Introducción a la función Zeta de Riemann

Morcelle Gullo, Diego   Bucher, Ana

Estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la UNLP, Argentina.
Trabajo presentado para el Concurso de Monografías de la UMA 2018.

Figure 1: Bernhard Riemann

Índice

1 Introducción

La función que estudiaremos a lo largo de este trabajo es la famosa "Función zeta de Riemann". Euler comenzó estudiando una versión de la función zeta, dada por la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^x}, \text{ con } x \in \mathbb{R},\ x > 1$$

Demostró que puede escribirse como un producto infinito sobre los números primos, dando lugar a una de las primeras conexiones fuertes entre el análisis matemático y la teoría de números, y mostrando que las herramientas del análisis eventualmente serían útiles para el estudio de los tan codiciados números primos.

En esta dirección, contribuyó también al desarrollo del resultado conocido como Teorema de los Números Primos, el cual afirma que:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$$

donde $\pi(x)$ denota la cantidad de números primos menores o iguales que x; es decir, en otras palabras, el teorema afirma que el comportamiento asintótico de la función $\pi(x)$ es del orden del de la función $\frac{x}{ln(x)}$.

Este resultado fue conjeturado originalmente por Gauss y las primeras demostraciones formales fueron dadas independientemente por Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin. Con el paso de los años se han conseguido mejoras en la aproximación, siendo una de las más notables la que afirma que

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dy}{ln(y)}$$

A lo largo de estas páginas intentaremos mostrar la relación de la función zeta con la teoría de números, en particular, el estrecho vínculo que tiene con la distribución de los números primos.

No seremos exhaustivos en todas las justificaciones; en particular omitiremos reiteradamente verificar las hipótesis bajo las cuales es posible reordenar series a gusto e intercambiar series con integrales. Además, dejamos establecido para todo el trabajo que $P = \{p_i : p_i \text{ es primo},\ i \in \mathbb{N}\}$ será siempre el conjunto de los números primos positivos, ordenados con el orden usual de los naturales y que dadas dos funciones $f(x)$, $g(x)$, la notación "$f(x) \sim g(x)$" significará $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

2 Buena defínción y algunas propiedades

Riemann, en su trabajo original, definió la Función Zeta como

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} \text{ con } dom(\zeta) = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$$

Observemos que efectivamente esta función está bien definida en dicho conjunto, pues, si $s = a + bi$:

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{|n^{a+bi}|} = \frac{1}{|n^a|.|n^{bi}|} = \frac{1}{n^a}$$

y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^a}$ converge si $a > 1$. Por el criterio de comparación, tenemos la convergencia buscada. Veamos algunas propiedades elementales de nuestra función.
a) Producto de Euler:

$$\zeta(s) = \prod_p \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\Big)$$

Si bien la fórmula del producto de Euler originalmente se mostró para valores reales de s, veamos que puede probarse para todos los valores en el dominio de ζ:
Notemos que la convergencia absoluta de la serie, nos permite hacer reordenamientos; así:

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \sum_{\substack{2|n \\ 4\nmid n}} \frac{1}{n^s} + \sum_{4|n} \frac{1}{n^s} + \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} = ... =$$

$$= \sum_{\substack{2|n \\ 4\nmid n}} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{4|n \\ 8\nmid n}} \frac{1}{n^s} + ... + \sum_{\substack{2^k|n \\ 2^{k+1}\nmid n}} \frac{1}{n^s} + ... + \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} =$$

$$= \frac{1}{2^s}\sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{4^s}\sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} + ... + \frac{1}{2^{ks}}\sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} + ... + \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{ks}} \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \sum_{2\nmid n} \frac{1}{n^s}$$

Este proceso hecho con el primer primo, 2, podemos repetirlo con el siguiente número primo, 3, y obtendremos

$$\zeta(s) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\sum_{2\nmid n \wedge 3\nmid n} \frac{1}{n^s}\right)$$

Continuando de este modo con los primeros k números primos, tenemos:

$$\zeta(s) = \left(\prod_{i=1}^{i=k} \Big(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i^s}}\Big)\right)\left(1 + \sum_{n\in J^k} \frac{1}{n^s}\right)$$

