Departamento de Matemática,

Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

La Conjetura de Toeplitz

Marco Sanchez

Concurso de monografías UMA 2020

Contents

1 Introducción

1.1 Un vistazo por arriba

En 1911, el matemático alemán Otto Toeplitz propuso la siguiente conjetura:

"Toda curva cerrada simple admite al menos un cuadrado inscrito en ella."

Antes de adentrarnos en algunas definiciones matemáticas que contiene el enunciado, procedamos a explicarlo de una forma un tanto informal. A mi juicio, esta conjetura se presta en lo absoluto para eso ya que es una conjetura o problema que puede entender cualquier ser humano del mundo no necesariamente con conocimientos matemáticos.

Una curva cerrada simple es una curva continua, que no se corta consigo misma y que comienza y termina en el mismo punto. Por ejemplo, una elipse es una curva cerrada simple, pero una con forma de "ocho" no. Que sea continua quiere decir que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel, y que admita un "cuadrado inscrito" significa que existen cuatro puntos pertenecientes a la curva que forman los vértices de un cuadrado. La figura 1 nos muestra un ejemplo.

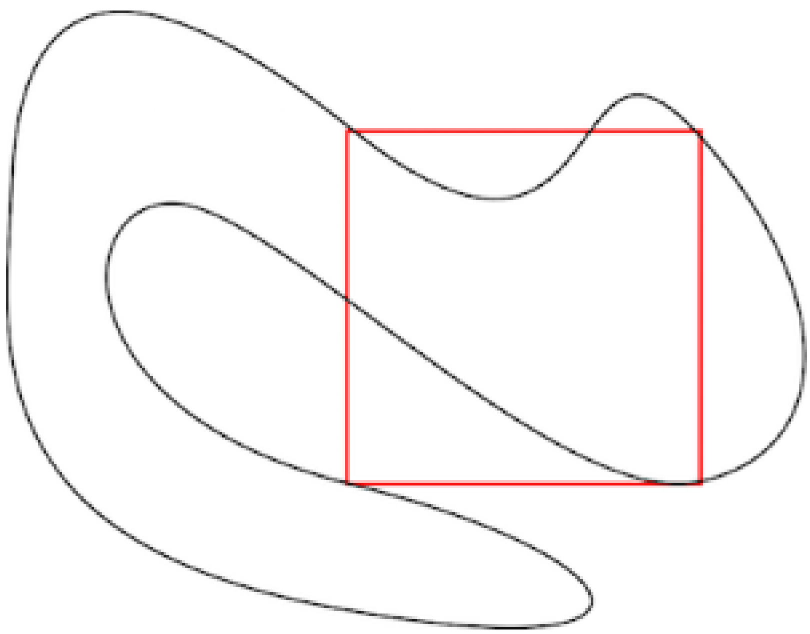

Figure 1: Ejemplo de cuadrado inscrito en una curva de Jordan

El problema del cuadrado inscrito, conocido también como *conjetura de Toeplitz*, pertenece a esa clase de enunciados simples y ya centenarios que muchos matemáticos han intentado dilucidar sin éxito. En los próximos capítulos comenzaremos resolviendo un caso particular de curva simple cerrada: un triángulo T cualquiera en el plano. ¿Podemos encontrar siempre un cuadrado inscrito en él? Luego iremos aumentando el nivel de exigencia a la curva, pasando por polígonos arbitrarios, curvas con ciertas condiciones de regularidad, hasta llegar a los dos mejores resultados que se encuentran publicados hasta el momento: el de *"la curva que no se enrolla"* de H. Brian Griffiths y el de Terence Tao. Llegando al final, dedicaremos un capítulo a algo con carácter entre yapa y anecdótico, que es una prueba de la conjetura, pero para rectángulos! donde usaremos algunas herramientas de topología para resolverlo.

Aclaración: El espíritu de esta monografía se va a centrar en las ideas y no en el detalle matemático.

1.2 ¿Quién fue Toeplitz?

Otto Toeplitz nació en una familia judía de matemáticos. Tanto su padre como su abuelo eran profesores de matemáticas del Gymnasium y publicaron artículos en Matemáticas. Toeplitz creció en Breslau, lugar donde se graduó. Luego estudió matemáticas en la Universidad de Breslau y obtuvo un doctorado en geometría algebraica en 1905. En 1906 Toeplitz llegó a la Universidad de Gotinga, que era el principal centro matemático del mundo, y permaneció allí durante siete años. La facultad de matemáticas incluía a una serie de personajes importantes en el abiente matemático en aquél momento, como David Hilbert, Felix Klein y Hermann Minkowski. En ese momento Toeplitz comenzó a reelaborar la teoría de los funcionales lineales y las formas cuadráticas en espacios n-dimensionales para espacios dimensionales infinitos. Escribió cinco artículos directamente relacionados con la teoría espectral de operadores que Hilbert estaba desarrollando. Durante este período, también publicó un documento sobre procesos de suma y descubrió las ideas básicas de lo que ahora se llaman operadores Toeplitz. En 1913, Toeplitz se convirtió en profesor extraordinario en la Universidad de Kiel. Fue ascendido a profesor en 1920.

