

Universidad Nacional Del Litoral

Facultad de Ingeniería Química

# ESCUIGONOMETRÍA

Teoría geométrica de escuículos



*Concurso de Monografías UMA 2024*

Autor: Diego Barrios

Agosto 2024

# Prólogo

Voy a empezar esta monografía con una advertencia ya que no existe una terminología única y aceptada para los conceptos que van a ser tratados y mucho menos en castellano. En realidad no existe ninguna traducción al castellano de la terminología aquí empleada, he optado por realizar una traducción fiel a la fonética original pero haciendo posible la pronunciación. Si decide utilizar la terminología aquí empleada en otro contexto, lo hace bajo su propio riesgo. Hecha la aclaración, esta monografía tiene como objeto de estudio principal al **escuírculo**, traducción de *squircle*, este término es un *portmanteau* (palabra que se forma de la unión y contracción de otras dos palabras) que proviene de *square* más *circle*, es decir cuadrado más círculo, en este sentido un escuírculo es una curva plana que intermedia entre un cuadrado y un círculo, para hacerse una imagen mental se puede imaginar un círculo inscrito en un cuadrado, el centro del cuadrado coincidente con el del círculo y el radio del círculo siendo la mitad del lado del cuadrado, bien, un escuírculo es una curva que se encuentra justo por fuera del círculo y dentro del cuadrado, de manera tal que el tanto el cuadrado mismo como el círculo pueden considerarse dos casos extremos del escuírculo. Algo muy interesante es que estos escuírculos pueden entenderse como simplemente círculos en espacios en los cuales la definición de distancia es diferente a la usual. Llega un punto en la vida de alguien que aprende un poco de matemáticas en el que se da cuenta que la trigonometría no sólo se trata de triángulos, si no que mas bien se trata de círculos, es decir, hay una íntima relación entre los círculos y la trigonometría. Bueno, la **escuigonometría**, del inglés *squigonometry*, viene a ser la generalización de la trigonometría usual a estos círculos imperfectos. Sorprendentemente hay muchas propiedades trigonométricas clásicas que se preservan y otras que se generalizan de una forma muy interesante. Los escuírculos encontraron diversas aplicaciones en áreas como el diseño, la criptografía y la óptica. En las últimas versiones tanto de iOS como de Android la forma de los iconos de las aplicaciones cambiaron de cuadrados con las esquinas redondeadas a escuírculos para dar una apariencia mas amigable, lo invito a que lo compruebe en este momento.

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>1</b>
<b>Índice general</b>	<b>2</b>
<b>1. Escuigonometría</b>	<b>3</b>
1.1. Otras distancias . . . . .	3
1.2. Un enfoque con ecuaciones diferenciales . . . . .	5
1.3. Escueno, Coscueno y Tancuente . . . . .	7
1.4. Escuínculos de grado impar . . . . .	10
1.5. Las inversas . . . . .	11
<b>2. Preguntas geométricas</b>	<b>15</b>
2.1. Parametrización por área . . . . .	15
2.2. La ¿función? $\pi$ . . . . .	18
2.3. Cuando $\pi$ es el mínimo valor de $\pi$ . . . . .	21
2.4. El superhuevo de Piet Hein . . . . .	22
<b>3. Escuínculo de Fernandez Guasti</b>	<b>29</b>
3.1. Comparación de FG vs Lamé . . . . .	29
3.2. Área vía integrales elípticas . . . . .	34
3.3. Superficies escuirculares . . . . .	37
<b>Epílogo</b>	<b>42</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>

# Capítulo 1

## Escuigonometría

### 1.1. Otras distancias

En el libro “Los Elementos” de Euclides, se definen el círculo y la circunferencia de la siguiente manera:

**Definición 1.** Un círculo es una figura plana contenida por una sola línea llamada circunferencia, tal que todas las rectas trazadas desde un punto interno (el centro) a la circunferencia son iguales entre sí.

En esta monografía nos apegaremos a la concepción anglosajona de las palabras y nos referiremos como círculo a la curva unidimensional y como disco a la figura plana contenida en el círculo. Una definición más moderna además sustituiría la idea de rectas iguales entre sí de Euclides, por la de segmentos con la misma distancia.

**Definición 2.** Un círculo  $C$  es el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$  tal que todos mantienen la misma distancia  $r > 0$  a un punto en particular llamado centro. Simbólicamente

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Dist}((x, y), (x_0, y_0)) = r\}.$$

Siendo  $(x_0, y_0)$  el centro del círculo y  $r$  el radio.

La definición usual de la distancia para puntos en el plano, también conocida como distancia euclídea es la siguiente

$$\text{Dist}(P, Q) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2},$$

siendo  $P = (x_0, y_0)$  y  $Q = (x_1, y_1)$  dos puntos del plano. Si trasladamos el centro del círculo al origen de coordenadas, y el radio es igual a uno, obtenemos la conocida fórmula implícita del círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Pero como sugiere el título de la sección, la distancia de Euclides no es la única distancia que existe. De hecho existe una serie de requisitos que una función debe cumplir para que pueda ser llamada distancia, son cuatro propiedades muy intuitivas: las distancias no pueden ser negativas, la única distancia 0 es la de un punto consigo mismo, la distancia del punto  $P$  al punto  $Q$  tiene que ser la misma que la de  $Q$  a  $P$  y, por último, la distancia entre dos puntos no puede ser mayor a la distancia del primero a un punto intermedio más la distancia de este punto intermedio al segundo.

**Definición 3.** Sean  $P, Q$  y  $R$  tres puntos del plano, una función  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una distancia si cumple con:

- $d(P, Q) \geq 0$ .
- $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ .
- $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ .

Las que nos van a interesar en este momento son una familia particular de distancias que nos van a llevar a una fórmula implícita para el escúrculo, y son las  $p$ -distancias.

**Teorema 4.** Sea  $p \geq 1$ . La función  $d(P, Q) = (|x_0 - x_1|^p + |y_0 - y_1|^p)^{1/p}$ , donde  $P = (x_0, y_0)$  y  $Q = (x_1, y_1)$  son puntos en el plano, es una distancia.

Nótese que la distancia euclídea pertenece a esta familia de distancias cuando  $p = 2$ . Esto nos lleva directamente a una forma de definir al escúrculo unitario centrado en el origen. Dado que esta definición que veremos es también un caso particular de una curva conocida como curva de Lamé le pondremos ese apellido al escúrculo.

**Definición 5.** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales positivos una curva de Lamé se define de forma implícita por la ecuación

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p = 1.$$

**Definición 6.** El escúrculo de Lamé de grado  $p$  es el conjunto de puntos en el plano definidos de forma implícita por la ecuación

$$|x|^p + |y|^p = 1.$$

Una aclaración, existen otras formas de definir un escúrculo, en el sentido de que existen otras curvas que son un intermedio entre un cuadrado y un círculo y que contienen un parámetro que las hace asimilarse mas a un cuadrado o a un círculo, una de estas otras curvas será estudiada en el último capítulo de esta monografía (3). A partir de ahora, a menos que sea necesario, lo llamaremos simplemente escúrculo. Estas curvas en cierto sentido siguen siendo, como el círculo, el conjunto de puntos que equidistan de un centro, sólo que que ahora cambiamos la definición de la distancia.

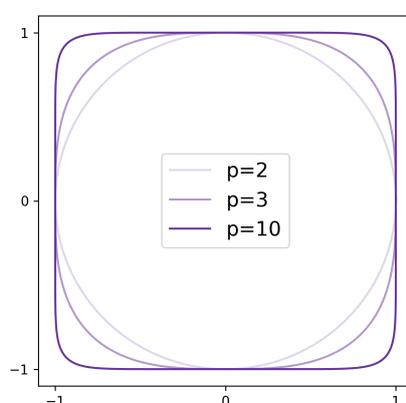


Figura 1.1: Escúrculos de Lamé.

Como dato de color en la carátula de esta monografía el logo de la UMA esta encerrado en un escúrculo de Lamé con  $p = 3$ .

## 1.2. Un enfoque con ecuaciones diferenciales

Bien, ya tenemos una definición precisa de a qué nos referimos cuando hablamos de escúrculos. Ahora llego el momento de generalizar la trigonometría clásica a estas curvas. Para empezar pensemos en las funciones seno y coseno. ¿Cuál es la relación entre el círculo y las funciones seno y coseno? Una posible respuesta es que las funciones seno y coseno parametrizan a la circunferencia unitaria, es decir las coordenadas  $x$  e  $y$  de cualquier punto de la circunferencia son coseno y seno de un mismo número respectivamente. es decir si el punto  $(x, y)$  pertenece a la circunferencia entonces  $\cos(t) = x$  y  $\sin(t) = y$  para algún mismo  $t$ . Y dado que  $(x, y)$  pertenece a la circunferencia, entonces satisface la ecuación implícita  $x^2 + y^2 = 1$ . por lo tanto las

funciones que parametriza al círculo también la deben satisfacer, es decir

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Lo que haremos ahora será olvidarnos por un momento que conocemos a las funciones seno y coseno, y las definiremos nuevamente de tal forma que sea fácilmente generalizable a los escúrculos aprovechando la similitud de las ecuaciones. Propongamos un par de funciones diferenciables en todos los números reales a las cuales llamaremos sesgadamente  $C(t)$  y  $S(t)$  que parametrizan a la circunferencia unitaria, entonces satisfacen la ecuación

$$C(t)^2 + S(t)^2 = 1.$$

Derivando implícitamente con respecto a  $t$  a ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} 2C(t)C'(t) + 2S(t)S'(t) &= 0, \\ C(t)C'(t) &= -S(t)S'(t). \end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface cuando

$$\begin{aligned} C'(t) &= -S(t), \\ S'(t) &= C(t). \end{aligned}$$

Es decir, para que estas funciones parametricen la circunferencia debería suceder que la derivada de  $C(t)$  sea igual a  $-S(t)$  y que la derivada de  $S(t)$  sea igual  $C(t)$ . Además sabemos que el punto  $(1, 0)$  debe pertenecer a la circunferencia, es decir, debe ser imagen de  $C(t)$  y  $S(t)$  para algún  $t$ , por ejemplo para  $t = 0$ . En suma estas funciones deben cumplir lo siguiente:

$$\begin{cases} C'(t) = -S(t), \\ S'(t) = C(t), \\ C(0) = 1, \\ S(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Hasta ahora sólo enumeramos algunas condiciones que deben cumplir nuestras funciones candidatas, pero ¿Es esta una buena definición? ¿Existe un único par de funciones que satisfacen estas condiciones? La respuesta la da la teoría de ecuaciones diferenciales y es afirmativa. Lo que obtuvimos en (1.1) es lo que se llama un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con condiciones iniciales, también llamado problema de valores iniciales. Y el teorema que responde afirmativamente la pregunta de la existencia y la unicidad de la solución es el siguiente:

