UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Concurso de Monografías UMA

Limitaciones de formalismos:
autorreferencia, música
y paradojas lógicas.

Agustina Itatí Zocola

Santa Fe, Agosto 2020

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

El tema central de la presente monografía se basa en los Teoremas de Incompletitud de Gödel, los cuales dejan en evidencia las limitaciones de los sistemas formales. En particular, nos enfocaremos en el primero de ellos. Se presentará una demostración alternativa que posee de base a la Paradoja de Berry.

El orden seguido en este escrito no es el que generalmente se escoge para presentar resultados matemáticos. Se ha redactado de modo tal que la dificultad de lectura vaya en incremento y el lector pueda elegir cuánto sumergirse en las demostraciones. Fue escrito de modo que pueda ser entendido por especialistas en el tema, pero sobre todo pensando en estudiantes de una carrera de grado en la cual ya se haya trabajado con el proceso de demostración de teoremas. Los conceptos necesarios para el entendimiento de resultados son presentados sin demasiados detalles, con los suficientes para comprender el alcance de los teoremas a estudiar. Se recomienda recurrir a bibliografías básicas como [4, Mendelson] en caso de interesarse por el desarrollo formal de cada una de las definiciones.

Comenzaremos analizando paradojas, centrando la atención en cómo son usados los pronombres demostrativos para generar autorreferencia. A modo de observaciones curiosas, se presentarán canciones pertenecientes a la cultura popular en donde se utiliza la misma técnica. Luego, se mostrará con ejemplos concretos que dichos demostrativos no son imprescindibles para la obtención de la autorreferencia.

En el capítulo siguiente se presentarán las definiciones necesarias para comprender los Teoremas de Incompletitud de Gödel, junto con algunas notas históricas que ayudarán a entender la importancia de estos resultados y el impacto que causaron en las matemáticas y, por qué no, en la filosofía. Finalmente, se desarrollará una demostración del Primer Teorema de Incompletitud.

Para concluir, en el último capítulo realizaremos un resumen de lo obtenido a lo largo del trabajo y retomaremos los puntos de mayor importancia.

CAPÍTULO 2

Paradojas y autorreferencia

2.1. Desde la cultura popular.

El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de paradojas y en particular analizar la *Paradoja de Berry*.

La palabra paradoja proviene del latín *paradoxus*, es una figura retórica que consiste en la utilización de expresiones que envuelven una contradicción. Para nosotros tendrán un interés especial aquellas que envuelvan contradicciones lógicas.

Una de las paradojas más conocidas y antiguas es la dichosa *Paradoja del mentiroso*, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{“}\textbf{\textit{Esta}} \text{ oración es falsa.''} \tag{2.1}$$

Hay dos opciones, el enunciado 2.1 es verdadero o es falso. En la primera, debido a que su contenido es verdadero. la oración necesita ser falsa. Contradicción. Por el contrario, si suponemos que la oración es falsa, lo que afirma debe ser falso, y eso nos lleva a contradecir nuestra suposición. Por lo tanto, en cualquiera de las dos opciones el resultado es una contradicción.

En este momento, es fundamental notar la importancia del demostrativo ***Esta***, ya que es lo que genera la autorreferencia y en consecuencia la paradoja. Si modificamos el enunciado original por

$$\text{“}\textbf{\textit{Existe}} \text{ una oración falsa.''}$$

no obtendríamos contradicción alguna. Podemos pensar en una oración como *“Los números naturales son finitos”*. Esa frase es falsa y por lo tanto el enunciado es verdadero.

El recurso de autorreferencia mencionado es usado, en la cultura popular, por múltiples autores al producir canciones. A continuación, observamos fragmentos de obras en donde se puede observar el uso de un demostrativo para referirse a la propia producción.

YOUR SONG - ELTHON JOHN
My gift is my song and
this one's for you.

ESSA MÚSICA É PERFEITA PRA VOCÊ - ENEMA ROCK
Eu pego o violão e começo a compor
essa canção,
pra você lembrar de mim onde for.

TE REGALO - CARLOS BAUTE
Te hice ***esta canción***
que es para recordarme.

Los anteriores fueron solo algunos ejemplos, la lista es amplia, y podríamos seguir adicionando gran cantidad de obras. El lector no tendrá inconvenientes en hallar canciones que contengan en sus versos la composición ***Esta canción*** o ***This song***. Por adicionar una muestra más del alcance de los pronombres demostrativos y la autorreferencia, podemos mencionar que es posible hallar este recurso hasta en bandas sonoras de Disney, como en *"This is our song"* de Camp Rock.