Es en 1911 cuando Toeplitz propuso el tema central de esta monografía, que es el problema del cuadrado inscrito:

¿Cada curva de Jordan contiene un cuadrado inscrito?

Junto con Hans Rademacher, escribió un clásico de las matemáticas populares *Von Zahlen und Figuren*, que se publicó por primera vez en 1930 y luego se tradujo al inglés como *"Disfrute de las matemáticas"*.

Toeplitz estaba profundamente interesado en la historia de las matemáticas. En 1929, cofundó *"Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik"* con Otto Neugebauer y Julius Stenzel. A partir de la década de 1920, Toeplitz abogó por un "método genético" en la enseñanza de las matemáticas, que aplicó al escribir el libro *Entwicklung der Infinitesimalrechnung ("El cálculo: un enfoque genético")*. El libro presenta el tema dando una narrativa histórica idealizada para motivar los conceptos, mostrando cómo se desarrollaron a partir de los problemas clásicos de las matemáticas griegas. Se dejó sin terminar, editado por Gottfried Köthe y publicado póstumamente en alemán en 1946.

En 1933, entró en vigencia la Ley de Servicio Civil y los profesores de origen judío fueron retirados de la enseñanza. Inicialmente, Toeplitz pudo conservar su puesto debido a una excepción para aquellos que habían sido nombrados antes de 1914, pero fue despedido en 1935. En 1939 emigró de forma obligatoria a Palestina, donde fue asesor científico del rector de la Universidad Hebrea. Otto muere en Jerusalén de tuberculosis un año después, con 58 años de edad.

Figure 2: Otto Toeplitz, (1 de Agosto de 1881 – 15 de Febrero de 1940)

1.3 Adentrándonos más en la historia del problema

El problema del cuadrado inscrito tiene una historia larga e interesante. Al parecer, cada pocos años alguien nuevo se enamora de él y trabaja muy duro para obtener una nueva variación del problema. Desafortunadamente, a medida que los resultados se vuelven más fuertes, las soluciones involucran cosas más técnicas, y varias de ellas comienzan a incluir algunas lagunas, aún esperando un escrutinio cuidadoso. Curiosamente, la impresión que uno recibe de la literatura es que ni siquiera es posible una prueba elemental directa en el caso lineal, ya que el problema es realmente difícil. Pero... ¿formalmente qué significa el enunciado? A continuación daremos brevemente dos definiciones para dejarnos bien en claro lo que plantea el problema.

Definición 1: Una curva C dibujada en el plano es de Jordan si no tiene autointersecciones y es cerrada.

Definición 2: Un polígono cualquiera se dice inscrito en una curva si la curva contiene a todos sus vértices.

Entonces la conjetura de Toeplitz dice:

Toda curva de Jordan admite un cuadrado inscrito

El primer resultado importante fue probado por Emch, quien probó la conjetura para curvas convexas. Más tarde, Emch escribe que Toeplitz y algunos de sus estudiantes descubrieron el resultado de forma independiente dos años antes, en 1911, pero nunca se publicó la prueba. Lo que hace básicamente Emch es lo siguiente: comienza construyendo una familia de rombos inscritos con una diagonal paralela a una línea dada. Al rotar la línea y usar la singularidad de tales rombos, concluye que uno puede rotar continuamente un rombo en sí mismo con dos diagonales intercambiadas. Entonces el teorema del valor intermedio implica que en algunos puntos el rombo tiene diagonales iguales, dando así un cuadrado.

Shnirelman hizo un avance importante en 1929, cuando ofreció una solución para curvas con curvatura continua a trozos. Este artículo apareció en una oscura publicación rusa, publicándose luego una versión ampliada después de su muerte. Guggenheimer estudió esta demostración, añadió y corrigió varios puntos técnicos, y concluyó que para que la prueba de Shnirelman funcione, la curva debe tener una variación limitada. Shnirelman señaló que para una curva genérica la paridad del número de cuadrados inscritos debe ser invariable ya que la curva se deforma. La prueba utiliza un lema local sobre la existencia de un cuadrado inscrito para curvas cerradas, una versión de la observación de Hebbert (y, muy probablemente, completamente independiente). Para la conectividad de curvas con curvatura continua y variación acotada Shnirelman y Guggenheimer utilizaron resultados avanzados conocidos en el campo.

Curiosamente, se cree saber de dónde sacó Shnirelman la idea de esta prueba. Al momento de su primera publicación, Shnirelman estaba trabajando con Lyusternik en la conjetura de Poincaré, que establece que toda superficie convexa lisa tiene al menos tres geodésicas cerradas. Esta conjetura se hizo en un artículo donde el mismo Poincaré prueba que existe al menos una de estas geodésicas cerradas (en superficies analíticas), y esta prueba utiliza un argumento de deformación y paridad, similar al que usa Shnirelman.

En 1961, Jerrard redescubrió el problema del cuadrado inscrito y lo demostró para curvas analíticas. Al parecer, estaba motivado por el teorema de Kakutani de que cada cuerpo convexo tiene un cubo circunscrito. Este resultado en sí mismo le siguió a una serie de resultados anteriores similares y más tarde fue ampliado por Dyson, Floyd y otros.