**Teorema 7.** Sean  $x(t), y(t)$  dos funciones diferenciables en todos los reales y  $F(x, y, t)$  y  $G(x, y, t)$  funciones que satisfacen la siguientes hipótesis

- $F$  y  $G$  son continuas en  $(t_0, x(t_0), y(t_0))$ ,
- existen constantes  $L_f$  y  $L_g$  tales que para todos  $(t, x_1, y_1)$  y  $(t, x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| &\leq L_f(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ |G(t, x_1, y_1) - G(t, x_2, y_2)| &\leq L_g(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

- existen constantes  $K_f$  y  $K_g$  tales que

$$\begin{aligned} |F(t, x, y)| &\leq K_f(1 + |x| + |y|), \\ |G(t, x, y)| &\leq K_g(1 + |x| + |y|). \end{aligned}$$

entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t), y(t), t), \\ y'(t) = G(x(t), y(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

tiene una única solución en todos los números reales.

Como se puede ver, este teorema tiene un poder muy grande, ya que si las soluciones de un problema de valores iniciales tiene la existencia garantizada y esta es única, esto nos abre las puertas a utilizarlo para definir nuevas funciones. Dado que el problema de valores iniciales que planteamos (1.1) cumple las hipótesis del Teorema 7, podemos definir al seno y al coseno como aquel único par de funciones que satisfacen el problema de valores iniciales (1.1) prescindiendo totalmente de los triángulos en esta definición !

### 1.3. Escueno, Coscueno y Tancuente

Recordando lo que hicimos en la sección anterior, ahora queremos encontrar un par de funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  diferenciables en todos los reales que parametrizan al escúrculo, por lo tanto deben satisfacer su ecuación. Supongamos que  $p$  es un entero par para librarnos del módulo

$$x(t)^p + y(t)^p = 1.$$

Siguiendo los mismos pasos que con  $C(t)$  y  $S(t)$  e imponiendo la misma condición inicial se llega a un problema de valores iniciales similar

$$\begin{aligned} px(t)^{p-1}x'(t) + py(t)^{p-1}y'(t) &= 0, \\ x(t)^{p-1}x'(t) &= -y(t)^{p-1}y'(t). \end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface cuando

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t)^{p-1}, \\ y'(t) &= x(t)^{p-1}. \end{aligned}$$

Sumando la condición inicial tenemos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t)^{p-1}, \\ y'(t) = x(t)^{p-1}, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Llamaremos al único par de funciones que satisfacen este problema **escueno** y **coscueno** respectivamente, en inglés *squine* y *cosquine*. Notar que estas funciones dependen de  $p$ , sin embargo a menos que sea necesario no haremos explícito este hecho asumiendo que siempre dependen de  $p$  y las denotaremos  $\text{sq}(t)$  y  $\text{cq}(t)$ .

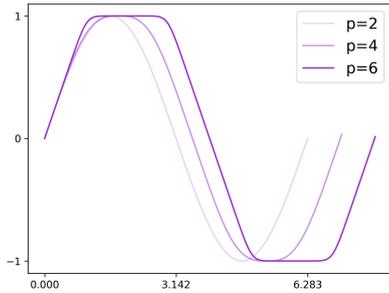


Figura 1.2: Escuenos.

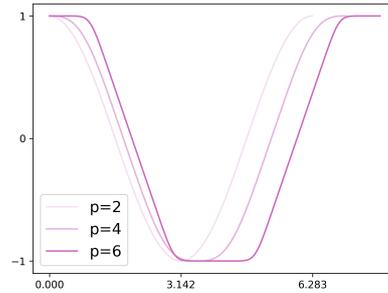


Figura 1.3: Coscuenos.

En las Figuras 1.2 y 1.3 se pueden ver gráficas de las funciones escueno y coscueno obtenidas numéricamente a partir del problemas de valores iniciales (1.2) con el método de Runge-Kutta.

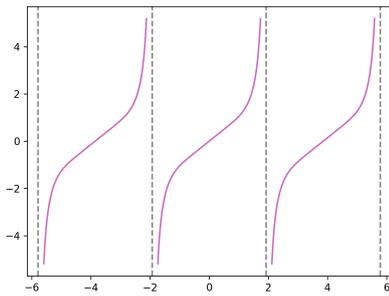
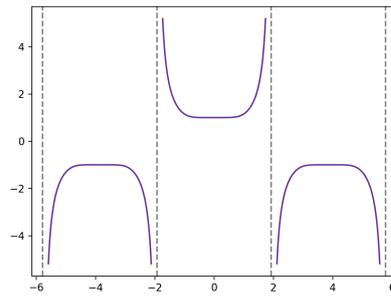
Si reemplazamos  $p = 2$  obtenemos el sistema del seno y el coseno, el cual es lineal en las variables  $x$  e  $y$ , esto permite que existan métodos analíticos para resolverlo y deducir que las soluciones son, en efecto, el seno y el coseno.

Sin embargo, si  $p$  es mayor a 2 obtenemos un sistema no lineal. Este hecho se traduce en que no exista un método analítico para resolver el sistema y obtener la expresión del escueno y el coscueno en términos de funciones más elementales. La buena noticia es que el sistema (1.2) verifica las hipótesis del Teorema 7, por lo tanto la solución existe y es única en todos los reales.

Ahora, es sabido que si dividimos al seno por el coseno obtenemos la función tangente ¿Qué obtendremos si dividimos al escueno por el coscueno? La **tancuente** (Figura 1.4) ¿Y si le tomamos la recíproca al coscueno? La **secuante** (Figura 1.5).

$$\text{tq}(t) := \frac{\text{sq}(t)}{\text{cq}(t)} \quad \text{y} \quad \text{seq}(t) := \frac{1}{\text{cq}(t)}.$$

El dominio tanto de la tancuente como de la secuante serán todos los números tales que el coscueno no se anula, mas adelante investigaremos mejor cuando se anulan tanto el coscueno como el escueno.

Figura 1.4: Tancuente  $p = 6$ .Figura 1.5: Secuante  $p = 6$ .

En orden de ampliar nuestro repertorio de derivadas y antiderivadas podemos probar derivar la tancuente y la secuante utilizando la regla de la derivada del cociente.

$$\text{tq}(t)' = \frac{\text{sq}(t)'\text{cq}(t) - \text{sq}(t)\text{cq}(t)'}{\text{cq}^2(t)}.$$

Del problema de valores iniciales (1.2) conocemos las derivadas de  $\text{sq}(t)$  y  $\text{cq}(t)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{tq}(t)' &= \frac{\text{cq}^{p-1}(t)\text{cq}(t) + \text{sq}(t)\text{sq}^{p-1}(t)}{\text{cq}^2(t)} \\ &= \frac{\text{cq}^p(t) + \text{sq}^p(t)}{\text{cq}^2(t)}. \end{aligned}$$

Sabiendo que estas funciones parametrizan al escuírculo, sabemos que el numerador es igual a uno, luego

$$\text{tq}(t)' = \frac{1}{\text{cq}^2(t)} = \text{seq}^2(t).$$

Es decir, la derivada de la tancuente es la secuante al cuadrado independientemente de  $p$ . Para la derivada de la secuante tenemos que

$$\text{seq}(t)' = -\frac{\text{cq}(t)'}{\text{cq}^2(t)} = \frac{\text{sq}^{p-1}(t)}{\text{cq}^2(t)} = \text{tq}^2(t)\text{sq}^{p-3}(t).$$

Notar que estas derivadas generalizan correctamente las derivadas de la tangente y la secante. Prosiguiendo así, podemos definir la **cotancuente** y la **cosecuante** de la siguiente forma

$$\text{ctq}(t) := \frac{\text{cq}(t)}{\text{sq}(t)} \quad \text{y} \quad \text{csq}(t) := \frac{1}{\text{sq}(t)},$$

como así también computar sus respectivas derivadas

$$\text{ctq}(t)' = \text{csq}^2(t) \quad \text{y} \quad \text{csq}(t)' = -\text{ctq}^2(t)\text{cq}^{p-3}(t).$$

Es muy sencillo de ver y el lector será capas de demostrar sin problemas que siguen valiendo las tres identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \text{sq}^p(t) + \text{cq}^p(t) &= 1, \\ \text{seq}^p(t) - \text{tq}^p(t) &= 1, \\ \text{csq}^p(t) - \text{ctq}^p(t) &= 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

## 1.4. Escuírculos de grado impar

Cuando incluimos el módulo en la expresión implícita del escuírculo nos quedan términos del tipo  $|x|^p$  el cual a pesar de ser composición de una función no diferenciable como lo es el módulo, si es diferenciable cuando esta elevado a la  $p$  si  $p \geq 2$ , para esto necesitamos la función signo definida de la siguiente manera:

**Definición 8.**

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Utilizando el hecho de que

$$(|x(t)|^p)' = p|x(t)|^{p-1}\text{sgn}(x(t))x'(t)$$

a partir de la ecuación implícita del escúrculo, ahora sin ignorar el modulo, llegamos al siguiente sistema

$$\begin{cases} x' = -|y|^{p-1}\text{sgn}(y), \\ y' = |x|^{p-1}\text{sgn}(x), \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

que si bien involucra funciones no diferenciables o discontinuas, como el módulo y la función signo, si satisface las condiciones del Teorema 7 por lo que las soluciones existen en todos los reales y estas se pueden obtener numéricamente de igual forma con el método de Runge-Kutta.

