces* $L(E) \simeq L(F)$.

Conjetura (Hazrat, '13)

i) Todo morfismo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$ *se puede levantar a un morfismo* $L(E) \to L(F)$ *de álgebras graduadas.*

ii) Dos levantados difieren únicamente en un automorfismo interior.

Ara y Pardo probaron que ii) es, en general, falsa.

Independientemente y en simultáneo con Lia Vaš, probamos i).

El resultado principal

Teorema (A., '22)

Todo morfismo $\phi\colon \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$ *se levanta a un* $*$*-morfismo* $L(E) \to L(F)$ *que envía* $D(E) = \mathrm{span}_\ell\{\alpha\alpha^* : \ \alpha \text{ camino}\}$ *en* $D(F)$.

La idea es:

- conseguir una matriz R de coeficientes no-negativos que satisface ecuaciones matriciales involucrando a A_E y A_F;
- interpretar las entradas de R como cardinales de conjuntos de caminos;
- a partir de cada ecuación

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = z_0 w_0 + \cdots z_m w_m$$

  obtener biyecciones entre caminos de la forma

$$X_1 \times Y_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n \times Y_n \simeq Z_0 \times W_0 \sqcup \cdots \sqcup Z_m \times W_m.$$

Una consecuencia

Teorema (Carlsen, Dor-On, Eilers '22)

Existen grafos E y F tales que

- *i)* $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \simeq \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$;
- *ii) No existe un isomorfismo graduado $C^*(E) \simeq C^*(F)$ que preserve las C^*-subálgebras diagonales.*

Como podemos levantar el isomorfismo de i) a un $*$-morfismo que preserva las diagonales, se obtiene:

Teorema (A. '22)

Existen morfismos graduados $f\colon L(E) \to L(F)$ que no son isomorfismos pero inducen un isomorfismo $\mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(E) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{BF}^{\mathrm{gr}}(F)$.