Ahora bien, el uso de demostrativos no es la única forma de generar autorreferencia. En lo que resta del capítulo profundizaremos esa idea. Observemos un fragmento de la canción *"Tusa"* de Karol G. y Nick Minaj que, a través del lenguaje urbano, nos brindan una buena base para comprender los próximos razonamientos.

TUSA - KAROL G. Y NICK MINAJ
Ya no tiene excusa,
hoy salió con su amiga,
disque pa' matar la tusa.
Que porque un hombre le pagó mal
está dura y abusa,
se cansó de ser buena,
ahora es ella quien los usa.
Que porque un hombre le pagó mal
ya no se le ve sentimental,
dice que por otro man no llora

Pero si le ponen la canción
le da una depresión tonta,
llorando lo comienza a llamar.
Pero él la dejo en buzón,
será porque con otra esta,
fingiendo que a otra se puede amar...

En la primera estrofa se introduce el personaje de una joven que sufrió una ruptura amorosa con un hombre. Luego de esto, ella decide cambiar su actitud frente a la vida y a las relaciones románticas, con una personalidad fuerte, que no demuestra las emociones propias. El problema se presenta en el estribillo: Las autoras narran que en el momento en que la joven escucha ***la canción*** se desmorona la transformación que había realizado, ya que dicho tema musical le hace recordar a su antigua pareja. Finalmente, se describe la desesperación de la protagonista. Resumiendo, la obra desarrolla la historia de alguna mujer que posee una canción X que le hace recordar a una antigua pareja, y este hecho la entristece.

En lo descrito hasta el momento parecería que no estamos en presencia de ningún hecho autorreferencial. Se propone pensar en un caso particular. Supongamos que existe una mujer Lara que conoció al joven Augusto en una fiesta, mientras escuchaban *"Tusa"*. Luego de un tiempo, se enamoraron y decidieron ser pareja. La historia termina de una forma trágica, ya que Augusto decide acabar su relación para estar con otra joven que conoció recientemente. Después de esto, Lara decidió no enamorarse y enfrentar próximas experiencias sin demostrar sus sentimientos. Sin embargo, hay una canción que le hace perder el control, Tusa, debido a que le hace recordar todo lo vivido con su antiguo novio. Y de esta forma la composición de Karol G. y Nick Minaj se convierte en una canción autorreferencial, que no utiliza pronombres demostrativos.

2.2. Desde la matemática.

En la presente sección veremos un ejemplo de autorreferencia que envuelve conceptos matemáticos. Observaremos que debido a un recurso similar al utilizado en la última obra analizada, la denominada *Paradoja de Berry* es una auténtica contradicción. Posee un particular interés, ya que en el capítulo siguiente la utilizaremos como base para desarrollar una demostración alternativa a la realizada por Gödel en 1930 de su, luego conocido como, *Primer Teorema de Incompletitud de Gödel.*

La paradoja de Berry fue propuesta por Bertrand Russell a comienzo del siglo XX. Él a su vez, le atribuyó al bibliotecario G. G. Berry la idea de estudiar las contradicciones asociadas a la expresión *"el primer número ordinal que no se puede definir"*.

Una de las formulaciones de dicha paradoja es:

$$\text{“El mínimo natural que no puede definirse en español con menos de quince palabras.”} \tag{2.2}$$

Veamos que este es un número contradictorio. En primer lugar que debería existir. Dado que solo aceptamos palabras en español cuya definición sea precisa, la cantidad total de palabras es finita (se puede pensar en las contenidas en el diccionario de la Real Academia Española). Luego, la cantidad de combinaciones que se pueden realizar con catorce palabras o menos también es finita.

Además, dado que los números naturales son infinitos, hay números que no pueden ser definidos con menos de quince palabras. Dentro de todos ellos, uno es el menor, debido a la buena ordenación de los naturales, al cual llamaremos b.

Obtuvimos entonces que b es el número que satisface el enunciado de la paradoja. Sin embargo, la afirmación 2.2 posee 14 palabras y por lo tanto b es definible con menos de 15 palabras, lo cual conlleva a contradecir su propia definición.