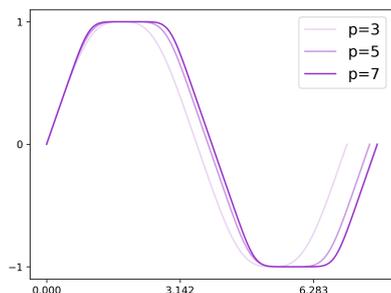


Figura 1.6: Escuenos.

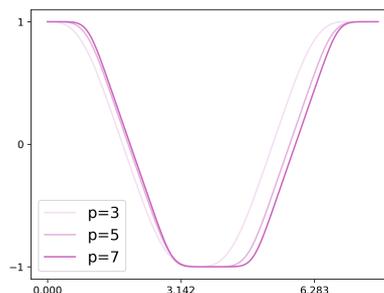


Figura 1.7: Coscuenos.

## 1.5. Las inversas

En estas situaciones en las que no existe una fórmula cerrada conocida en término de funciones elementales para las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales todavía se pueden aproximar y por ende graficar con la precisión que uno desee, utilizando métodos iterativos que convergen a la solución y podemos obtener una intuición del comportamiento de la función. Por ejemplo algo que podemos intuir del gráfico del escueno (Figura 1.8) es que es una función periódica, lo mismo vale para el coscueno, para el caso de  $p = 2$  este período es  $2\pi$  y algo que se puede apreciar en el gráfico es que este período aumenta cuando aumenta el parámetro  $p$ . Dado que las funciones trigonométricas clásicas no son inyectivas, es necesario restringir el

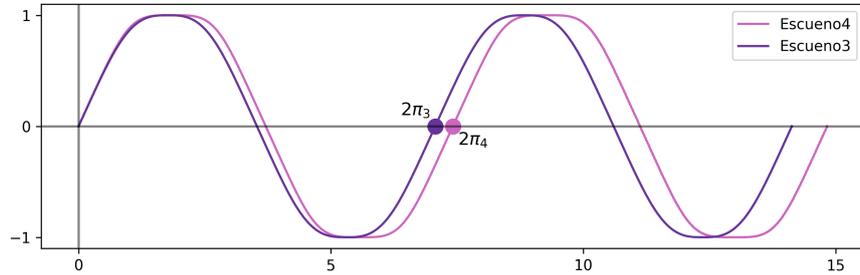


Figura 1.8: Funciones  $\text{sq}_3(t)$  y  $\text{sq}_4(t)$ .

dominio para definir las inversas, el coseno por ejemplo es invertible cuando lo restringimos al intervalo  $[0, \pi)$ . Entonces llamemos  $2\pi_p$  al periodo las funciones escuigonométricas de grado  $p$ , donde  $\pi_p$  es algún número real, tal que  $\text{sq}(n\pi_p) = 0$  y  $\text{cq}(\pi_p(1/2 + n)) = 0$  para  $n$  un número entero. Dicho esto, el escueno y el coscueno serán invertibles en  $[-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}]$  y  $[0, \pi_p]$ , respectivamente.

El procedimiento habitual para invertir una función  $f(x)$  es despejar de la expresión  $y = f(x)$ ,  $x$  en términos de  $y$  para llegar a  $x = g(y)$  donde la inversa de  $f$  será  $f^{-1}(x) = g(x)$ . Recordemos del problema de valores iniciales (1.2) donde sabemos que  $x = \text{cq}(t)$  e  $y = \text{sq}(t)$  son la solución, e intentemos despejar la variable  $t$  de la primera ecuación, la correspondiente a  $\text{cq}(t)$ , el objetivo es encontrar la inversa de  $\text{cq}(t)$

$$\begin{aligned} x' &= -y^{p-1}, \\ x' &= -(y^p)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Notar que el anterior paso es posible si nos restringimos a valores de  $y$  positivos, que es justamente el sector donde el coscueno sera invertible  $t \in [0, \pi_p]$  esto es el semiescúrculo superior. Ahora utilizaremos la nueva versión de la primera identidad pitagórica (1.3) y luego un método conocido como sepa-

ración de variables para hacer aparecer la variable independiente  $t$

$$\begin{aligned}x' &= -(y^p)^{\frac{p-1}{p}} \\x' &= -(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}} \\ \frac{x'}{-(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}}} &= 1 \\ \int \frac{x'}{-(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}}} dt &= \int dt \\ \int \frac{1}{-(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}}} dx &= t.\end{aligned}$$

Una vez despejada la variable independiente  $t$  en función de  $x$  y recordando que  $x = \text{cq}(t)$  podemos saber que la inversa de coscueno debe satisfacer

$$\text{cq}^{-1}(t) = \int_{t_0}^t -\frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Ahora utilizando la condición inicial  $\text{cq}(0) = 1$  sabemos que debe suceder que  $\text{cq}^{-1}(1) = 0$ , eso nos ayuda a obtener  $t_0$  como

$$\text{cq}^{-1}(1) = \int_{t_0}^1 -\frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}} = 0.$$

Por lo tanto para que resultado de la integral sea 0,  $t_0$  debe valer 1,  $t_0 = 1$ , invirtiendo los extremos de integración y cambiando el signo del integrando obtenemos la siguiente expresión para  $\text{cq}^{-1}(t)$

$$\text{cq}^{-1}(t) = \int_t^1 \frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

De nuevo la inversa del coscueno no se puede expresar en término de funciones elementales, sin embargo si admite esta representación integral, lo cual es mucho mas satisfactorio que la definición mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Con pasos similares se puede llegar a la inversa del escueno. La deducción de la inversa de la tancuente por un método algo diferente al utilizado aquí se puede ver en la referencia [4].

$$\text{sq}^{-1}(t) = \int_0^t \frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}} \quad \text{y} \quad \text{tq}^{-1}(t) = \int_0^t \frac{du}{(1+u^p)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

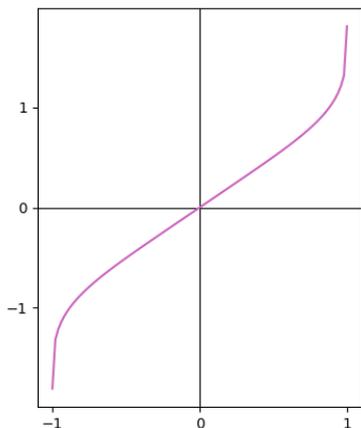


Figura 1.9: Inversa del seno  $p = 4$ .

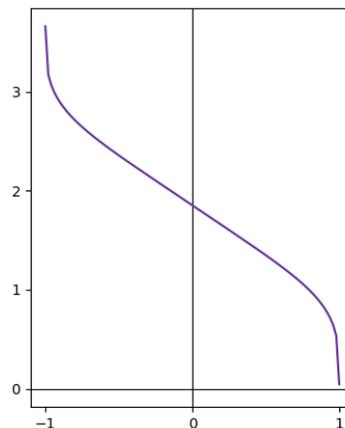


Figura 1.10: Inversa del coseno  $p = 4$ .

El hecho de que hayamos encontrado las anteriores representaciones integrales para las inversas tiene implicaciones numéricas, es decir cambia la forma en la cual las vamos a aproximar sus valores, para estas últimas funciones en lugar de utilizar un método de resolución de ecuaciones diferenciales como puede ser Runge-Kutta, se puede utilizar un método de cuadratura, es decir un método de aproximación numérica de integrales. En las gráficas presentadas aquí se utilizó el método *quad* de la librería QUADPACK de Fortran 77 implementado desde Python.

# Capítulo 2

## Preguntas geométricas

### 2.1. Parametrización por área

Volvamos a los círculos. Si nos damos un ángulo  $\theta$  cualquiera entre 0 y  $2\pi$ , podemos calcular el área del sector circular que queda encerrada entre el radio generado por  $\theta$  y el eje  $x$  (Figura 2.1). Si tomamos el disco unitario, sabemos

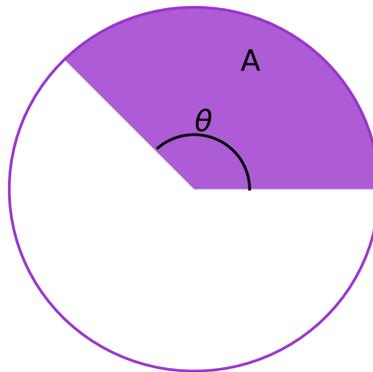


Figura 2.1: Sector circular.

que el área total es igual a  $\pi$ , y el área de la porción de disco sombreada es directamente proporcional al ángulo  $\theta$ ,

$$A = \pi \frac{\theta}{2\pi},$$
$$A = \frac{\theta}{2}.$$

Esta relación nos permite parametrizar el círculo en función del área,

$$(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(2A), \sin(2A)).$$

Pensar que esta propiedad se extiende a los escuículos en general no es nada trivial ya que la variable  $t$  que venimos usando no representa más el ángulo, recordar de las gráficas (Figura 1.8) que el período del escueno y coscueno depende del parámetro  $p$ . Sin embargo esta propiedad sí que se extiende a todos los escuículos.

**Teorema 9.** *Sea  $A$  el área de la figura encerrada entre el escuículo, el ángulo 0 y el formado en el punto  $(cq(t), sq(t))$  entonces.*

$$(cq(t), sq(t)) = (cq(2A), sq(2A))$$

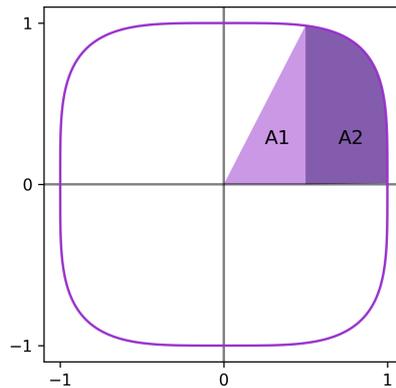


Figura 2.2: Parametrización por área.

