Existencia de soluciones periódicas de un sistema no Lineal y con Medidas

Lorenzo Sierra [1]-Sonia Acinas[1] - Fernando Mazzone[1,2,3]

[1]Universidad Nacional de La Pampa
[2]CONICET - [3]Universidad Nacional de Río Cuarto

Sesión **Ecuaciones Diferenciales y Probabilidad**

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

siendo

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

siendo

- μ una medida de Borel.

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

siendo

- μ una medida de Borel.
- $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

  (C) F y ∇F son funciones medibles Borel en $t \in [0, T]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y son continuas con respecto $x \in \mathbb{R}^n$ para λ-c.t.p. $t \in [0, T]$ (donde λ representa la medida de Lebesgue).

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

siendo

- μ una medida de Borel.
- $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
  - (C) F y ∇F son funciones medibles Borel en $t \in [0, T]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y son continuas con respecto $x \in \mathbb{R}^n$ para λ-c.t.p. $t \in [0, T]$ (donde λ representa la medida de Lebesgue).
  - (A) $|F(t,x)| + |\nabla F(t,x)| \leqslant a(x)b(t)$, donde $a \in C(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$ y $0 \leqslant b \in L^1(|\lambda|)$.

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

siendo

- μ una medida de Borel.
- $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
  - (C) F y ∇F son funciones medibles Borel en $t \in [0, T]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y son continuas con respecto $x \in \mathbb{R}^n$ para λ-c.t.p. $t \in [0, T]$ (donde λ representa la medida de Lebesgue).
  - (A) $|F(t,x)| + |\nabla F(t,x)| \leqslant a(x)b(t)$, donde $a \in C(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$ y $0 \leqslant b \in L^1(|\lambda|)$.
  - (P) $F(t,x) = F(t, x + P_i \hat{e}_i)$ donde $\hat{e}_i$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ y $P_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1 \cdots n$.

Descripción del problema

Nuestro objetivo es obtener soluciones periódicas del problema no lineal,

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{array} \right. \qquad (PNL)$$

siendo

- μ una medida de Borel.
- $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
  - (C) F y ∇F son funciones medibles Borel en $t \in [0, T]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y son continuas con respecto $x \in \mathbb{R}^n$ para λ-c.t.p. $t \in [0, T]$ (donde λ representa la medida de Lebesgue).
  - (A) $|F(t,x)| + |\nabla F(t,x)| \leqslant a(x)b(t)$, donde $a \in C(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$ y $0 \leqslant b \in L^1(|\lambda|)$.
  - (P) $F(t,x) = F(t, x + P_i\hat{e}_i)$ donde $\hat{e}_i$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$ y $P_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1 \cdots n$.
- $e : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ en $L^1(|\mu|)$ tal que $\displaystyle\int_{[0,T)} e(t) \;\; d\mu = 0.$

¿Cómo y dónde?

Veremos que las soluciones débiles de (PNL) son puntos críticos de la integral de acción

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) d\mu$$

¿Cómo y dónde?

Veremos que las soluciones débiles de (PNL) son puntos críticos de la integral de acción

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) d\mu$$

Las soluciones pertenecen al espacio de *Sobolev* $H_T^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

¿Cómo y dónde?

Veremos que las soluciones débiles de (PNL) son puntos críticos de la integral de acción

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) d\mu$$

Las soluciones pertenecen al espacio de *Sobolev* $H^1_T([0, T], \mathbb{R}^n)$.
Diremos que $u \in H^1_T([0, T], \mathbb{R}^n)$ si $\|u\|_{L^2} < \infty$ y existe $v \in L^2([0, T])$ tal que $\forall f \in C^1_0([0, T])$ vale que

$$\int_0^T u(t) \cdot f'(t) dt = -\int_0^T v(t) \cdot f(t) dt$$

y se denota a $v = u'$.

¿Cómo y dónde?