Esta contradicción será la base de las demostraciones presentadas en la presente monografía. En el siguiente capítulo se formalizarán las nociones de palabras, longitudes y se introducirán los conceptos necesarios para comprender los Teoremas de Incompletitud de Gödel. Además, se explicará y formalizará qué significa que una frase *defina* a un natural.

CAPÍTULO 3

Teoremas de Incompletitud de Gödel

La finalidad de este capítulo es que el lector incorpore conocimientos sobre los Teoremas de Incompletitud de Gödel. Se comenzará explicando de manera general los conceptos necesarios para la comprensión de los enunciados de dichos teoremas y la demostración brindada del primero de ellos. Para definiciones detalladas y razonamientos formales se recomienda consultar [4, Mendelson]. Luego, se contextualizará el momento en el cual Gödel presentó sus resultados y se hará alusión al impacto que generó en los pensadores de la época. Por último, se enunciará el tan mencionado Primer Teorema de Incompletitud de Gödel y se expondrá una demostración del mismo basado en la Paradoja de Berry, junto con un resultado intermedio.

Antes de continuar, es necesario mencionar que las definiciones y demostraciones serán trabajadas de forma semántica. Es posible desarrollar las mismas ideas utilizando la sintaxis del lenguaje, obteniendo así una mayor formalidad. Sin embargo, eso resulta más trabajoso y puede acomplejar el entendimiento para un lector que se encuentra en un primer acercamiento al tema.

3.1. Preliminares

Consideraremos el lenguaje de la aritmética $\mathcal{L}_A$ que se construye a partir de los símbolos $+, \cdot, =, <, 0, 1$. Las variables son generadas con los símbolos $x, y, z, |$ de modo que a cada letra le sigue una cantidad finita del elemento $|$, por ejemplo $x|||$ representa a la variable x_3. Además, consideramos los conectivos lógicos $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ y los cuantificadores $\forall, \exists$.

Nos interesa interpretar a los números naturales $\mathbb{N}_0$ con este lenguaje, por lo que a cada $n \in \mathbb{N}_0$ se le asigna un **numeral** $\bar{n}$ en $\mathcal{L}_A$ de la siguiente forma:

- $\star$ $\bar{0}:\ 0,$
- $\star$ $\bar{1}:\ 1,$
- $\star$ $\bar{2}:\ 1+1,$
- $\star$ $\bar{3}:\ 1+(1+1),$
- $\star$ $\bar{4}:\ 1+(1+(1+1)),$
- $\star$ $\bar{5}:\ 1+(1+(1+(1+1))).$

Y de forma general

$$\bar{n}:\ 1+(1+(1+\cdots+(1+1)\cdots))$$

Utilizando el conjunto de variables y los conectivos lógicos es posible realizar fórmulas, a las que denotaremos con letras griegas $\varphi, \psi, \cdots$. Cada fórmula representa una propiedad de los naturales la cual será falsa para algunos números y verdadera para otros. Por ejemplo, recordando que un número natural mayor a 1 es primo si y solo si la única factorización posible es el producto entre sí mismo y 1, obtenemos que la propiedad *"x es un número primo"* es expresable por la fórmula con una única variable libre $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) : (1 < x) \wedge (\forall y \forall z((x = y \cdot z) \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))).$$

Con $\varphi(x/\bar{n})$ denotamos a la fórmula que surge de reemplazar por $\bar{n}$ todas las apariciones de x. Así tenemos que, debido a que 3 es primo, la fórmula $\varphi(x/\bar{3})$ es verdadera, con

$$\varphi(x/\bar{3}) : (1 < 1 + (1 + 1)) \wedge (\forall y \forall z((1 + (1 + 1) = y \cdot z) \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))).$$

Por el contrario, la fórmula

$$\varphi(x/\bar{4}) : (1 < 1 + (1 + (1 + 1))) \wedge (\forall y \forall z((1 + (1 + (1 + 1)) = y \cdot z) \rightarrow (y = 1 \vee z = 1))),$$

es falsa en la estructura de los $\mathbb{N}_0$.

Nos interesarán en particular dos características asociadas a cada fórmula, la longitud y el número de Gödel.