*Demostración.* Si dividimos este área en dos regiones  $A_1$  y  $A_2$  (Figura 2.2) y escribimos al área total como  $A = A_1 + A_2$  deducimos que

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A = \frac{xy}{2} + \int_x^1 y(t) dt.$$

Utilizando las nuevas identidades pitagóricas 1.3 podemos realizar una sustitución  $y = (1 - x^p)^{1/p}$  para la región  $A_1$  e  $y = (1 - t^p)^{1/p}$  para  $A_2$  calculada mediante la integral,

$$\begin{aligned}
A(x) &= 1/2x(1-x^p)^{1/p} + \int_x^1 (1-t^p)^{1/p} dt \\
\frac{dA}{dx} &= -1/2x^p(1-x^p)^{1/p-1} + 1/2(1-x^p)^{1/p} - (1-x^p)^{1/p} \\
&= (1-x^p)^{1/p} \left( -\frac{x^p}{2(1-x^p)} - \frac{1}{2} \right) \\
&= (1-x^p)^{1/p} \left( \frac{-x^p - (1-x^p)}{2(1-x^p)} \right) \\
&= (1-x^p)^{1/p} \left( \frac{-1}{2(1-x^p)} \right) \\
&= -\frac{1}{2}(1-x^p)^{1/p-1} \\
\frac{dA}{dx} &= -\frac{1}{2(1-x^p)^{\frac{p-1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Dada que esta es la derivada,  $A$  tendría que tener la forma

$$A(x) = \int_{x_0}^x -\frac{du}{2(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Como  $A = 0$  cuando  $x = 1$  y teniendo en cuenta la inversión de los extremos de integración tenemos que

$$A(x) = \int_x^1 \frac{du}{2(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Si recordamos esta es precisamente la expresión de la inversa del coscueno dividido por 2, lo que nos lleva a que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\text{cq}^{-1}(x)}{2} \\
2A &= \text{cq}^{-1}(x) \\
\text{cq}(2A) &= x \\
\text{cq}(2A) &= \text{cq}(t).
\end{aligned}$$

□

La demostración que  $\text{sq}(2A) = \text{sq}(t)$  también vale, es análoga y se demuestra en la referencia [3].

## 2.2. La ¿función? $\pi$

Ya dijimos que el periodo de las funciones escuigonométricas es  $2\pi_p$  y utilizamos esto para restringir el dominio de las funciones escuigonométricas para poder invertirlas, luego el momento de encontrar una expresión para este valor  $\pi_p$ . Para investigar un poco mejor a este número utilizaremos la parametrización por área del escúrculo que dedujimos en la sección anterior  $\text{sq}(2A) = \text{sq}(t)$ . Dado que un periodo o vuelta completa al escúrculo se da para  $t = 2\pi_p$ , entonces media vuelta será hasta  $\pi_p$  y un cuarto de vuelta hasta  $\frac{\pi_p}{2}$ . Si queremos obtener por ejemplo el área de un cuadrante de disco escuircular deberíamos evaluar en el punto determinado por  $t = \frac{\pi_p}{2}$  y de la parametrización por área tenemos que

$$\text{sq}(2A_c) = \text{sq}(\pi_p/2)$$

donde  $A_c$  es el área del primer cuadrante de disco. Ahora aplicando la inversa a ambos miembros tenemos que

$$\begin{aligned}\text{sq}^{-1}(\text{sq}(2A_c)) &= \text{sq}^{-1}(\text{sq}(\pi_p/2)) \\ 2A_c &= \frac{\pi_p}{2} \\ 4A_c &= \pi_p\end{aligned}$$

y precisamente cuatro por el área de un cuadrante es el área total encerrada por el escúrculo unitario  $A_{total} = 4A_c$ . Por lo que esta generalización del número  $\pi$  sigue representando tanto el periodo de las funciones escuigonométricas como el área encerrada por el escúrculo unitario. Ahora la pregunta es como computar el valor de  $\pi_p$  para un valor de  $p$  en particular de manera eficiente, para esto trataremos a  $\pi_p$  como una función de  $p$ ,  $\pi(p)$ . Esta función asigna a  $p$  el área de un disco escuircular unitario de grado  $p$ , si  $A_c$  es el área de un cuadrante  $\pi(p) = 4A_c$ . Con este enfoque se puede llegar a una expresión integral de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\text{sq}(2A_c) &= \text{sq}(\pi_p/2) \\ \text{sq}(2A_c) &= 1 \\ 2A_c &= \text{sq}^{-1}(1) \\ \pi(p) &= 2\text{sq}^{-1}(1) \\ \pi(p) &= 2 \int_0^1 \frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}}\end{aligned}$$

Vale la observación de que con esta definición también podríamos evaluar el caso de  $p = 1$  donde lo que obtenemos es un cuadrado inscrito dentro del círculo unitario y todos los casos intermedios. Ahora si seguimos manipulando la anterior expresión con un cambio de variable  $t = u^p$  y con el diferencial  $dt$  como

$$dt = pu^{p-1} du = p(u^p)^{\frac{p-1}{p}} du = pt^{\frac{p-1}{p}} du,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\pi(p) &= 2 \int_0^1 \frac{du}{(1-u^p)^{\frac{p-1}{p}}} \\ &= \frac{2}{p} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{p-1}{p}} (1-t)^{\frac{p-1}{p}}} dt \\ &= \frac{2}{p} \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{1}{p}} (1-t)^{1-\frac{1}{p}}} dt \\ \pi(p) &= \frac{2}{p} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}-1} t^{\frac{1}{p}-1} dt.\end{aligned}$$

Y aunque ante el ojo inexperto esto no parece una simplificación de la expresión, a lo que llegamos es a una función con nombre propio conocida como función beta.

**Definición 10.** La función beta de primer orden es una función de dos variables definida sobre  $\mathbb{C}^2$  con parte real mayor a cero de la siguiente manera:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} t^{x-1} dt.$$

Si bien esta función está definida sobre dos variables complejas, a nosotros solo nos va a interesar evaluarla en números reales y nos va servir como paso intermedio para una expresión de la función  $\pi(p)$ . Si comparamos esta definición con  $\pi(p)$  podemos deducir que la función  $\pi(p)$  se representa en términos de la función beta como

$$\pi(p) = \frac{2}{p} \beta(1/p, 1/p).$$

Pero la función beta está definida sobre dos variables, mientras que la función  $\pi(p)$  sólo depende de  $p$ , para simplificar esto definiremos la función gamma la cual está muy relacionada con la función beta.

**Definición 11.** La función gamma denotada por la letra griega mayúscula  $\Gamma$  se define para todos los números complejos como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Las funciones beta y gamma están relacionadas entre si ya que satisfacen la identidad

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.1)$$

Utilizando esta propiedad en nuestra función  $\pi(p)$  obtenemos la expresión para  $\pi(p)$

$$\pi(p) = \frac{2\Gamma(1/p)\Gamma(1/p)}{p\Gamma(1/p + 1/p)} = \frac{2\Gamma^2(1/p)}{p\Gamma(2/p)}.$$

Esta simple expresión hace que sea sencillo aproximar valores específicos de  $\pi(p)$ , ejemplo de algunos valores interesantes de  $\pi(p)$  son

$$\pi(2) \approx 3,1416 \quad \pi(2,5) \approx 3,3809 \quad \pi(5) \approx 3,8006 \quad \pi(100) \approx 3,9994.$$

La gráfica de la función  $\pi(p)$  es la siguiente:

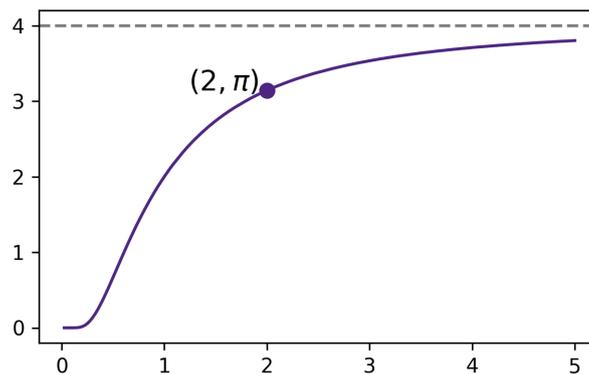


Figura 2.3: Función  $\pi(p)$ .

## 2.3. Cuando $\pi$ es el mínimo valor de $\pi$

En la sección anterior se generalizó el número  $\pi$ , esta generalización se basó en el período de las funciones escuigonométricas. Además se demostró que bajo ese enfoque, el área de un disco unitario siempre valía  $\pi_p$ . Ahora bien, históricamente el número  $\pi$  fue definido como el cociente entre el perímetro del disco y su diámetro, de ahí que se utilice la letra griega  $\pi$ , inicial de la palabra  $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ , periferia en griego. Es por esto que suena razonable intentar generalizar al número  $\pi$  en base a la longitud de arco del escuículo. Para esto debemos medir el perímetro en la  $p$ -distancia correspondiente al  $p$  del escuículo. La fórmula general para calcular la longitud de arco de una curva dada por una función  $f(x)$  en la  $p$ -distancia entre  $a$  y  $b$  es

$$\ell = \int_a^b (1 + |f'(x)|^p)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Para medir el perímetro del disco al cual denotaremos  $\ell$  vamos a posicionarnos en el primer cuadrante y luego multiplicaremos por 4 para obtener el total. De esta forma podemos usar la fórmula  $x^p + y^p = 1$  sin necesidad de los módulos y además podemos despejar  $y$  y obtener la función  $f(x) = (1 - x^p)^{\frac{1}{p}}$  cuya gráfica en  $[0, 1]$  es el primer cuadrante del escuículo. Utilizando la fórmula de longitud de arco obtenemos que

$$\frac{\ell}{4} = \int_0^1 (1 + x^{p(p-1)}(1 - x^p)^{1-p})^{\frac{1}{p}} dx.$$

Ahora realizamos el mismo cambio de variable  $u = x^p$  que usamos para el  $\pi$  definido por el área y llegamos a la expresión para el perímetro

$$\ell = \frac{4}{p} \int_0^1 (u^{1-p} + (1 - u)^{1-p})^{\frac{1}{p}} du.$$

Por lo tanto bajo esta nueva interpretación podemos definir a la función  $\pi(p)$  como

$$\pi(p) := \frac{2}{p} \int_0^1 (u^{1-p} + (1 - u)^{1-p})^{\frac{1}{p}} du.$$

Lo interesante de esta generalización de  $\pi$  es que  $\pi(2)$ , el  $\pi$  euclídeo, resulta ser el  $\pi_p$  óptimo. Es decir, si tomamos todos los escuículos unitarios y medimos en la distancia correspondiente, el mínimo cociente entre el perímetro y el diámetro se da para  $p = 2$  es decir para la 2-distancia o distancia euclídea.