En los últimos años, han aparecido más resultados sobre el problema del cuadrado inscrito, que debilitaron las restricciones sobre las curvas y ampliaron el alcance del teorema (a ciertos cuadriláteros espaciales). De hecho, existe una larga historia de variaciones sobre el problema. Mencionemos algunas de ellas.

Primero, hay varios resultados de triángulos inscritos, rombos y rectángulos en general, en curvas de Jordan. En segundo lugar, hay varios resultados sobre cuadriláteros cíclicos inscritos en curvas suficientemente suaves. Tenga en cuenta que en el caso lineal por partes, a menos que un cuadrilátero $Q \subset \mathbb{R}^2$ sea un trapezoide isóceles, siempre se puede tomar un triángulo X suficientemente delgado, de modo que ningún polígono similar a Q esté inscrito en X.

Finalmente, hay una gran cantidad de resultados que extienden el problema del cuadrado inscrito a dimensiones más altas, incluidas curvas y superficies. Estos resultados son demasiado numerosos para enumerarlos a lo largo de esta monografía. Así que a lo largo de la misma, nos iremos concentrando principalmente en los resultados e ideas más relevantes, dejando un poco de lado algunos detalles técnicos en las demostraciones que aparezcan.

2 Que comience la carrera

2.1 Atacando polígonos

Vamos a comenzar viendo un caso particular de curva simple cerrada: un triángulo T cualquiera en el plano. ¿Podemos encontrar siempre un cuadrado inscrito en él?

Dado un triángulo, siempre podemos inscribir en él dos rectángulos como los de la figura 3. Uno de ellos, el azul, es más alto que ancho; el otro, el rojo, es más ancho que alto. Ahora está claro que moviendo los vértices de alguno de ellos sobre los lados del triángulo, podemos convertirlo en el otro, de manera continua. Pero entonces, si hemos pasado de manera continua de un rectángulo más ancho que alto a otro más alto que ancho, en algún momento nuestro rectángulo tuvo que ser igual de ancho que de alto; es decir, un cuadrado.

Dato de color: Se podría formalizar un poco más la prueba definiendo una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tome un valor que determine un único rectángulo con base paralela a la base del triángulo, como puede ser la distancia de uno de los vértices de la base del triángulo, al vértice más próximo del rectángulo, que se encuentra sobre la misma recta. A este valor llamémoslo δ. Luego, como δ determina un único rectángulo con estas condiciones, podemos definir nuestra f como sigue:

$$f(\delta) = \ell_a - \ell_b$$

donde ℓ_a corresponde a la longitud de la altura del rectángulo que determina δ, y ℓ_b, a la longitud de su base.

Por el dibujito de abajo, es claro que f es continua y pasa de ser negativa a positiva en algún momento. Luego por el teorema de valores intermedios, $f(x) = 0$ para algún x de nuestro dominio. Ese x es el que determinará nuestro cuadrado inscrito. Muy lindo.

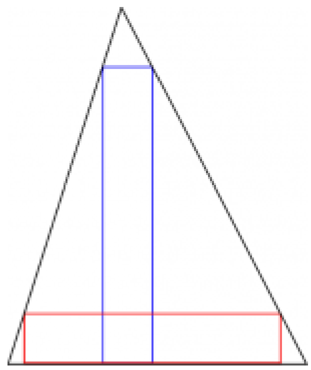

Figure 3:

¿Y ahora qué pasa si en vez de pensar que nuestra curva es un triángulo, pensamos en un cuadrilátero cualquiera?

Bueno, la respuesta la dió en 1914 C.M Hebbert en un artículo titulado *"The Inscribed and Circumscribed Squares of a Quadrilateral and Their Significance* *in Kinematic Geometry"*, en el que se encarga de probar el siguiente teorema:

Teorema: *En cualquier cuadrilátero se puede inscribir al menos un cuadrado teniendo un vértice en cada uno de los cuatro lados.*

Idea de la Prueba:

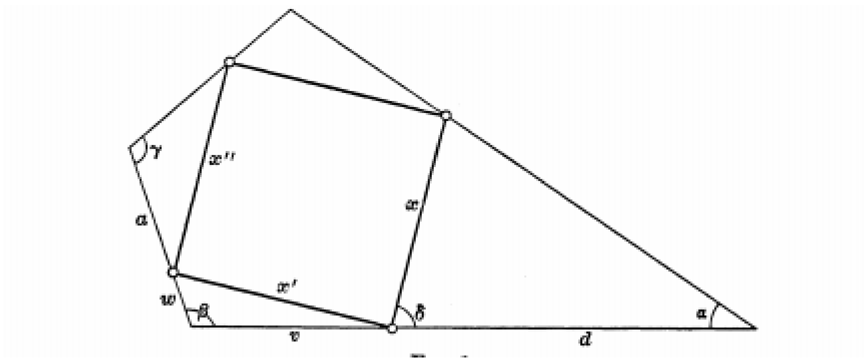

Figure 4:

Supongamos la existencia de tal cuadrado. Luego sea x el lado de un cuadrado que contiene sus cuatro vértices sobre los cuatro lados de un cuadrilátero dado y sea δ el ángulo formado por x y el lado d del cuadrilátero. Además sean α,β y γ los ángulos indicados en la figura 4 y sea a el lado del cuadrilátero que se encuentra entre los ángulos β y γ. v y w son los segmentos contenidos en d y a, determinados por los vértices del cuadrado. Luego, haciendo uso de la ley de los senos y las condiciones que $x = x' = x''$, y que $x \perp x'$ y $x' \perp x''$, obtenemos que:

$$\tan\delta = \frac{d(csc\beta + cos\beta + cot\gamma \sin\beta) - a(1 + cot\beta)}{d(cot\gamma cos\beta - sin\beta) + a(1 + cot\alpha)}$$

Resulta que la existencia de una solución para la ecuación anterior es suficiente para probar la existencia de un cuadrado inscrito.