Dada una fórmula φ definimos su **longitud** como la cantidad de símbolos que posee y la denotamos $|\varphi|$. Por ejemplo, calculemos la longitud de la fórmula $\bar{n}$. Para esto debemos contar la cantidad de símbolos $1, +, (,)$ que hay en el desarrollo del numeral. Tiene n 'unos', $n - 1$ signos '+' y $2 \cdot (n - 2)$ símbolos de paréntesis. Es decir, en total tenemos que

$$|\bar{n}| = n + (n - 1) + 2 \cdot (n - 2) = 4n - 5. \tag{3.1}$$

Además, se define en el lenguaje una función inyectiva $g : \mathcal{L}_A \rightarrow \mathbb{N}$, cuyo dominio es el conjunto de símbolos, expresiones y sucesiones finitas de expresiones de $\mathcal{L}_A$. Tenemos que a cada fórmula φ le corresponde de forma unívoca un natural, denominado **número de Gödel** al cual denotamos con $\ulcorner \varphi \urcorner$. Además, dado un número es posible saber, en caso de existir, qué fórmula tiene asociada. Por lo tanto, la función g nos permite, sin lugar a ambigüedades, estudiar propiedades y relaciones entre números, para luego interpretarlas en las respectivas fórmulas.

Mencionamos anteriormente que las fórmulas $\varphi(x)$ representan propiedades de los números naturales. Podemos agregar que las fórmulas con dos variables $\theta(x, y)$ expresan relaciones entre números. Sin embargo, como veremos más adelante, no todas las propiedades pueden expresarse a través de fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}_A$. Esto nos lleva a las siguientes definiciones.

Decimos que una propiedad P de números naturales es **representable** si podemos expresarla con una fórmula $\varphi(x)$, es decir, si se tiene para cada n:

$$n \text{ satisface } P \Leftrightarrow \varphi(x/\bar{n}) \text{ es verdadera.}$$

Del mismo modo, una relación binaria R entre números naturales decimos que es **representable** si existe una fórmula $\theta(x,y)$ tal que para todo $n,m \in \mathbb{N}_0$:

$$nRm \Leftrightarrow \ \theta(x/\bar{n}, y/\bar{m}) \text{ es verdadera.}$$

Para terminar esta sección, presentaremos definiciones que son aplicables a cualquier teoría axiomática, en particular a las teorías aritméticas. Toda teoría axiomática posee un conjunto de símbolos y un lenguaje. Además, posee una lista de axiomas y reglas de inferencia.

Diremos que una fórmula φ es **demostrable o derivable** en una teoría T, y lo denotaremos con $T \vdash \varphi$, si existe una lista finita de fórmulas φ_i con $i = 1, \cdots, n$, de modo que $\varphi_n = \varphi$ y cada φ_i sea un axioma o sea obtenida de las fórmulas anteriores, φ_j con $j < i$, mediante alguna regla de inferencia.

Diremos que un sistema T es:

- ⋆ **consistente** si no se puede derivar una fórmula φ y su negación $\neg\varphi$. En otro caso el sistema se dice **consistente**.
- ⋆ **completo** si dada una fórmula φ se cumple $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$. O de forma equivalente, si toda fórmula verdadera es demostrable en T.
- ⋆ **recursivo** si a partir de las funciones nula, sucesor y proyección aplicando un número finito de veces las reglas de sustitución, recursión y minimización puede obtenerse la propiedad de ser x el número de Gödel de un símbolo de T. Existe otra forma equivalente y tal vez más amena de definirlo: Un sistema se dice **recursivo** si las relaciones y funciones pueden calcularse o verificarse mediante un algoritmo. *

3.2. Historia e importancia

Para comprender la relevancia que tuvieron los resultados de Gödel, y que siguen teniendo, es necesario contextualizar los años 30 en cuanto a las posturas existentes sobre la matemática como ciencia.

A mitades del siglo XIX, el matemático Georg Cantor desarrolló la Teoría de Conjuntos buscando precisar nociones de la matemática. Cantor descubrió y formalizó conceptos que parecieron ser una base sólida en la cual se podía seguir avanzando. A fines del siglo, presentó trabajos sobre conjuntos infinitos que generaron un quiebre en el pensamiento de los matemáticos del momento. El propio Cantor, luego de descubrir que un segmento y un cuadrado poseen la misma cantidad de puntos, expresó: "Yo veo esto, pero no lo creo". Se podría considerar que estos trabajos dieron inicio a una polémica relativa a los fundamentos de las matemáticas.