Veremos que las soluciones débiles de (PNL) son puntos críticos de la integral de acción

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) d\mu$$

Las soluciones pertenecen al espacio de *Sobolev* $H_T^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Diremos que $u \in H_T^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ si $\|u\|_{L^2} < \infty$ y existe $v \in L^2([0, T])$ tal que $\forall f \in C_0^1([0, T])$ vale que

$$\int_0^T u(t) \cdot f'(t) dt = -\int_0^T v(t) \cdot f(t) dt$$

y se denota a $v = u'$. $H_T^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, y la norma

que consideraremos es

$$\|u\|_{H_T^1} = \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}.$$

Soluciones débiles

Entendemos a las soluciones en el sentido de las distribuciones, es decir que $\forall \psi \in H^1_T([0, T], \mathbb{R}^n)$ la derivada débil de u cumple con la siguiente igualdad.

$$\int_0^T u'(t) \cdot \psi'(t) \quad dt = - \int_0^T \nabla F(t, u) \cdot \psi(t) \quad dt - \int_{[0,T)} e(t) \cdot \psi(t) \quad d\mu.$$

A este tipo de soluciones las llamaremos *soluciones débiles*.

En este trabajo

- Vamos a usar el método directo para asegurar la existencia de soluciones minimizantes acotadas.

En este trabajo

- Vamos a usar el método directo para asegurar la existencia de soluciones minimizantes acotadas.
- A partir de una solución usaremos el Teorema del Paso de la Montaña para obtener otra solución.

En este trabajo

- Vamos a usar el método directo para asegurar la existencia de soluciones minimizantes acotadas.
- A partir de una solución usaremos el Teorema del Paso de la Montaña para obtener otra solución.

Un antecedente de este abordaje es

En este trabajo

- Vamos a usar el método directo para asegurar la existencia de soluciones minimizantes acotadas.
- A partir de una solución usaremos el Teorema del Paso de la Montaña para obtener otra solución.

Un antecedente de este abordaje es

Jean Mawhim y Michel Willem.
Critical Point Theory and Hamiltonian Systems
Springer-Verlag

El funcional φ_e

Demostramos que el funcional

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) \quad d\mu$$

es

- $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

El funcional φ_e

Demostramos que el funcional

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) \quad d\mu$$

es

- $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.
- Su derivada Frechet es

$$\langle \varphi_e'(u), v \rangle = \int_0^T \left[u' \cdot v' + \nabla F(t, u) \cdot v(t) \right] \; dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot v(t) \; d\mu.$$

$\forall v \in H_T^1([0\,T], \mathbb{R}^n)$

El funcional φ_e

Demostramos que el funcional

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) \quad d\mu$$

es

- $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.
- Su derivada Frechet es

$$\langle \varphi_e'(u), v \rangle = \int_0^T \left[u' \cdot v' + \nabla F(t, u) \cdot v(t) \right] \; dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot v(t) \; d\mu.$$

  $\forall v \in H_T^1([0 T], \mathbb{R}^n)$
- $\varphi_e(u + P_i \hat{e}_i) = \varphi_e(u)$ para $i = 1 \cdots n$ y donde $\hat{e}_i$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Problema Lineal

Demostramos que el problema lineal

$$\begin{cases} u'' = e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (L)$$

tiene una solución débil u tal que

Problema Lineal

Demostramos que el problema lineal

$$\begin{cases} u'' = e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (L)$$

tiene una solución débil u tal que

- Existe $\hat{u'} \in BV([0,T])$ y continua a izquierda tal que $u' = \hat{u'}$ en $c.t.p.\ t \in [0,T]$.

Problema Lineal

Demostramos que el problema lineal

$$\begin{cases} u'' = e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (L)$$

tiene una solución débil u tal que

- Existe $\hat{u'} \in BV([0, T])$ y continua a izquierda tal que $u' = \hat{u'}$ en $c.t.p.$ $t \in [0, T]$.
- La medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_{u'}$ dada por u' es igual a la medida μ.