Luego por un teorema establecido por A. Hurwitz, Hebbert en su paper menciona que la ecuación tiene solución. Esto quiere decir que encontramos un valor de δ que a su vez nos determina v y w. Estos últimos nos determinarán nuestro cuadrado inscrito. $\square$

Para más detalles de la prueba, pueden visitar el paper de Hebbert [2], donde explica además el argumento de A. Hurwitz que usa para determinar la existencia de la solución a la ecuación planteada en el esquema de prueba anterior.

Ahora pasemos a ver qué pasa si pensamos que la curva es un **polígono cualquiera**!

Una respuesta a esto la dio Igor Pak en 2008, en su artículo titulado *"The discrete square peg problem"*:

Teorema: *Todo polígono simple en un plano tiene un cuadrado inscrito.*

Idea de la Prueba:

Igor considera un polígono simple $X \subset \mathbb{R}^2$. Además, sobre la primera parte de la prueba supone que los ángulos de X son obtusos, es decir, que están entre π y $\frac{3\pi}{2}$. Luego fija una orientación en el sentido de las agujas del reloj en X. Para un par ordenado (y, z) de puntos $y, z \in X$, denota por u y v los otros dos vértices de un cuadrado $[zyuv]$ en el plano. Y aquí viene la idea clave de la demostración, que es cuando denota con $U \subset X \times X$ al subconjunto de pares (y, z) tales que $u \in X$. Del mismo modo, denota por $V \subset X \times X$ al subconjunto de pares (y, z) tales que $v \in X$. Luego encontrar un cuadrado inscrito lo reduce a mostrar que U se interseca con V, encontrando así lo que buscaba. $\square$

Una vez más, los detalles de esta prueba se pueden ver más en profundidad en su paper [3], donde además hace uso de algunas herramientas topológicas y geométricas en un sentido elemental. Esta "elementalidad" geométrica de la que hablamos nos hace suponer que podríamos haber puesto la prueba completa. Sin embargo debido a su extensión, optamos por solo dar detalles de la idea de fondo que se busca.

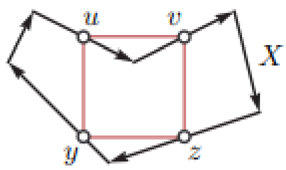

Figure 5: Cuadrado $[zyuv]$ inscrito en X

En su paper, Igor prueba además la siguiente extensión de su teorema principal anteriormente mencionado:

Teorema: *Cada polígono genérico simple tiene un número impar de cuadrados inscritos.*

En esta monografía no entraremos en más detalles que su enunciado.

2.2 Resultados obtenidos sobre curvas con ciertas condiciones

En 1913, Arnold Emch respondió afirmativamente a la conjetura suponiendo que la curva es convexa [5]. Esto quiere decir que puede cortar a una recta en un máximo de dos puntos. En la figura 6, la curva de la izquierda es convexa, mientras que la de la derecha no lo es.

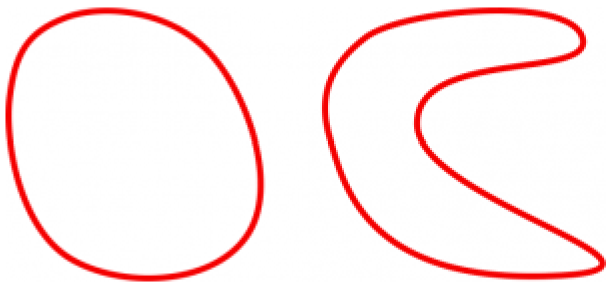

Figure 6: Curva convexa a izquierda y no convexa a derecha

.

En 1915, el mismo autor respondió también de manera positiva bajo la suposición de que la curva es "suficientemente regular". Técnicamente hablando, se supone que la curva está formada de un número finito de trozos "analíticos".

En 1929, Schnirelman demostró el mismo resultado, pero relajando considerablemente la condición de regularidad: se asume simplemente que la curva es dos veces diferenciable, y que la segunda derivada es continua. A decir verdad, la prueba de Schnirelman fue publicada recién en 1944 [6], pues no era del todo correcta; ella fue corregida en 1965 por Heinrich Guggenheimer.

En 1950, Ogilvy publicó la solución del problema general, sin ninguna condición de regularidad para la curva... ¿Y que pasó? Lamentablemente, su prueba era falsa. Para un matemático de hoy, leer este artículo hasta hallar el error es un ejercicio muy interesante. [7]

En 1989, Walter Stromquist probó la existencia de un cuadrado inscrito asumiendo apenas la existencia de una derivada. [8]

Antes de continuar, vamos a sincerarnos: Claramente estamos yendo muy muy rápido! Bueno, el problema es que en general los resultados anteriores involucran en sus pruebas muchas técnicas avanzadas, que para explicarlas necesitaríamos una monografía de cada una de ellas, al igual que sus pruebas. Es por eso que solo las menciono, y al final de este trabajo se dejarán los links para aquél que se interese en adentrar más en detalle en las cuestiones anteriormente mencionadas!