A comienzos del siglo XX el problema se enfatizó luego de que el filósofo, escritor y matemático Bertrand Russell presentara la conocida como *Paradoja de Russell* o *Paradoja del Barbero* al intentar definir un conjunto compuesto por todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. La contradicción surge de que dicho conjunto pertenece y no pertenece a sí mismo. Y así, la base enmarcada en la Teoría de Conjuntos dejó de ser tan robusta como se consideraba.

Hacia el año 1920 el matemático David Hilbert se incorpora a la polémica. Creía que el desarrollo de la Teoría de Conjuntos era interesante y que era posible obtener la formalización

*Para mayor detalle se recomienda [4, Mendelson] Págs. 72, 86 y Secs. 3.3-3.4.

que Cantor buscaba. Con este fin, a lo largo 10 años, formuló el llamado *Programa de Hilbert* que pretendía establecer los fundamentos de las matemáticas. Para esto proponía la creación de una nueva ciencia; la *'metamatemática'*, que consideraría a los enunciados y a los razonamientos matemáticos como simples secuencias de símbolos sin significado, manipuladas a través de algoritmos. En concreto, el programa de Hilbert buscaba formar un sistema para la aritmética con un conjunto de axiomas que cumpliera las siguientes cuatro condiciones:

1. El sistema debía ser consistente,
2. El sistema debía ser recursivo. Puede pensarse en que la validez de cualquier demostración basada en esos axiomas debía ser verificable de forma algorítmica en una cantidad finita de pasos.
3. El sistema debía ser completo,
4. Debía ser demostrarse el primer punto. Es decir, tenía que ser posible probar que los axiomas eran consistentes.

En 1930 se organizó un congreso, para debatir los fundamentos de las matemáticas, en la actual ciudad de Kaliningrado (Rusia) y se decidió que en adelante el programa de Hilbert guiaría el pensamiento matemático. El problema fue que uno de los asistentes al congreso, Kurt Gödel, un joven aún desconocido de 24 años, había trabajado en el último tiempo en dos teoremas que demostraban justamente que el programa de Hilbert era irrealizable. El primer teorema establece que, si se cumplen las dos primeras condiciones, la tercera no puede darse. Y el segundo resultado prueba que, si se cumplen las dos primeras condiciones y una versión más débil de la tercera, entonces no es posible satisfacer la cuarta condición. A continuación serán desarrollados más específicamente.

PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL
Toda teoría aritmética recursiva que sea consistente es incompleta.

Este teorema expresa que ninguna teoría formal, capaz de modelar a los números naturales y a la aritmética, es a la vez consistente y completa. Es decir, si los axiomas no se niegan entre sí, existe por lo menos un enunciado que no puede ser probado ni refutado a partir de ellos.

La demostración de este teorema fue publicada por Gödel en 1931. A mencionar sobre la misma: es constructiva, se genera una fórmula, denominada posteriormente *sentencia de Gödel* $\mathcal{G}$, que expresa *"no existe una demostración de* $\mathcal{G}$ *en el sistema"*, o de forma equivalente *"yo no soy demostrable"*. La prueba es realizada utilizando autorreferencia, que es lograda mediante los números de Gödel.[**]

El resultado puede enunciarse de forma equivalente como:

PRIMER TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL (Forma Equivalente)
Es posible hallar en cada sistema axiomático una verdad que no sea demostrable.

En la próxima sección mostraremos una prueba del mismo.

[**] Una demostración realizada de la manera descrita puede hallarse en [4, Mendelson] págs. 203-207

Obtenemos entonces que existen proposiciones que, a pesar de ser verdaderas, no es posible demostrarlas dentro del sistema. Por lo tanto, el conjunto de las verdades aritméticas es mayor al conjunto de las fórmulas aritméticas demostrables. Luego de formalizar la noción de verdad, podemos decir que este resultado deja en evidencia que la mente humana puede abarcar mayor cantidad de resultados que los sistemas formales.

Proseguiremos con el segundo teorema mostrado por Gödel, que demuestra la negación del postulado número 4 del programa de Hilbert.

SEGUNDO TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL
*En toda teoría aritmética recursiva consistente T, la fórmula que expresa "T es consistente" no es demostrable.****

Por lo tanto, perdió validez la decisión de basar el formalismo matemático en las 4 condiciones mencionadas.