Donde $J^k := \{n \neq 1 \in \mathbb{N} : p_i \nmid n \ , \ p_i \in P \ , \ 1 \leq i \leq k\}$.
Resulta que $lim_{k\to\infty} \sum\limits_{n\in J^k} \frac{1}{n^s} = 0$; en efecto:
Dado $k \in \mathbb{N}$, si $n \in J^k$, entonces $n \geq p_k$, con lo cual

$$0 \leq \sum_{n\in J^k} \frac{1}{n^s} \leq \sum_{n=p_k}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$, tenemos que $\sum\limits_{n\geq p_k} \frac{1}{n^s} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Luego, $lim_{k\to\infty} \sum\limits_{n\in J^k} \frac{1}{n^s} = 0$ y por lo tanto tenemos que

$$\zeta(s) = \prod_{p\in P} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

En tanto este producto se hace sobre los primos, con esta primera representación comenzamos a vislumbrar una conexión bien concreta entre la función zeta y los números primos.
b) Recíproca:

$$\zeta(s)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\quad \text{donde } \mu(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ (-1)^k & k=m_n\\ 0 & \text{cc}\end{cases}$$

donde m_n es la cantidad de maneras en que se puede escribir a n como producto de primos distintos.
c) Potencias:

$$\zeta(s)^k=\sum_{1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n^s}\quad k\geq 1$$

donde $d_k(n)$ es la cantidad de maneras de escribir a n como producto de k factores.
d) $\zeta(2n)$:
Dado $n\in\mathbb{N}$, es posible calcular $\zeta(2n)$ de la siguiente forma:
Consideremos la identidad $\frac{sen(\pi s)}{\pi s}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)$

$$\Rightarrow ln(sen(\pi s))=ln(\pi s)+\sum_{k=1}^{\infty}ln\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)$$

derivando ambos miembros

$$\frac{cos(\pi s)}{sen(\pi s)}\pi=\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{2s}{k^2}\frac{1}{1-\frac{s^2}{k^2}}\rightarrow cot(\pi s)\pi s=1+\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{2s^2}{k^2}\frac{1}{1-\frac{s^2}{k^2}}=\star$$

como $\left(\frac{1}{1-\frac{s^2}{k^2}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n$,

$$\star=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{2s^2}{k^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s^2}{k^2}\right)^n\right]=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s^2}{k^2}\right)^{n+1}=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{2(n+1)}}{k^{2(n+1)}}$$

$$\rightarrow s\pi cot(\pi s)=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{2n}}{k^{2n}}=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\Big)s^{2n}$$

$$\rightarrow\quad s\pi cot(\pi s)=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2n)s^{2n}\tag{1}$$

Por otra parte,

$$s\pi cot(\pi s)=\pi s\frac{cos(\pi s)}{sen(\pi s)}=\pi s\frac{e^{i\pi s}+e^{-i\pi s}}{2}\frac{2i}{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}}=$$

$$=\pi si\frac{e^{i\pi s}+e^{-i\pi s}}{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}}=\pi si\frac{e^{2i\pi s}+1}{e^{2i\pi s}-1}=i\pi s\big(1+\frac{2}{e^{2i\pi s}-1}\big)=i\pi s+\frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s}-1}$$

$$\rightarrow\quad \pi s cot(\pi s)=i\pi s+\frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s}-1}\tag{2}$$

Ahora bien, consideremos la función

$G(s) = \frac{s}{e^s - 1}$

La misma (extendiéndola al 0 como $G(0) := 1$) es analítica y por lo tanto admite un determinado desarrollo de Taylor

$$\frac{s}{e^s - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{\beta_n}{n!} s^n$$

pero

$$\frac{s}{e^s - 1} = \frac{s}{\left(\sum\limits_{n \geq 1} \frac{s^n}{n!} \right)} \Rightarrow s = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} s^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \right)$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n s^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{n-1}}{n!} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n s^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+1)!} \right)$$

Podemos hacer el producto de Cauchy entre las dos series y obtenemos

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{\beta_\mu s^\mu}{\mu!} \frac{s^{n-\mu}}{(n-\mu+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \beta_\mu s^n \right)$$

Así, tenemos $1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^n$, con $a_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{\mu=0}^{n} \binom{n+1}{\mu} \beta_\mu$

Por unicidad del desarrollo en serie de potencias de la función "1" tenemos que $a_0 = 1$ y que $a_n = 0$ para $n \geq 1$. Así, es posible despejar los β_μ.

β_0:

$$a_0 = 1 \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{(0+1)!} \binom{0+1}{0} \beta_0 \rightarrow \beta_0 = 1 \tag{3}$$

β_1:

$$a_1 = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2!} \left(\binom{2}{0} \beta_0 + \binom{2}{1} \beta_1 \right) \quad \rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{2} \tag{4}$$

β_2:

$$a_2 = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{0} \beta_0 + \binom{3}{1} \beta_1 + \binom{3}{2} \beta_2 \right) \quad \rightarrow \beta_2 = \frac{1}{6}$$

En general, para $n \geq 1$, es posible conseguir una fórmula recursiva como:

$$\beta_n = -\frac{1}{(n+1)} \sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n+1}{\mu} \beta_\mu \quad n \geq 1 \tag{5}$$

Recapitulando, de (1) y (2) tenemos

$$\pi s cot(\pi s) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2n) s^{2n} = i\pi s + \frac{2i\pi s}{e^{2i\pi s} - 1}$$