Pero bueno, haciendo saltos un poquito grandes en la historia, llegamos a los dos mejores resultados hasta el día de la fecha, que son el de **"la curva que no se enrolla"** y el de Tao.

2.3 "La curva que no se enrolla"

Este resultado proviene del matemático H. Brian Griffiths y data de 1991. Él supone que la curva *"no se enrolla"*. Para explicar lo que esto significa, considera un punto p sobre la curva y observa la porción de la curva situada dentro de un disco pequeño centrado en p y de radio r. Para cada par de puntos distintos x, y de la curva en dicho disco, considera la recta xy que los une, a la que podemos llamar una "cuerda" de la curva. Decimos entonces que la curva no se enrolla en torno al punto p si existe un radio r y una recta D tal que ninguna de estas cuerdas es paralela a D.

Para ilustrar un poco mejor la idea detrás de esta definición, observemos la figura siguiente (Figura 7). La curva está dibujada en negro. El punto p está marcado en azul. En el disco rojo, centrado en p, he dibujado un cierto número de cuerdas (en trazos azules punteados). Se aprecia que las cuerdas van en todas las direcciones. Sin embargo, la curva negra interseca al disco verde (más pequeño que el rojo) en una porción casi rectilínea. Las cuerdas que unen dos puntos de esta porción van todas casi en la dirección noroeste-sudeste. Ninguna de esas cuerdas va en la dirección norte-sur. La curva no se enrolla.

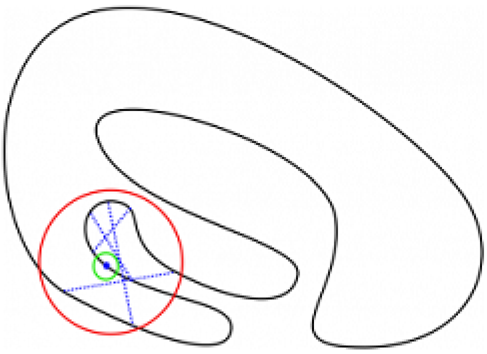

Figure 7: Ejemplo de curva que no se enrolla

.

En la figura 8, se muestra un ejemplo de una curva que se enrolla.

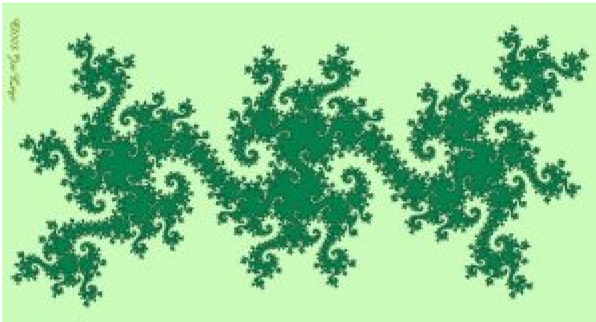

Figure 8: Ejemplo de curva que se enrolla

.

En este caso, no entraré en detalles ni ideas de la prueba que da H. Brian Griffiths en su artículo [9]. Sin embargo, haré una observación simple, pero no por eso poco importante, del ejemplo que acabamos de dar. Claramente la figura 8 es una curva bastante intrincada y rebuscada, al mejor estilo fractal. En verdad es una curva difícil!

Este ejemplo no fue puesto al azar, ya que cuando se buscan tipos de curvas que no se enrollan, nos encontramos en la mayoría de los casos con las de tipo fractal. Esto quiere decir que lo obtenido por H. Brian Griffiths abarca a una gran cantidad de curvas, convirtiendo a su resultado en uno de los más potentes al día de hoy.

Ahora, si miramos un poquito fuerte la figura 8, lo que pasa en esa curva es que para todo disco centrado en un punto de esta (sin importar qué tan pequeño sea) y para toda recta D, la intersección de la curva y el disco contiene dos puntos x, y que definen una cuerda xy paralela a D.

Está de más decir que esto no impide de ninguna manera que la curva contenga cuadrados inscritos, tal como se aprecia a simple vista.

Estas hipótesis de regularidad son desagradables, y uno quisiera evitarlas, ya que no parecen estar relacionadas con el problema de manera fundamental.

2.4 El Approach analítico de Tao

En el año 2017, Terence Tao, considerado por muchos como uno de los mejores matemáticos del mundo (con lo que la palabra "mejor" intente significar en el ambiente científico), publica un artículo titulado *"An integration approach to the toeplitz square peg problem"*, en el que cambia el rumbo de ataque del problema (de lo estrictamente geométrico a algo más analítico) introduciendo ciertas integrales asociadas a la curva. Además menciona que este enfoque es capaz de dar respuestas positivas al problema del cuadrado inscrito en algunos casos especiales, como por ejemplo, en el caso en el que la curva es la unión de dos funciones Lipschitz $f, g : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que coinciden en los extremos y cuyas constantes de Lipschitz son estrictamente menores que uno.