Realizaremos, a modo de comentario final y para cerrar la presente sección, una observación sobre uno de los *23 Problemas de Hilbert*, publicados en 1900. En concreto, relacionado con el segundo, que afirma: *"Probar que los axiomas de la aritmética son consistentes."* Durante varios años, luego de haberse publicado el Segundo Teorema de Incompletitud, se creyó que podría tener una respuesta negativa dicho problema. Sin embargo, es importante notar que el resultado de Gödel exige que las pruebas sean recursivas, es decir, que posean un número finito de pasos. Por lo que todavía el problema no se considera resuelto.

3.3. Primer Teorema de Incompletitud

Retomemos la Paradoja de Berry, enunciada en 2.2. La misma afirma:

"El mínimo natural que no puede ***definirse*** con menos de quince palabras."

Analicemos cada uno de los términos implicados y busquemos elementos de nuestra teoría aritmética, a la cual llamaremos T, para relacionarlos. Con el lenguaje $\mathcal{L}_A$ modelamos a los números naturales de modo que mantuviesen la buena ordenación, por lo que se puede utilizar el concepto de *mínimo natural* sin inconvenientes. Además, se ha estudiado la longitud de las fórmulas según la cantidad de símbolos, por lo que la expresión *quince palabras* es adaptable a alguna cantidad de símbolos de modo que se continúe generando la contradicción. Por lo tanto, solo resta formalizar la noción de ***definición***.

Definición 3.3.1. *Decimos que una fórmula $\varphi(x)$* ***define*** *en T al número n si*

$$T \vdash (\varphi(x/\bar{n}) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow x = \bar{n})).$$

Es decir, si es demostrable, en el sistema T, que n es el único número que satisface la propiedad φ.

Para cada natural n hay por lo menos una fórmula que lo define $\psi(x) : x = \bar{n}$. Calculamos en 3.1 que la longitud de $\bar{n}$ es $4n - 5$. La fórmula trivial ψ posee además los símbolos 'x' y '$=$'. Luego, obtenemos que :

$$|\psi| = 4n - 5 + 2 = 4n - 3.$$

***Una prueba del resultado puede buscarse en [4, Mendelson] págs. 212-215.

Observación 3.3.2. *Dado un número natural, la fórmula trivial no es la única que lo define. Además, veamos que tampoco es necesariamente la de menor longitud. Consideremos el número* 16*. La fórmula trivial* ψ *que lo define posee longitud* $4 \cdot 16 - 3 = 61$*. Sin embargo, utilizando el hecho de que* 16 *es* $(2^2)^2$*, podemos definirlo con la fórmula*

$$\varphi(x) : \exists y \exists z(x = y \cdot y \wedge (y = z \cdot z \wedge z = 1 + 1)).$$

que posee longitud 25.

Recordar que a cada fórmula se le asigna unívocamente un número de Gödel. Luego, las propiedades de las fórmulas pueden expresarse como propiedades de números. Por lo tanto, existen fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}_A$ que pueden ser interpretadas de la siguiente manera:

$L(x, y)$: la cual expresa "la fórmula con número de Gödel y tiene longitud x". Podríamos denotarla $L(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$: "la fórmula φ tiene longitud x".

$S(n, y, k)$: la cual expresa que "k es el número de Gödel de la fórmula $(\varphi(x/\bar{n}) \wedge \forall x(\varphi(x) \to x = \bar{n}))$, donde φ es la fórmula con número de Gödel y", de forma equivalente se puede denotar por $S(n, \ulcorner\varphi\urcorner, k)$. Es decir, k es el número de Gödel de la fómula que determina si φ define o no a n.

$Pr_T(y)$: la cual expresa "y es el número de Gödel de una fórmula demostrable en T". O del mismo modo $Pr_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ representa "φ es una fórmula derivable en T".

Veremos a continuación que es posible determinar si una fórmula define o no a un número.

Teorema 3.3.3. *Es representable la relación*

"La fórmula con número de Gödel y *define al número* n*".*

Demostración. A dicha relación la podemos expresar con

$$\theta(n, y) : \exists k(S(n, y, k) \wedge Pr_T(k)).$$

En efecto, si φ es la fórmula con número de Gödel y, por definición de S, tenemos que k es el número de Gödel de la fórmula

$$(\varphi(x/\bar{n}) \wedge \forall x(\varphi(x) \to x = \bar{n})).$$

Y además, dicha fórmula es demostrable en T, por definición de Pr_T.