Problema Lineal

Demostramos que el problema lineal

$$\begin{cases} u'' = e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (L)$$

tiene una solución débil u tal que

- Existe $\hat{u'} \in BV([0,T])$ y continua a izquierda tal que $u' = \hat{u'}$ en $c.t.p.\ t \in [0,T]$.
- La medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_{u'}$ dada por u' es igual a la medida μ.
- Una expresión para la solución del problema es

$$u(t) = u(0) - \frac{t}{T}\int_0^T \left[\int_{[0,s)} e(r)d\mu(r)\right] ds + \int_0^t \left[\int_{[0,s)} e(r)d\mu(r)\right] ds.$$

Herramientas importantes

Lema Importante

Sea $u_n \in H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ *acotada,* $\varphi_e : H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^1(H,\mathbb{R})$ *y tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'_e(u_n) = 0$ *en la topología de la norma, entonces existe una subsucesión* u_{n_k} *convergente en* $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Resultado principal

Teorema

Sea μ una medida de Borel con signo donde $\mu([0,T)) = 0$.
$F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cumple con (C), (A) y (P). Ademas $e : [0,T] \times \mathbb{R}^n$ en $L^1(|\mu|)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

tiene una solución que minimiza el funcional

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \left[\frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t,u(t)) \right] dt + \int_{[0,T)} e(t) \cdot u(t) d\mu$$

Esquema de la prueba siguiendo [M-W]

Sea $E(t)$ la solución que obtuvimos en el problema lineal (L), podemos suponer que la solución al problema no lineal (PNL) es de la forma

$$u(t) = v(t) + E(t)$$

donde $v(t)$ resuelve el problema no lineal sin medidas

$$\begin{cases} v'' = \nabla F(t, v(t) + E(t)) \\ v(0) - v(T) = 0 \\ v'(0) - v'(T) = 0. \end{cases}$$

Esquema de la prueba siguiendo [M-W]

Si llamamos $F_E(t,x) = F(t, x + E(t))$, usando el Teorema 1.6 de [M-W], existe al menos una solución $v \in H^1_T([0,T], \mathbb{R}^n)$ que minimiza

$$\Phi(v) = \int_0^T \frac{|v'(t)|^2}{2} + F_E(t, v(t))dt.$$

Esquema de la prueba siguiendo [M-W]

Si llamamos $F_E(t,x) = F(t, x + E(t))$, usando el Teorema 1.6 de [M-W], existe al menos una solución $v \in H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ que minimiza

$$\Phi(v) = \int_0^T \frac{|v'(t)|^2}{2} + F_E(t, v(t))dt.$$

Entonces $u = v + E$ es una solución del problema (PNL) y minimiza el siguiente funcional

$$\Phi(u - E) = \int_0^T \frac{|(u-E)'(t)|^2}{2} + F_E(t, u(t) - E(t))dt$$

$$\Phi(u - E) = \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} - u'(t) \cdot E'(t) + \frac{|E'(t)|^2}{2} + F(t, u(t))dt$$

Esquema de la prueba siguiendo [M-W]

Como E es solución débil del problema lineal (L), es decir

$$-\int_0^T u'(t)\cdot E'(t)\ \ dt = \int_{[0,T)} e(t)\cdot u(t)\ \ d\mu,$$

entonces la integral de acción nos queda

$$\Phi(u-E) = \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t,u(t))dt + \int_{[0,T)} e(t)\cdot u(t)d\mu + \frac{\|E'\|_{L^2}^2}{2}.$$

Luego, si $u-E$ es un mínimo de Φ entonces u lo es de

$$\varphi_e(u) = \int_0^T \frac{|u'(t)|^2}{2} + F(t,u(t))dt + \int_{[0,T)} e(t)\cdot u(t)d\mu$$

Paso de la Montaña

Si llamamos u_0 al mínimo del funcional φ_e que obtuvimos en el (PNL), vamos a ver que existe un punto critico geométricamente distinto al que ya obtuvimos.