Antes de adentrarnos en la idea de Tao, repasemos algunas definiciones necesarias.

Definición: Para un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se define el *gráfico* de f como sigue:

$$\mathfrak{Graph}_f(I) := \{(t, f(t)) : t \in I\}$$

.

Definición: Una función $f : M \longrightarrow N$ entre espacios métricos (M, d_M) y (N, d_N) se dice que es *K-Lipschitz* (o se dice que satisface una condición de Lipschitz o que es Lipschitz continua) si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y)$$

para todo $x, y \in M$.

Para funciones definidas sobre espacios euclídeos, por ejemplo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lo anterior se puede escribir como:

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, Tao enuncia su teorema como sigue:

Teorema: Sea $[t_0, t_1]$ un intervalo y sean $f, g : [t_o, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones $(1-\epsilon) - Lipschitz$, para $\epsilon > 0$. Supongamos también que $f(t_0) = g(t_0)$, $f(t_1) = g(t_1)$, y que $f(t) < g(t)$ para todo $t_0 < t < t_1$. Entonces el conjunto

$$\mathfrak{Graph}_f([t_0, t_1]) \cup \mathfrak{Graph}_g([t_0, t_1])$$

inscribe un cuadrado.

En su paper, Tao explica que la hipótesis de f, g con constante de Lipschitz menor que uno se utiliza fundamentalmente para garantizar que la curva en la que se aplica el teorema de la curva de Jordan es simple. Esto lo detalla en una proposición incluída en su artículo [4].

Tao también define en su artículo los $\mathfrak{Squares}$, como conjuntos contenidos en $(\mathbb{R}^2)^4$ como sigue:

$$\mathfrak{Squares} = \{((x,y),(x+a,y+b),(x+a-b,y+a+b),(x-b,y+a)) : x,y,a,b \in \mathbb{R}; (a,b) \neq (0,0)\}$$

Luego se ve claramente que un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ inscribe un cuadrado si y solo si Γ^4 interseca a $\mathfrak{Squares}$.

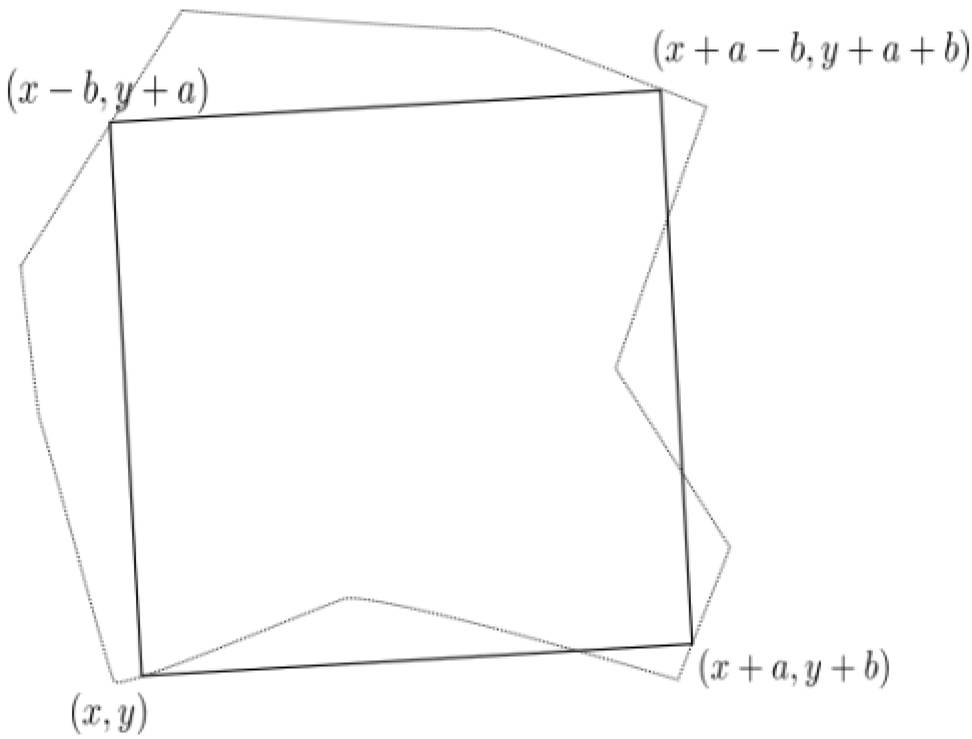

Figure 9:

Vamos a contar la idea de la demostración de Tao, ayudándonos de un dibujito (Figura 10).

Lo que hace Tao es suponer que tiene una curva C de Jordan a partir de dos funciones lipschitz f y g como en la imagen de abajo, y luego se construye una especie de "L", donde un punto p_1 se coloca sobre la función de arriba y los otros dos p_2 y p_3 sobre la de abajo. Lo bonito de esto es que esta "L" nos genera un cuarto punto q, que en principio no tiene porqué estar en la curva, pero a medida que los puntos que forman la "L" se van moviendo sobre la curva, usando argumentos analíticos, se puede probar que ese punto q va dibujando una curva γ (como la naranja en el dibujo) continua desde el punto t_0 hasta el punto t_1. Luego usando herramientas de integración (con la integral usual), Tao argumenta que el área entre la gráfica de f y la gráfica de g, tiene que ser igual al área entre la curva γ y la gráfica de g. Luego esto nos dice que tiene que haber un punto de intersección m entre γ y la curva C (en el dibujo se puede ver cómo se interseca con la gráfica de f). Esto pasa ya que de lo contrario es razonable que no sucedería la igualdad de las áreas anteriormente mencionadas. Finalmente ese punto de intersección m es el que resulta ser el cuarto vértice del cuadrado inscrito buscado, probando así el teorema.