□

Con este último resultado ya estamos en posición de enunciar y demostrar el Primer Teorema de Incompletitud de Gödel. Entonces, concluyendo el capítulo y la monografía presentamos el

Teorema 3.3.4 (Primer Teorema de Incompletitud Gödel)**.**

Para cualquier axiomatización de la aritmética existe una fórmula verdadera en los números naturales que no se puede demostrar formalmente.

Demostración. Definimos las siguientes fórmulas:

$$D_n(x) : \exists y(\theta(x,y) \wedge \exists w(L(w,y) \wedge w < n \cdot n))$$

la cual expresa "x es definible por una fórmula de longitud menor a n^2"; y

$$B_n(x) : (\neg D_n(x) \wedge \forall z(z < x \to D_n(z)))$$

que representa "x es el mínimo número no definible por una fórmula de longitud menor a n^2".

Por un razonamiento similar al realizado al presentar la paradoja de Berry (2.2) obtenemos que, para cada n fijo, existe un único número con la propiedad B_n. Debido a que el lenguaje posee una cantidad finita de símbolos, la cantidad total de fórmulas $\varphi(x)$, de longitud menor a n^2 que pueden formarse, también lo es. Luego, solo una cantidad finita de números podrá ser definida por ellas. De los infinitos números que no son definidos, por la buena ordenación de $\mathbb{N}$, existe un mínimo, que llamaremos b_n. Tenemos así que para cada n, la fórmula $B_n(x/\bar{b}_n)$ es verdadera.

Analicemos la longitud de B_n . Observar que en dicha fórmula, al variar n solo se modifican las dos ocurrencias de $\bar{n} \cdot \bar{n}$, una por cada aparición de D_n. Sabemos del cálculo realizado en 3.1 que $|\bar{n}| = 4n - 5$. Luego, tenemos

$$|\bar{n} \cdot \bar{n}| = 2 \cdot (4n - 5) + 1 = 8n - 9.$$

De donde se sigue

$$|B_n| = k + 2 \cdot (8n - 9) = K + 16n, \qquad \text{con } k, K \text{ constantes.}$$

Consideramos un número M, lo suficientemente grande, de modo que $K + 16M < M^2$ y obtenemos $|B_M| < M^2$. Denominamos b al número que hace verdadera a B_M, dado que $B_M(x/\bar{b})$ expresa que "b es el mínimo número no definible por un fórmula de longitud menor a M^2". Por lo tanto, es verdadera la fórmula

$$(B_M(x/\bar{b}) \wedge \forall x(B_M(x) \to x = \bar{b})). \tag{3.2}$$

Sin embargo, 3.2 no puede ser demostrable en T, ya que de serlo b estaría definido por la fórmula B_M de longitud menor a M^2, contradiciéndose a sí mismo.

□

CAPÍTULO 4

Conclusiones

Puede decirse que ciertas paradojas conllevan a auténticas contradicciones lógicas. En particular, la paradoja del mentiroso y la de Berry son paradojas cuya formalización deviene en los teoremas de incompletitud de Gödel. Mediante el análisis de la autorreferencia involucrada en dichas paradojas se deja al descubierto una irremediable falta de expresividad de los lenguajes formales.

Además, es posible ofrecer a través del estudio sobre sistemas axiomáticos, incompletitud y paradojas lógicas demostraciones alternativas al primer teorema de incompletitud de Gödel, basada en la paradoja de Berry.[3]

Bibliografía

[1] E. W. Beth. Las paradojas de la lógica, cuadernos teorema (1978).

[2] G. Boolos. A new proof of the Gödel incompleteness theorem, Notices Am. Math. Soc. 36, pp. 388–290 (1989).

[3] X. Caicedo. La paradoja de Berry revisitada o la indefinibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos, Lecturas Matemáticas, vol, XIV, Soc. Colombiana de Matemáticas (1993), pp. 37–48 (revisión de 2004, con notas adicionales).

[4] E. Mendelson. Introduction to Mathematical Logic, 4th ed., Chapman and Hall (2001).

[5] J. Altozano.Jaime Altozano. De Tusa al Teorema de Gödel: letras de canciones que hacen Plot Twist (2020).
Recuperado de: $https://www.youtube.com/watch?v=l_2A-QZxbQg\&t=732s.$