- Si u_0 no es un mínimo aislado, es decir existen mínimos tan cerca de él como queramos. Por lo tanto tenemos infinitas soluciones de (PNL).

Paso de la Montaña

Si llamamos u_0 al mínimo del funcional φ_e que obtuvimos en el (PNL), vamos a ver que existe un punto critico geométricamente distinto al que ya obtuvimos.

- Si u_0 no es un mínimo aislado, es decir existen mínimos tan cerca de él como queramos. Por lo tanto tenemos infinitas soluciones de (PNL).
- Si u_0 es un mínimo aislado entonces $\exists r > 0$ tal que $\varphi_e(u_0) < \varphi_e(u)$ para todo $u_0 \neq u \in B(u_0, r)$.

Paso de la Montaña

Si llamamos u_0 al mínimo del funcional φ_e que obtuvimos en el (PNL), vamos a ver que existe un punto critico geométricamente distinto al que ya obtuvimos.

- Si u_0 no es un mínimo aislado, es decir existen mínimos tan cerca de él como queramos. Por lo tanto tenemos infinitas soluciones de (PNL).
- Si u_0 es un mínimo aislado entonces $\exists r > 0$ tal que $\varphi_e(u_0) < \varphi_e(u)$ para todo $u_0 \neq u \in B(u_0, r)$.

Mostramos que

$$\varphi_e(u_0) < \inf_{\partial B(u_0,r)} \{\varphi_e\}.$$

Además como $\varphi_e(u + P_i \hat{e}_i) = \varphi_e(u)$ para $i = 1 \cdots n$ entonces para k suficientemente grande tomamos $u_1 = u_0 + kP_i \hat{e}_i$, tal que $u_1 \notin B(u_0, r)$ y

$$\varphi_e(u_1) = \varphi_e(u_0) < \inf_{\partial B(u_0,r)} \varphi_e(u)$$

Paso de la Montaña

Aplicando el Teorema del paso de la Montaña existe una sucesión u_k en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_e(u_k)=c=\inf_{\alpha\in M}\left\{\max_{s\in[0,1]}\varphi_e(\alpha(s))\right\}y\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_e'(u_k)=0.$$

donde $M=\{\alpha\in C([0,1]):\quad \alpha(0)=u_0,\alpha(1)=u_1\}$.

Paso de la Montaña

Aplicando el Teorema del paso de la Montaña existe una sucesión u_k en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_e(u_k)=c=\inf_{\alpha\in M}\left\{\max_{s\in[0,1]}\varphi_e(\alpha(s))\right\} y \quad \lim_{k\to\infty}\varphi_e'(u_k)=0.$$

donde $M=\{\alpha\in C([0,1]) : \quad \alpha(0)=u_0,\alpha(1)=u_1\}$.

Mostramos que $\inf_{\partial B(u_0,r)}\{\varphi_e\}\leqslant c$.

Paso de la Montaña

Aplicando el Teorema del paso de la Montaña existe una sucesión u_k en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_e(u_k) = c = \inf_{\alpha\in M}\left\{\max_{s\in[0,1]} \varphi_e(\alpha(s))\right\} \text{ y } \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_e'(u_k) = 0.$$

donde $M = \{\alpha \in C([0,1]) : \quad \alpha(0) = u_0, \alpha(1) = u_1\}$.

Mostramos que $\inf\limits_{\partial B(u_0,r)}\{\varphi_e\} \leqslant c$.

Si llamamos $\bar{u^i}_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u_k^i(t)dt$ entonces obtenemos otra sucesión

$$y_k(t) = u_k(t) - \sum_{i=1}^{n} P_i\left[\frac{\bar{u^i}_k}{P_i}\right]\hat{e}_i.$$

Paso de la Montaña

Luego probamos que y_k está acotada en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ y por el Lema importante existe una subsucesión y_{k_m} que converge a y en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$, por lo tanto

$$\varphi_e(y) = c \quad y \quad \varphi'_e(y) = 0$$

Paso de la Montaña

Luego probamos que y_k está acotada en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$ y por el Lema importante existe una subsucesión y_{k_m} que converge a y en $H^1_T([0,T],\mathbb{R}^n)$, por lo tanto

$$\varphi_e(y) = c \quad y \quad \varphi'_e(y) = 0$$

Ademas $\varphi_e(y) = c \geqslant \inf\limits_{\partial B(u_0,r)} \{\varphi_e\} > \varphi_e(u_0)$. Es decir y es geométricamente distinta a u_0.