Usando el desarrollo en serie de G evaluado en $2i\pi s$

$$1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2n) s^{2n} = i\pi s + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (2i\pi s)^n =$$

$$= i\pi s + \beta_0 + \beta_1 2i\pi s - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\beta_n}{n!} (2i\pi s)^n (-\frac{1}{2}) \right) = 1 - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\beta_n}{n!} (2i\pi s)^n (-\frac{1}{2}) \right) =: A$$

Luego,

$$1-2\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2n)s^{2n}=1-2\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{\beta_n}{n!}(2i\pi s)^n(-\frac{1}{2})\Big) \tag{6}$$

por unicidad del desarrollo de Taylor, en la serie de A no puede haber potencias impares. Por lo tanto

$$A=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\beta_{2n}}{(2n)!}(2i\pi s)^{2n}(-\frac{1}{2})s^{2n}\Big)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)}{2}^{n+1}\frac{\beta_{2n}(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\Big)s^{2n} \tag{7}$$

De (6) y (7), por unicidad de Taylor,

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n+1}\beta_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\quad n\geq 1$$

A modo de ejemplo, usando (3) y (4)

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\quad y\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90} \tag{8}$$

e)

$$ln(\zeta(s))=\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)s}{x(x^s-1)}dx$$

Observemos que

$$\pi(n)-\pi(n-1)=\begin{cases}1 & \text{si p primo}\\ 0 & \text{cc}\end{cases} \tag{9}$$

Recordando la fórmula del producto de Euler,

$$\begin{aligned}
ln(\zeta(s))=\sum_{p\in P}ln\big(\frac{1}{1-p^{-s}}\big)&\overset{(9)}{=}\sum_{n=2}^{\infty}(\pi(n)-\pi(n-1))ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)=\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)-\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n-1)ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)=\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)-\sum_{n=1}^{\infty}\pi(n)ln\big(\frac{1}{1-(n+1)^{-s}}\big)\overset{\pi(1)=0}{=}\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)-\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)ln\big(\frac{1}{1-(n+1)^{-s}}\big)=\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\pi(n)\big(ln\big(\frac{1}{1-n^{-s}}\big)-ln\big(\frac{1}{1-(n+1)^{-s}}\big)\big)\Big]=\\
&=\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\big(ln\big(1-(n+1)^{-s}\big)-ln\big(1-n^{-s}\big)\big)=\star
\end{aligned}$$

Obs: $[ln(1-x^{-s})]'=\dfrac{s}{x(x^s-1)}\ \to ln(1-x^{-s})=\displaystyle\int\frac{s}{x(x^s-1)}$

$$\to\int_n^{n+1}\frac{s}{x(x^s-1)}dx=ln(1-(n+1)^{-s})-ln(1-n^{-s})$$

Luego,

$$\star = \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_{n}^{n+1} \frac{s}{x(x^s-1)} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\pi(n)s}{x(x^s-1)} dx \overset{*}{=}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\pi(x)s}{x(x^s-1)} dx = \int_{2}^{\infty} \frac{\pi(x)s}{x(x^s-1)}$$

donde hemos usado en $*$ que la función π es constantemente igual a $\pi(n)$ en el intervalo $(n, n+1)$

$$\therefore \text{ llegamos a } ln(\zeta(s)) = \int_{2}^{\infty} \frac{\pi(x)s}{x(x^s-1)}$$

3 Extensión del dominio

En tanto el dominio de nuestra función es nada más que el semiplano complejo $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$, es natural preguntarnos si es posible ampliarlo. Entramos entonces en el terreno de las extensiones analíticas de funciones.

3.1 Teorema

La función zeta admite una extensión analítica a todo el plano complejo salvo $s = 1$, donde tiene un polo simple. Además, satisface la ecuación

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sin(\tfrac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

donde $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ es la conocida función gama.

Antes de pasar a la demostración, probemos la siguiente:

3.2 Proposición

Si $\Phi(x)$ es una función con derivada continua en $[a, b]$, entonces, si $[x]$ denota la parte entera de $x \in \mathbb{R}$, se cumple:
$\sum_{a<n\leq b} \Phi(n) =$

$$= \int_a^b \Phi(x)dx + \int_a^b (x - [x] - \tfrac{1}{2})\Phi'(x)dx + (a - [a] - \tfrac{1}{2})\Phi(a) - (b - [b] - \tfrac{1}{2})\Phi(b)$$