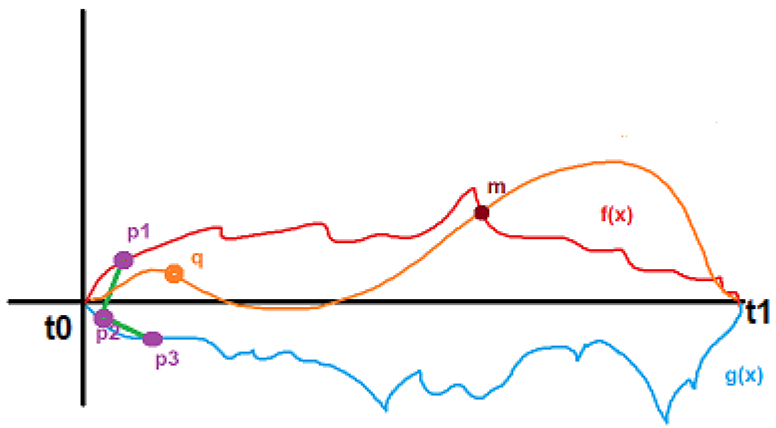

Figure 10:

3 La Yapa

3.1 ¿Y si pensamos en un rectángulo en vez de un cuadrado?

Lo que vamos a hacer a continuación es probar que toda curva de Jordan tiene un rectángulo inscrito en ella.

Prueba:

Dados cuatro puntos distintos sobre una curva de Jordan C, ¿cómo podremos determinar si son los cuatro vértices de un rectángulo? Entonces supongamos que tenemos un rectángulo $xyuv$. Una observación clave que podemos hacer es que los segmentos xu y yv tendrán igual longitud, compartiendo además su punto medio. (Figura 11)

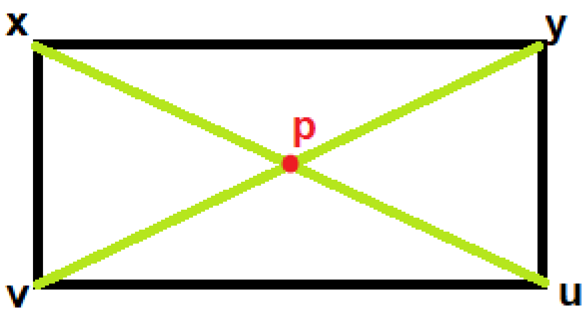

Figure 11: Rectángulo $xyuv$ con p punto medio de los segmentos xu y yv

.

Luego si consideramos la función que a cada par de puntos de la curva (pensado en el plano) le asigne el punto medio del segmento que los une y la distancia entre ellos (longitud del segmento que los une), tendremos esquemáticamente algo como lo que sigue:

$$\{\text{Pares de puntos de } C\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

definida por la asignación $\{x, y\} \mapsto$ (punto medio, distancia).

Luego notemos lo siguiente: si f llegara a no ser inyectiva, entonces tendríamos dos pares distintos tales que forman los vértices de un rectángulo. Acá es donde es importante considerar a los pares de puntos sin un orden, es decir, que $(x, y) = (y, x)$, ya que de lo contrario para cualquier par de puntos sobre la curva, nuestra f nos daría la información falsa de haber encontrado un rectángulo.

Consideremos ahora una parametrización de la curva C, $\alpha : [0, 1] \longrightarrow C$, como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, donde $\alpha(0) = \alpha(1)$. Con esto, estamos identificando a cada punto de la curva con un número real en el intervalo $[0, 1]/\{0 = 1\}$ (cocientando ya que el 0 y el 1 representan el mismo punto de la curva C). Pero bien, lo que queremos son pares de puntos, lo cual nos lleva a pensar en $\widehat{I} = I \times I/\{(0, y) = (1, y); (x, 0) = (x, 1)\}$. Luego logramos identificar cada par puntos de la curva con un punto de $\widehat{I}$ (vía $\alpha \times \alpha$). Pero falta algo más, ya que queremos pares no ordenados. Luego la identificación estricta la logramos con $\overline{I} = \widehat{I}/\{(x, y) = (y, x)\}$. Finalmente nuestra f será:

$$f(\overline{(t, s)}) = \left(\frac{x(t) + x(s)}{2}, \frac{y(t) + y(s)}{2}, \sqrt{(x(t) - x(s)^2 + (y(t) - y(s)^2} \right),$$

donde $f : \overline{I} \to \mathbb{R}^3$, que está bien definida, pues es la inducida por la función $g : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como antes (sin salir de la "clase"), que cumple que $g((0, s)) = g((1, s)); g((t, 0)) = g((t, 1)); g((t, s)) = g((s, t))$.

Además se puede ver que g es continua. Luego, pensando a $\overline{I}$ con la topología cociente, nos queda f continua.