Comentarios finales

Para el problema no lineal con medidas

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

obtuvimos dos soluciones en el sentido de las distribuciones, geométricamente distintas.

Comentarios finales

Para el problema no lineal con medidas

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

obtuvimos dos soluciones en el sentido de las distribuciones, geométricamente distintas.

- Que minimiza el funcional φ_e

Comentarios finales

Para el problema no lineal con medidas

$$\begin{cases} u'' = \nabla F(t,u) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases} \qquad (PNL)$$

obtuvimos dos soluciones en el sentido de las distribuciones, geométricamente distintas.

- Que minimiza el funcional φ_e
- Otra, por el Teorema del Paso de la Montaña, que es un punto crítico del funcional φ_e

Problema impulsivo

Sea $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < t_{p+1} = T$ y consideramos el problema con impulsos.

$$\begin{cases} u'' = \operatorname{sen}(u(t)) \\ \Delta u'_j = u'(t_j^+) - u'(t_j^-) = d_j \in \mathbb{R}^n, \text{ para } j = 1 \cdots p \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Problema impulsivo

Sea $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < t_{p+1} = T$ y consideramos el problema con impulsos.

$$\begin{cases} u'' = \text{sen}(u(t)) \\ \Delta u_j' = u'(t_j^+) - u'(t_j^-) = d_j \in \mathbb{R}^n, \text{ para } j = 1 \cdots p \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Podemos escribirlo como un (PNL) con la medida de Borel, $\mu = \sum_{j=1}^{p} \delta_{t_j}$ y

la función

$$e(t) = \begin{cases} d_j & si \quad t = t_j \text{ para } j = 1 \cdots p \\ 0 & si \quad t \neq t_j \text{ para } j = 1 \cdots p \end{cases}$$

Problema impulsivo

Sea $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < t_{p+1} = T$ y consideramos el problema con impulsos.

$$\begin{cases} u'' = \text{sen}(u(t)) \\ \Delta u_j' = u'(t_j^+) - u'(t_j^-) = d_j \in \mathbb{R}^n, \text{ para } j = 1 \cdots p \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

Podemos escribirlo como un (PNL) con la medida de Borel, $\mu = \sum_{j=1}^{p} \delta_{t_j}$ y la función

$$e(t) = \begin{cases} d_j & si \quad t = t_j \text{ para } j = 1 \cdots p \\ 0 & si \quad t \neq t_j \text{ para } j = 1 \cdots p \end{cases}$$

De este modo, el problema con impulsos puede expresarse como

$$\begin{cases} u'' = \text{sen}(u(t)) + e(t)\mu \\ u(0) - u(T) = 0 \\ u'(0) - u'(T) = 0 \end{cases}$$

¡Muchas gracias por su atención!

Referencias:

- JEAN MAWHIM Y MICHEL WILLEM. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems *Springer-Verlag*
- M. CARTER Y B. VAN BRUNT. The Lebesgue-Stieltjes Integral, Springer-Verlag 2000
- GIUSEPPE BUTTAZZO, MARIANO GIAQUINTA, STEFAN HILDEBRANDT One-dimensional Variational Problems An Introduction, Oxford Lecture Series in Mathematical.
- FOLLAND G., Real Analysis: Modern techniques and their applications , (2ed., PAM, Wiley, 1999).

Contacto:

- FERNANDO MAZZONE: fmazzone@exa.unrc.edu.ar
- SONIA ACINAS: sonia.acinas@gmail.com
- LORENZO SIERRA: lorenzofsierra@gmail.com