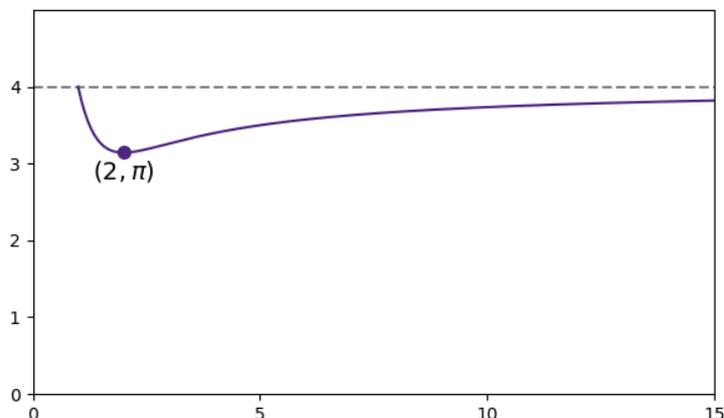


Figura 2.4: Función  $\pi(p)$  definida por longitud de arco.

Algo aún más interesante es que este resultado, no sólo es verdadero para las  $p$ -distancias, si no que sigue siendo verdadero para un conjunto mucho más general de distancias. En esta monografía no se ahondará más en esto pero se puede consultar en la referencia [5]. A partir de ahora durante el resto de la monografía cada vez que se hable de  $\pi_p$  se hará referencia, no a esta definición, si no a la referida al período de las funciones escuigonométricas.

## 2.4. El superhuevo de Piet Hein

Piet Hein es un científico, poeta y diseñador danés a quien muchas veces se le atribuye la invención de esta curva. Si bien fue Gabriel Lamé el primero en estudiarla, Piet Hein fue quien popularizó su uso en el diseño. Piet Hein observó que en la vida cotidiana interactuamos con cientos de objetos cuadrados y circulares y él consideraba que el escuirculo combinaban lo mejor de ambas figuras y era una perfecto intermediario.

En 1959 en Estocolmo, Suecia, los planificadores urbanos intentaban diseñar la circulación de unas calles alrededor de lo que, en ese entonces, era una fuente ovalada donde se lo conoce como *Sergels Torg* (Figura 2.5). Piet Hein propuso una rotonda con forma de **superelipse** (Figura 2.6), una curva plana que, análogamente al escuirculo, es el intermedio entre un rectángulo y una elipse y así como un escuirculo se puede entender como un círculo en la  $p$ -distancia, la superelipse es el equivalente la elipse en la  $p$ -distancia. Este diseño conectaría de forma armónica la forma de la fuente ovalada con la rectitud de las calles del trazado urbano. Hoy en día lo que era una rotonda

superelíptica se transformó en una gran fuente superelíptica.



Figura 2.5: *Sergels Torg*, Estocolmo, Suecia.

Un extensión de esta superelipse a tres dimensiones muy utilizada por Piet Hein es un sólido de revolución alrededor del eje mayor de la superelipse. A este sólido se lo conoce como **superhuevo** (Figura 2.7). Tanto el superhuevo como la superelipse son utilizadas en una gran variedad de objetos de diseño por Piet Hein como pueden ser mesas, lámparas, floreros, platos, jarrones o simplemente como objetos de decoración. Lo que intentaremos hacer ahora será calcular el volumen del superhuevo de Piet Hein y el área de la superelipse. Para realizar estas cuentas necesitaremos a las funciones escuigonométricas y sus propiedades.

**Definición 12.** Una superelipse de grado  $p$  con ejes  $a$  y  $b$  es una curva plana definida de forma implícita por la ecuación

$$\left| \frac{x}{a} \right|^p + \left| \frac{y}{b} \right|^p = 1.$$

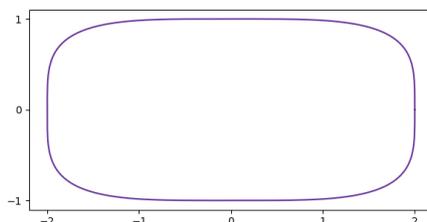


Figura 2.6: Superelipse  $p = 4$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ .

Notar que la definición es exactamente la misma que la de la curva de Lamé, Definición 5. El hecho de llamarla superelipse es meramente una cuestión de hacer énfasis en el hecho de que esta curva es una generalización de la elipse en la  $p$ -distancia.

En los siguientes desarrollos se utilizará varias veces la primera identidad pitagórica generalizada en (1.3). Tener presente que  $\text{sq}^p(t) = 1 - \text{cq}^p(t)$  y viceversa. Si nos enfocamos en el primer cuadrante y despejamos  $y$  de la ecuación de la superelipse obtenemos

$$y = \frac{b}{a}(a^p - x^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Para obtener el área del primer cuadrante deberíamos integrar esta última expresión entre 0 y  $a$  y para obtener el área total multiplicar por 4, es decir

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a}(a^p - x^p)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Lo primero que haremos para resolver esta integral es una sustitución escuigonométrica

$$\begin{aligned} x &= a \text{sq}(t), \\ dx &= a \text{cq}^{p-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi_p/2} (a^p - a^p \text{sq}^p(t))^{\frac{1}{p}} a \text{cq}^{p-1}(t) dt \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi_p/2} (a^p (1 - \text{sq}^p(t)))^{\frac{1}{p}} a \text{cq}^{p-1}(t) dt \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi_p/2} a \text{cq}(t) a \text{cq}^{p-1}(t) dt \\ &= 4ba \int_0^{\pi_p/2} \text{cq}^p(t) dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En este punto para continuar integraremos indefinidamente  $\text{cq}^p(t)$  utilizando el método de integración por partes, tomando como  $u$  y  $dv$

$$\begin{aligned} u &= \text{cq}(t) & du &= -\text{sq}^{p-1}(t) \\ dv &= \text{cq}^{p-1}(t) & v &= \text{sq}(t). \end{aligned}$$

De esta forma la integral queda

$$\begin{aligned}
 \int c q^p(t) dt &= c q(t) s q(t) + \int s q^p dt \\
 &= c q(t) s q(t) + \int (1 - c q^p) dt \\
 &= c q(t) s q(t) + t - \int c q^p dt \\
 2 \int c q^p dt &= c q(t) s q(t) + t \\
 \int c q^p dt &= \frac{1}{2}(c q(t) s q(t) + t).
 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos una antiderivada de  $c q^p(t)$ , volviendo a (2.2) se puede terminar de deducir la fórmula del área como

$$\begin{aligned}
 A &= 4ba \left( \frac{1}{2}(c q(t) s q(t) + t) \right) \Big|_0^{\pi_p/2} \\
 &= 2ba ((c q(t) s q(t) + t)) \Big|_0^{\pi_p/2} \\
 &= 2ba \frac{\pi_p}{2} \\
 &= ba \pi_p
 \end{aligned}$$

Con esta fórmula para el área de una superelipse podemos calcular el área de la fuente de *Sergels Torg* la cual tiene un eje mayor de  $45m$  y el menor de  $40m$  por lo que  $a = 22,5$  y  $b = 20$ . El  $p$  favorito de Piet Hein es  $p = 2,5$  y por lo tanto  $\pi_{2,5} \approx 3,3809$  (ver que esto ya fue calculado en la Sección 2.2). Con estos datos el área de la fuente de *Sergels Torg* resulta

$$A = (20)(22,5)\pi_{2,5} \approx 1521,4m^2.$$

Diremos que un superhuevo es de Piet Hein cuando la superelipse que lo genera tiene  $p = 2,5$  (Figura 2.7). Para calcular el volumen del superhuevo nos aprovecharemos de que es un sólido de revolución y existe una fórmula para calcular su volumen por medio de la ecuación de la superelipse. Una pequeña advertencia, esta deducción es algo larga pero no por eso menos interesante, las técnicas utilizadas son novedosas y vale la pena hacerlas. Si el perfil de un sólido esta dado por la función  $f(x)$  entre  $a$  y  $b$  entonces el volumen del sólido esta dado por la fórmula de Pappus :

$$V = \pi_2 \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Figura 2.7: Superhuevo de Piet Hein.