Observemos ahora que $\overline{I}$ es homeo a la cinta de Moebius, a la que vamos a llamar M. Llamaremos $G : M \longrightarrow \overline{I}$ a este homeo y notemos que vía G, la curva borde de M va a parar al borde de $\overline{I}$, que son los elementos de la forma $\overline{(s, s)}$, con $s \in I$.

Por otro lado, estos elementos van a parar al borde de la superficie $f(\overline{I}) \subset \mathbb{R}^3$, $f(\overline{(s, s)}) = (x(s), y(s), 0)$, lo cual implica que la curva borde de $f(\overline{I})$ es C en el plano xy.

Finalmente, supongamos que f es inyectiva. Luego $f : \overline{I} \longrightarrow f(\overline{I})$ es un homeo y por lo tanto $f \circ G : M \longrightarrow f(\overline{I})$ es un embedding de la cinta de Moebius en $\mathbb{R}^3$. [12]

Pero ahora paremos un segundo y notemos lo siguiente: vía este embedding, la curva borde de M va a parar a C, que es homeo a una circunferencia. ¡Y esto no puede ocurrir! Ya que de ser posible, tendríamos un embedding del plano proyectivo en $\mathbb{R}^3$ (el plano proyectivo construido como una cinta de Moebius cuyo borde se pega con el de una circunferencia). Así llegamos a un absurdo, que provino de suponer que f era inyectiva. Luego existen dos pares de puntos distintos contenidos en C que forman los vértices de un rectángulo. $\blacksquare$

Esta prueba realmente es asombrosa por donde se la mire. En la biliografía se podrá encontrar un link que los llevará a un video donde se muestra un esquema de esta misma demostración de una forma visual muy linda usando animaciones tridimensionales muy bonitas. [11]

4 Reflexiones finales

4.1 ¿Y para qué todo esto?

¿Este problema es un pasatiempo, un enigma, un desafío, o una conjetura seria? En mi opinión, pienso que merece ser considerado como una conjetura seria, ya que cumple ampliamente los criterios de Hilbert:

1. El problema es centenario hasta las manos. Es claro que no es suficiente que un problema sea antiguo para que sea interesante. Sin embargo, el hecho de que muchos matemáticos se interesen en él de manera continua desde hace un siglo es un argumento más convincente.

2. El problema se enuncia de manera simple. Frente a un problema complejo, no es raro que los matemáticos lo simplifiquen hasta el extremo para llegar a su "substancia medular" por así decir. Esto era lo que Henri Poincaré escribió (a propósito de otro problema):

"Basta con referirse sobre lo que escribí a propósito del asunto para entender la complejidad extrema del problema: junto con la dificultad principal, aquella derivada del fondo mismo de las cosas, existe una gama de dificultades secundarias que vienen a complicar aún más la tarea del investigador. Habría por tanto un interés en estudiar primeramente un problema en que uno solamente encuentre la dificultad principal, desprendiéndose de todas las dificultades secundarias". [10]

Cabe mencionar que las soluciones parciales conocidas del problema hacen intervenir métodos que son útiles en otros campos. Incluso sin haber sido resuelto, el problema ha generado muchos otros. Algunos son igual de difíciles, pero otros han sido resueltos. Obviamente, no se podrían describir todos acá. Pero por ejemplo: la curva inicial estaba trazada en el plano. Tracémosla en el espacio, y -por qué no- en el de dimensión n. ¿Se puede hallar cuatro puntos de la curva que formen un cuadrado?

En fin, el problema del cuadrado inscrito sigue abierto al día de hoy. Podríamos dedicarle un ratito a ver qué sale, ¿no?

5 Bibliografía

[1] *Toeplitz, Oscar: Ueber einige aufgaben der analysis situs Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn, 94 (1911), p. 197.*

[2] *Hebbert C. M.: The inscribed and circumscribed squares of a quadrilateral and their significance in kinematic geometry, Ann. of Math. 16 (1914/15), p. 38–42.*

[3] *Pak, Igor: The discrete square peg problem (2008).*

[4] *"An integration approach to the toeplitz square peg problem" de Terence Tao, (2017)*

[5] *Emch, Arnold: On the Medians of a Closed Convex Polygon. Amer. J. Math. 37 (1915), no. 1, p. 19–28.*

[6] *Snirelman, L. G.: On certain geometrical properties of closed curves (en russe) Uspehi Matem. Nauk 10, (1944) p. 34–44.*

[7] *Frink, O. et Ogilvy, C.S.: Advanced Problems and Solutions: 4325, Amer. Math. Monthly 57 (1950), no. 6, 423–424; Ver también 58 (1951), no. 2, p. 113–114.*

[8] *Stromquist, Walter: Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves. Mathematika 36 (1989), no. 2, p. 187–197.*

[9] *Griffiths, H. Brian: The topology of square pegs in round holes. Proc. London Math. Soc. (3) 62 (1991), no. 3, p. 647–672.*

[10] *Poincaré, Henri: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Transactions of the American Mathematical Society, 6, (1905), p. 237-274.*

[11] *https://www.youtube.com/watch?v=AmgkSdhK4K8*

[12] *Un curso de Topología, Demetrio Stojanoff*