Si despejamos  $y$  del primer cuadrante de la superelipse y lo rotamos obtendremos medio superhuevo por lo que debemos multiplicar por 2 para obtener el volumen completo. Utilizando la fórmula de Pappus para el volumen

$$\begin{aligned} V &= 2\pi_2 \int_0^a y(x)^2 dx \\ &= 2\pi_2 \int_0^a \left( \frac{a}{b} (a^p - x^p)^{\frac{1}{p}} \right)^2 dx \\ &= \frac{2\pi_2 b^2}{a^2} \int_0^a (a^p - x^p)^{\frac{2}{p}} dx. \end{aligned}$$

Realizando una sustitución escuigonométrica  $x = a \operatorname{sq}(t)$ , similar a lo obtenido para el área de la superelipse esto nos lleva a

$$V = 2\pi_2 ab^2 \int_0^{\pi_p/2} \operatorname{cq}^{p+1}(t) dt.$$

Si se integra indefinidamente por partes la función  $\operatorname{cq}^{p+1}(t)$  se obtiene (esto se puede ver en la referencia [2]) la siguiente antiderivada

$$\int \operatorname{cq}^{p+1}(t) dt = \frac{1}{3} \operatorname{cq}^2(t) \operatorname{sq}(t) + \frac{2}{3} \int \operatorname{cq}(t) dt.$$

Esto en nuestra fórmula resulta en

$$\begin{aligned} V &= 2\pi_2 ab^2 \left( \frac{1}{3} \operatorname{cq}^2(t) \operatorname{sq}(t) \Big|_0^{\pi_p/2} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi_p/2} \operatorname{cq}(t) dt \right) \\ &= \frac{4\pi_2 ab^2}{3} \int_0^{\pi_p/2} \operatorname{cq}(t) dt. \end{aligned}$$

En este punto uno se puede tomar una pausa y tomar un poco de aire antes de continuar integrando. En orden de encontrar una mejor expresión para la integral del cosceno dividimos y multiplicamos al integrando por  $cq^{p-2}(t)$  obteniendo

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi_2 ab^2}{3} \int_0^{\pi_p/2} \frac{cq^{p-1}(t)}{cq^{p-2}(t)} dt \\ &= \frac{4\pi_2 ab^2}{3} \int_0^{\pi_p/2} \frac{cq^{p-1}(t)}{(1 - sq^p(t))^{(p-2)/p}} dt. \end{aligned}$$

Ahora realizamos una sustitución y obtenemos el diferencial de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} u &= sq^p(t) \\ u^{\frac{1}{p}} &= sq(t) \\ \frac{1}{p} u^{1/p-1} du &= cq^{p-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Esto en la integral queda

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi_2 ab^2}{3p} \int_0^1 \frac{u^{1/p-1}}{(1-u)^{(p-2)/p}} du \\ &= \frac{4\pi_2 ab^2}{3p} \int_0^1 u^{1/p-1} (1-u)^{2/p-1} du. \end{aligned}$$

Donde ahora podemos reconocer la integral como la función beta de la Definición 10, que utilizamos anteriormente para expresar a  $\pi(p)$ , en esta ocasión igualmente escribiremos a la función beta en términos de la función gamma mediante la identidad (2.1) para evitar usar funciones de dos variables. La fórmula del volumen del superhuevo queda en términos de gamma como

$$V = \frac{4\pi_2 ab^2}{3p} \beta\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}\right) = \frac{4\pi_2 ab^2 \Gamma(\frac{1}{p}) \Gamma(\frac{2}{p})}{3p \Gamma(\frac{3}{p})}$$

Esta última será nuestra fórmula final del volumen del superhuevo de altura  $2a$ , radio  $b$  y generado por una superelipse de grado  $p$ . En el parque de *Kumbelhaven*, ciudad de Farum, Dinamarca, hay una escultura de un superhuevo de Piet Hein de bronce de 1,42 metros de alto y 0,4 metros de radio (Figura 2.8). Si quisiéramos saber su volumen podemos utilizar la

fórmula que acabamos de deducir con los datos  $a = 0,71$ ,  $b = 0,4$  y  $p = 2,5$ . Reemplazando obtenemos

$$V = \frac{4\pi_2(0,71)(0,4)^2\Gamma(\frac{1}{2,5})\Gamma(\frac{2}{2,5})}{3(2,5)\Gamma(\frac{3}{2,5})}$$
$$V \approx 0,53535 m^3.$$



Figura 2.8: *Kumbelhaven*, Farum, Dinamarca.

# Capítulo 3

## Escuínculo de Fernandez Guasti

### 3.1. Comparación de FG vs Lamé

En la Sección 1.1 de esta monografía se definió el escuínculo de Lamé y se hizo la aclaración de que esta no era la única forma de definir un escuínculo, en el sentido de que existen otras curvas que intermedian entre un círculo y un cuadrado. En este capítulo definiremos el **escuínculo de Fernandez Guasti** o escuínculo FG para abreviar.

**Definición 13.** El escuínculo de Fernandez Guasti unitario se define en el rectángulo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  de forma implícita con la ecuación

$$x^2 + y^2 - s^2 x^2 y^2 = 1.$$

Donde  $s$  se lo conoce como el parámetro de cuadratura y tiene un efecto análogo al que tenía el grado  $p$  del escuínculo de Lamé.

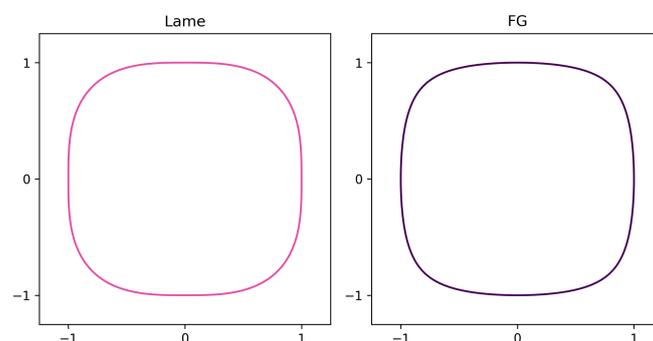


Figura 3.1: Escuínculo de Lamé  $p = 3$  vs Escuínculo FG  $s = 5/6$ .

Un comentario algo subjetivo. El escuirculo de Lamé tal vez puede llegar a ser el favorito de los matemáticos, especialmente de los que se dedican al análisis, por el hecho de que puedan entenderse como círculos representados en otras distancias. Además del hecho de que mediante estos se pueda generalizar la trigonometría clásica de la manera en que lo hemos hecho. Por otro lado, el escuirculo FG podría ser el favorito de un perfil más aplicado, de hecho Manuel Fernandez Guasti es un físico especialista en óptica. En este contexto la forma del escuirculo es útil para modelar fenómenos ópticos y la versión de Fernandez Guasti es mucho mas fácil de parametrizar que la de Lamé. En el mundo de la criptografía al escuirculo de Fernandez Guasti se lo conoce con el nombre de curva de Edwards, en este contexto el algoritmo de firma digital de curva de Edwards (EdDSA) ofrece amplias ventajas en cuanto a eficiencia y seguridad por sobre el famoso (ECDSA), algoritmo basado en curvas elípticas. Aunque no ahondaremos en estas aplicaciones, no quería dejar de mencionarlas, estas darían para escribir otra monografía.

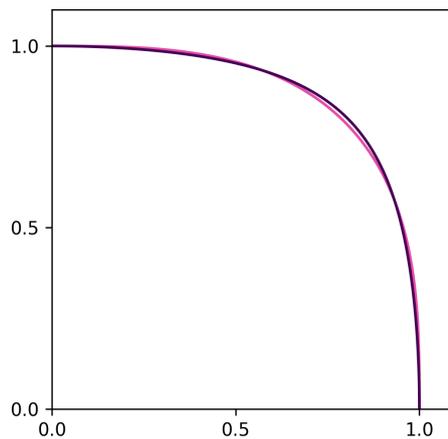


Figura 3.2: Escuirculos de Lamé y FG superpuestos.

El escuirculo de Lamé tiene un principal defecto. Si bien se encuentra siempre entre el círculo y el cuadrado, es un círculo perfecto para  $p = 2$  mas para ningún valor de  $p$  llega a ser realmente un cuadrado, sólo lo alcanza en el infinito. Aclaración, si definimos la  $\infty$ -distancia como  $d_\infty(P, Q) = (\max(|x_0|, |x_1|), \max(|y_0|, |y_1|))$  (Esto satisface la Definición 3) obtenemos el cuadrado al cual se aproximan los escuirculos cuando  $p$  aumenta como conjunto de puntos que equidistan del centro en la  $\infty$ -distancia. Sin embargo el parámetro  $p$  no deja de estar en un intervalo no acotado y trabajar con el infinito puede traer algunos problemas computacionales. Por otro lado, el

escuírculo FG es un círculo para  $s = 0$  y un cuadrado para  $s = 1$ , es decir el parámetro de cuadratura  $s$  se encuentra en un dominio perfectamente acotado  $[0, 1]$  en lugar de  $[2, \infty)$  como es para Lamé. Otra ventaja es que el parámetro  $s$  no es tan influyente en la naturaleza de la curva como lo es  $p$  en el escuírculo de Lamé. En el escuírculo de Lamé la naturaleza de la ecuación depende fuertemente del parámetro  $p$ , cuando el parámetro no es un entero par hace falta tener en cuenta los módulos y cuando  $p$  no es un entero positivo la ecuación ya no es un polinomio, lo que significa que la curva no es algebraica.

**Definición 14.** Una curva se dice que es algebraica cuando se puede escribir como

$$\rho(x, y) = 0$$

siendo  $\rho(x, y)$  un polinomio de dos variables.

Y cuando  $p$  si es un entero positivo y la curva si es algebraica, el grado de la misma,  $p$ , puede ser arbitrariamente grande. Por otro lado el escuírculo FG es, para cualquier valor del parámetro  $s$ , una curva algebraica de grado 4 sin singularidades. Más aún es una ecuación bicuádrica, es decir de cuarto grado y sin términos de grado impar. Por todo esto el escuírculo FG tiene varias parametrizaciones sencillas y es mas amigable para definir y programar en la computadora. Al final del capítulo se definirán y graficarán algunas superficies basadas en escuírculos FG.

En la referencia [1] se pueden encontrar varias parametrizaciones del escuírculo FG , una de las más sencillas es

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t), \\ y(t) &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{1 - s \sin^2(t)}}, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

¿Por qué restringimos la definición al rectángulo  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ? Esto es porque de otra manera la ecuación genera otras cuatro componentes conexas algebraicas llamadas lóbulos, (Figura 3.3). En el caso de  $s = 1$  la curva degenera en cuatro rectas que encierran al cuadrado (Figura 3.4).

Como ya dijimos, una ventaja de esta nueva curva es que alcanza tanto al cuadrado como al círculo para valores finitos del parámetro de cuadratura  $s$ . Pero esto se puede incluso mejorar ya que un, entre comillas, problema de esta nueva formulación es la velocidad con la que nuestro círculo se transforma en un cuadrado, la transición no es lineal, (Figura 3.5). Se puede ver en la gráfica que si tomamos valores de  $s$  equiespaciados en el intervalo  $[0, 1]$  no parece transformarse en un cuadrado de manera proporcional al parámetro,

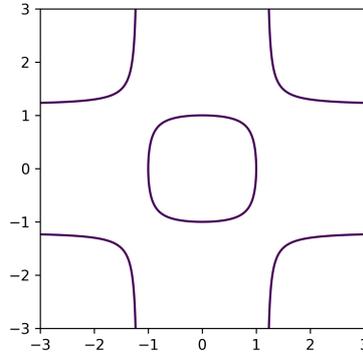
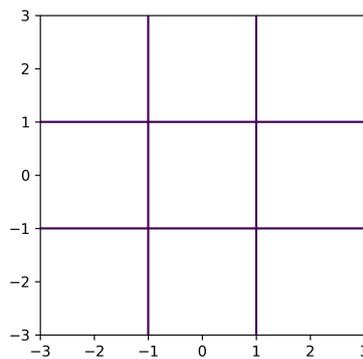


Figura 3.3: Esquírculo FG con sus lóbulos.

Figura 3.4: Esquírculo FG  $s = 1$ (Cuadrado) con sus lóbulos.

al principio cambia muy lento y para valores superiores a 0,75 cambia muy de golpe.

Esto se puede remediar con un cambio de variable, para esto queremos que nuestro nuevo parámetro, llamémoslo  $\tau$ , viva en el intervalo  $[0, 1]$  y que cuando  $\tau = 0$  tengamos un círculo, cuando  $\tau = 1$  tengamos un cuadrado, que cuando  $\tau = 0,5$  la esquina de nuestro esquírculo esté exactamente a mitad de camino entre la esquina del cuadrado  $(1, 1)$  y su correspondiente en el círculo, el punto  $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ , y que además este pasaje sea lineal, es decir proporcional a  $\tau$ . Una interpolación lineal entre estos dos puntos se consigue con el siguiente cambio de variable (combinación lineal convexa entre  $(1, 1)$  y  $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ ).

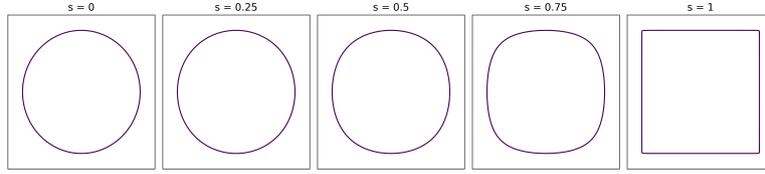


Figura 3.5: Transición equiespaciada entre  $s = 0$  hasta  $s = 1$ .

$$\begin{cases} x = \sqrt{1/2}(1 - \tau) + \tau, \\ y = \sqrt{1/2}(1 - \tau) + \tau. \end{cases} \quad t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

Despejando el parámetro de cuadratura  $s$  en función de  $x$  e  $y$  de la ecuación del escúrculo FG obtenemos la expresión

$$s = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{xy}.$$

Haciendo el cambio de variable (3.1) y luego simplificando se llega a

$$s = 2 \frac{\sqrt{(3 - \sqrt{8})\tau^2 - (2 - \sqrt{8})\tau}}{(1 - (1 - \sqrt{2})\tau)^2}. \quad (3.2)$$

Metiendo esto en la ecuación del escúrculo FG obtenemos la expresión

$$x^2 + y^2 - \left( 4 \frac{(3 - \sqrt{8})\tau^2 - (2 - \sqrt{8})\tau}{(1 - (1 - \sqrt{2})\tau)^4} \right) x^2 y^2 = 1.$$

En la Figura 3.6 se puede ver una transición entre el círculo y el cuadrado equiespaciada en la variable  $\tau$ . Los valores de  $\tau$  utilizados fueron  $[0; 0,25; 0,5; 0,75; 1]$  que se corresponden con los valores  $[0; 0,766; 0,927; 0,986; 1]$  en la variable  $s$ .

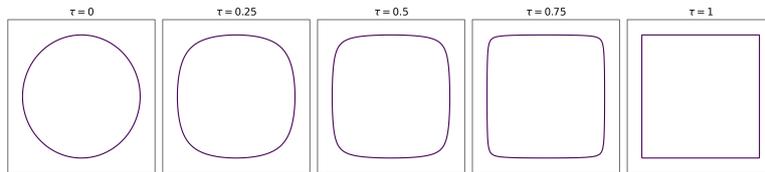


Figura 3.6: Transición equiespaciada en la variable  $\tau$ .

### 3.2. Área vía integrales elípticas

¿Cuál es el área del escúrculo de Fernandez Guasti? A continuación calcularemos el área del escúrculo FG y se verá como surge naturalmente la necesidad de introducir las integrales elípticas. Al igual que con el escúrculo de Lamé, nos ubicaremos en el primer cuadrante despejaremos  $y$ , integraremos sobre  $x$  y multiplicaremos por 4. Es decir,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - s^2 x^2 y^2 &= 1 \\ y^2(1 - s^2 x^2) &= 1 - x^2 \\ y &= \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - s^2 x^2}}.\end{aligned}$$

Por ende el área se calcula como

$$A = 4 \int_0^1 y(x) dx = 4 \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - s^2 x^2}} dx.$$

Utilizando el cambio de variable  $t = sx$  obtenemos que

$$A = \frac{4}{s} \int_0^s \sqrt{\frac{1 - (t^2/s^2)}{1 - t^2}} dt. \quad (3.3)$$

Si vemos a esta última expresión como función de  $s$  lo que tenemos acá tiene nombre y apellido propios, no es nada mas que una **integral elíptica incompleta de segunda especie**.

Antes de seguir, las integrales elípticas son funciones de las cuales hay dos tipos, completas e incompletas, las primeras dependen de una sola variable, y las segundas dependen de dos variables. Este tipo de funciones se definen mediante integrales ya que no pueden ser expresadas en término de funciones más elementales, pero en esta monografía ya estamos acostumbrados a este tipo de funciones. El nombre integrales elípticas, surge del hecho de que estas funciones aparecen en problemas relacionados al cálculo de la longitud de arco de una elipse.

**Definición 15.** La integral elíptica **completa** de segunda especie, (Figura 3.7) es la función de una variable

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt.$$

Notar que esta función realmente depende de una sola variable  $k$ , la  $t$  es una variable auxiliar que desaparece cuando se evalúa la integral. También notar su similitud con la integral de nuestro problema del área.

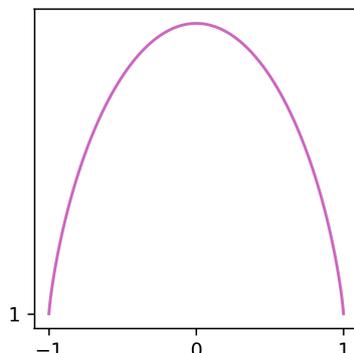


Figura 3.7: Integral elíptica completa de segunda especie.

**Definición 16.** La integral elíptica **incompleta** de segunda especie, es la función de dos variables

$$E(\Phi, k) = \int_0^{\text{sen}(\Phi)} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt.$$

Notar la relación entre una integral elíptica completa e incompleta. Ahora con estas definiciones y recordando la expresión integral que se obtuvo del área (3.3), podemos expresarla en términos de la integral elíptica **incompleta** de segunda especie como

$$A(s) = \frac{4}{s} E(\text{sen}^{-1}(s), 1/s).$$

Si bien esta última fórmula del área es matemáticamente correcta las integrales elípticas incompletas son funciones de dos variables, mientras que el área del escúrculo realmente sólo depende de una variable  $s$ . Este no es el único problema, dado que el parámetro de cuadratura  $s$  vive en el intervalo  $[0, 1]$  el segundo argumento de la integral elíptica es un número mayor a 1 que para valores de  $s$  pequeños puede ser arbitrariamente grande, esto puede ocasionar problemas de estabilidad numérica a la hora de intentar aproximar esta integral. Este problema se puede resolver de una manera muy interesante, empecemos desarrollando la integral nuevamente.

$$A(s) = \frac{4}{s} E(\text{sen}^{-1}(s), 1/s)$$

$$\frac{s}{4} A = \int_0^s \frac{\sqrt{1 - (t^2/s^2)}}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Aplicando el cambio de variable  $w = \frac{t}{s}$

$$= \int_0^1 \frac{s\sqrt{1-w^2}}{\sqrt{1-w^2s^2}} dw = \int_0^1 \frac{\sqrt{s^2-w^2s^2}}{\sqrt{1-w^2s^2}} dw.$$

En el siguiente paso multiplicamos al denominador y al numerador por  $\sqrt{s^2-w^2s^2}$  y en paso siguiente sumamos y restamos 1 en el numerador y notando que  $s^2-w^2s^2 = (1-w^2s^2) + (s^2-1)$  reagrupamos

$$= \int_0^1 \frac{s^2-w^2s^2}{\sqrt{s^2-w^2s^2}\sqrt{1-w^2s^2}} dw = \frac{1}{s} \int_0^1 \frac{(1-w^2s^2) + (s^2-1)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2s^2}} dw.$$

En el anterior paso también sacamos una  $s$  del denominador y ahora distribuimos el denominador sobre el numerador.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s} \int_0^1 \frac{(1-w^2s^2)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2s^2}} + \frac{(s^2-1)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2s^2}} dw \\ &= \frac{1}{s} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-w^2s^2}}{\sqrt{1-w^2}} + \frac{(s^2-1)}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2s^2}} dw. \end{aligned}$$

Por la linealidad de la integral se llega a

$$= \frac{1}{s} \left( \int_0^1 \sqrt{\frac{1-w^2s^2}{1-w^2}} dw + (s^2-1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-w^2}\sqrt{1-w^2s^2}} dw \right). \quad (3.4)$$

De la primera integral podemos identificar una integral elíptica completa de segunda especie, Definición 15. En cuanto a la segunda integral, eso es lo que a continuación definiremos como integral elíptica completa de **primera especie**.

**Definición 17.** La integral elíptica **completa de primera especie**, (Figura 3.8), es la función de una variable

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt.$$

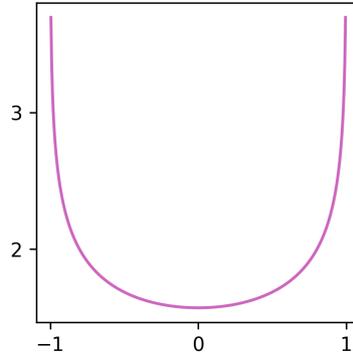


Figura 3.8: Integral elíptica completa de primera especie.

**Definición 18.** La integral elíptica **incompleta de primera especie** es la función de dos variables

$$F(\Phi, k) = \int_0^{\text{sen}(\Phi)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} dt.$$

Ahora sabiendo esto y recordando a la expresión del área a la que se llegó en (3.4) podemos expresarla en términos de integrales elípticas **completas** de una manera compacta como

$$A(s) = \frac{4}{s^2} (E(s) + (s^2 - 1)K(s)).$$

Gracias a que el dominio del parámetro de cuadratura se encuentra acotado en  $[0, 1]$  en la Figura 3.9 se puede ver como las áreas también están acotadas entre  $\pi$ (círculo) y 4 (cuadrado).

### 3.3. Superficies escurculares

Para concluir esta monografía y descontracturar un poco de tantas cuentas y demostraciones, en esta última sección definiremos y graficaremos algunas superficies escurculares, para esto nos basaremos en la expresión de Fernandez Guasti. Será útil tener presente la ecuación (3.2) que relaciona a  $s$  con  $\tau$ , la utilizaremos para linealizar el parámetro de cuadratura. Para todas las gráficas que se expondrán a continuación se utilizó el algoritmo *Marching Cubes* de Lewiner implementado desde Python.

**Definición 19.** El **esfubo**, (Figura 3.10), es una superficie que intermedia entre una esfera y un cubo definida por la ecuación

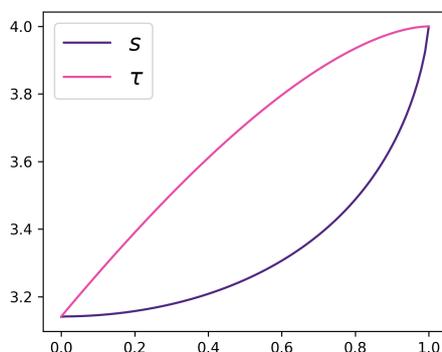


Figura 3.9: Área del esquírculo FG, en función de los parámetros  $s$  y  $\tau$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 - s^2 ((xy)^2 + (yz)^2 + (xy)^2) + (xyzs^2)^2 = 1,$$

$$(x, y, z) \in [-1, 1]^3.$$

Para ser más precisos deberíamos referirnos a esta superficie como esfubo FG, dado que también se podría definir el esfubo de Lamé basandonos en la otra definición del esquírculo. En la referencia [1] se pueden ver tanto una parametrización como un estudio más detallado del esfubo en particular.

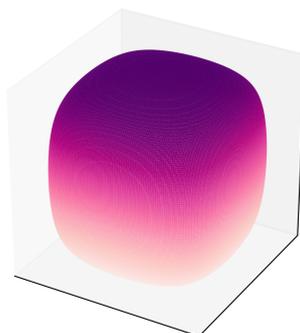


Figura 3.10: Esfubo  $\tau = 0,5$ .

**Definición 20.** El **escuilindro uniforme**, (Figura 3.11), no es más que un cilindro de sección esquírcular, su ecuación es la misma que la del esquírculo

FG pero considerada en tres dimensiones.

$$x^2 + y^2 - (sxz)^2 = 1,$$

$$\begin{cases} (x, z) \in [-1, 1]^2, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Definición 21.** El **escuilindro no uniforme**, (Figura 3.12), a diferencia del uniforme no es un cilindro ya que su sección a lo largo del eje longitudinal no es constante, va variando entre un cuadrado y un círculo siendo todas sus secciones escuírculos FG.

$$x^2 + z^2 - (xzy)^2 = 1,$$

$$\begin{cases} (x, z) \in [-1, 1]^2, \\ y \in [0, 1]. \end{cases}$$



Figura 3.11: Escuilindro uniforme  $\tau = 0,5$ .



Figura 3.12: Escuilindro no uniforme.

Notar que la ecuación del escuilindro no uniforme se obtiene de reemplazar  $s$  por  $y$  en la ecuación del uniforme. Para la figura del escuilindro no uniforme, (Figura 3.12), la variable  $y$  fue linealizada mediante la ecuación (3.2).

**Definición 22.** El **escono uniforme**, (Figura 3.13), es una especie de cono de base escuircular, sus casos extremos son el cono y la pirámide regular.

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{sxy}{z}\right)^2 = z^2,$$

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1, \\ -z \leq x \leq z, \\ -z \leq y \leq z. \end{cases}$$

**Definición 23.** El **escono no uniforme**, (Figura 3.14), tiene una base cuadrada pero a diferencia de la pirámide es una superficie suave, todas sus secciones son escírculos FG con parámetro de cuadratura aumentando a medida que se acercan a la punta.

$$x^2 + y^2 - (xy)^2 = z^2,$$

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1, \\ -z \leq x \leq z, \\ -z \leq y \leq z. \end{cases}$$

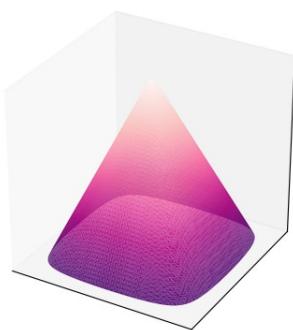


Figura 3.13: Escono uniforme  $\tau = 0,5$ .

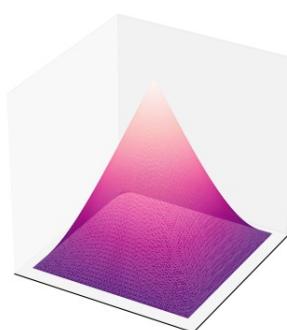


Figura 3.14: Escono no uniforme.

**Definición 24.** El **almohadón escuircular**, (Figura 3.15), posee dos de sus secciones circulares y la restante escuircular. El nombre se debe a que se parece a un almohadón, en inglés es *Squircular Cushion*.

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy)^2 = 1,$$

$$(x, y, z) \in [-1, 1]^3.$$

**Definición 25.** El **Esfilindro**, (Figura 3.16), es una superficie cerrada con parámetro de cuadratura  $s$  que intermedia entre una esfera para  $s = 0$  y un cilindro cerrado para  $s = 1$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 - s^2 ((xy)^2 + (yz)^2) = 1,$$

$$(x, y, z) \in [-1, 1]^3.$$

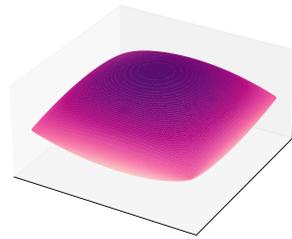


Figura 3.15: Almohadón.

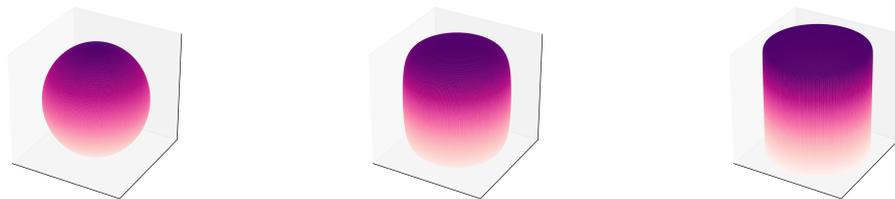


Figura 3.16: Esflindros para valores de  $\tau$  0 ; 0,5 y 1,0 .

# Epílogo

## Un tema pendiente

Esta monografía tuvo varias secciones eliminadas, una de ellas fue la sección de la **escuérbola**. La idea era generalizar las funciones seno y coseno hiperbólicos, que parametrizan la hipérbola, y así introducir las funciones seno y coseno **escuerbólicos**,  $\text{Se}(t)$  y  $\text{Ce}(t)$ , que parametrizan la escuérbola (una versión de la hipérbola en la  $p$ -distancia). El objetivo de esa sección era generalizar la conocida identidad  $\text{sen}(it) = i \text{senh}(t)$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria. Se puede demostrar que  $\text{sq}(at) = a \text{Se}(t)$  cuando  $a$  es una raíz de orden  $p$  de  $-1$ , es decir,  $a^p = -1$ . Sin embargo, este resultado puede llevar a algunas inconsistencias, como cuando se toma  $p = 3$  y  $a = -1$ . Por este motivo, y para moderar la extensión de la monografía, esta sección fue eliminada. Este epílogo es una invitación al lector mas interesado a explorar la validez de la igualdad  $\text{sq}(at) = a \text{Se}(t)$ , yo no tengo la respuesta, pero sugiero consultar las últimas páginas de la referencia [4].

## Cierre

Gracias al Profesor Marcelo Actis por tomarse el tiempo de leer esta monografía y por hacer las correcciones y recomendaciones mas oportunas. Desde que leí por primera vez la palabra *Squigonometry*, la curiosidad mas intensa se apodero de mí, y cuando se me ocurrió la idea de escribir esta monografía ya no tuve excusa para no profundizar estudiar esto, a veces de forma obsesiva. Así me encontré días enteros sólo pensando en escuérculos. El proceso de escritura significó un desafío que definitivamente se convirtió en parte de mi vida durante un considerable tiempo. El placer que me dio aprender estos temas me hizo recordar constantemente por qué estudio matemática. Si llegaste hasta el final de la monografía, o leíste alguna parte de ella, te agradezco que hayas decidido dedicarle tu tiempo y espero que hayas disfrutado leerla tanto como yo disfruté escribirla.

# Bibliografía

- [1] Chamberlain Fong. *Squircular calculations*. 2018.
- [2] Robert Poodiack. *Squigonometry, Hyperellipses and Supereggs*. Mathematics Magazine, 2016.
- [3] S.Chebolu, A. Hatfield, R. Klette, C. Moore, and E. Warden. *Trigonometric Functions in the  $p$ -norm*. 2021.
- [4] William E. Wood. *Squigonometry*. Mathematics Magazine, 2011.
- [5] Nikhil Henry y Bukowski Sahoo. *Extremal Values of  $Pi$* . Mathematical Assoc of America, 2022.