Demostración: Observemos que, por linealidad de las sumas e integrales, es suficiente probarlo para el caso $n - 1 \leq a < b \leq n$:

$$\int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})\Phi'(x)dx \overset{[x]=n-1}{=} \int_a^b (x - (n-1) - \frac{1}{2})\Phi'(x)dx \overset{\star}{=}$$

$$= [(x - (n-1) - \frac{1}{2})\Phi(x)]_a^b - \int_a^b \Phi(x)dx =$$

$$= (b - (n-1) - \frac{1}{2})\Phi(b) - (a - (n-1) + \frac{1}{2})\Phi(a) - \int_a^b \Phi(x)dx$$

$\star$: integrando por partes.
Sustituyendo del lado derecho en la ecuación original, queda

$$(b-(n-1)-\frac{1}{2})\Phi(b)-(b-[b]-\frac{1}{2})\Phi(b)=([b]-(n-1))\Phi(b)=\begin{cases} 0, si\ b\neq n \\ \Phi(n), si\ b=n \end{cases}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

Ahora sí, vamos a la demostración del teorema 3.1:
Demostración 3.1: Apliquemos la proposición 3.2, usando $\Phi(x)=x^{-s}$, con $s\neq 1$, $a,b\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=a+1}^{b}\frac{1}{n^s}=$$

$$=\int_a^b x^{-s}dx-s\int_a^b(x-[x]-\frac{1}{2})x^{-s-1}dx+(\overbrace{a-[a]}^{=0}-\frac{1}{2})\Phi(a)-(\overbrace{b-[b]}^{=0}-\frac{1}{2})\Phi(b)=$$

$$=\frac{b^{1-s}-a^{1-s}}{1-s}-s\int_a^b(x-[x]-\frac{1}{2})x^{-s-1}dx+\frac{1}{2}(b^{-s}-a^{-s})$$

Haciendo $b\longrightarrow\infty$ y $a=1$:

$$\zeta(s)-1=\sum_{n=2}^{\infty}=\frac{1}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}dx-\frac{1}{2}$$

sumando 1 a ambos lados,

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^{1+s}}dx+\frac{1}{2} \tag{10}$$

El lado derecho de esta ecuación, ahora tiene sentido si $Re(s)>0$, $s\neq 1$ pues $x-[x]-\frac{1}{2}$ está acotado, garantizando la convergencia de la integral. Más aún, esta integral converge si $Re(s)>-1$, pues, llamando

$$f(x):=[x]-x\frac{1}{2}\ ,\ g(x):=\int_1^x f(y)dy,\text{ si } x_1,x_2\geq 1$$

tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{x^{s+1}}dx=\left[\frac{g(x)}{x^{s+1}}\right]_{x_1}^{x_2}+(s+1)\int_{x_1}^{x_2}\frac{g(x)}{x^{s+2}}dx\overset{x_1,x_2\to\infty}{\longrightarrow}0$$

pues tanto f como g resultan acotadas y $Re(s)>-1$.
Con esto conseguimos una extensión de ζ para $Re(s)>-1, s\neq 1$; la misma resulta analítica en su dominio (esto se ve fácilmente usando el teorema de la convergencia dominada y derivando bajo el signo de integral) y, si $s=1$, se ve en la nueva definición de ζ dada en (10), que esta tiene un polo simple.
Ahora bien, si $-1<Re(s)<0$, resulta

$$s\int_0^1\frac{[x]-x+\frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}$$

con lo cual

$$\zeta(s) = s\int_0^\infty \frac{[x] - x + \frac{1}{2}}{x^{s+1}}dx$$

Usando la serie de Fourier $[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_1^\infty \frac{sen(2n\pi x)}{n\pi}$, tenemos

$$\begin{aligned}\zeta(s) = s\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{sen(2n\pi x)}{n\pi} x^{-s-1}dx &= \frac{s}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(2\pi)^s}{n^{1-s}}\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x^{s+1}}dx = \\ = (2\pi)^s \frac{s}{\pi}\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x^{s+1}}dx\zeta(1-s) &= (2\pi)^s \frac{s}{\pi}(-\Gamma(-s))sen(\frac{s\pi}{2})\zeta(1-s) = \\ &= 2^s\pi^{s-1}sen(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\end{aligned}$$

Si bien esta fórmula vale para $-1 < Re(s) < 0$, el lado derecho tiene sentido para $Re(s) < 0$. Con lo cual tenemos a la función zeta definida en todo el plano salvo $s = 1$, y vale que

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}sen(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{11}$$

□

Obtenemos así otra representación de la función zeta, que nos permitirá trabajar en (casi) todo el plano complejo.

4 Conexión con el teorema de los números primos

El Teorema de los Números Primos, afirma que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$$

Veremos una serie de resultados mediante los cuales queda demostrado este teorema haciendo uso de la fución zeta.
Definimos la función

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} ln(p) \tag{12}$$

donde p varía sobre los números primos y m sobre los enteros positivos. Observemos que la fórmula de cambio de base del logaritmo, nos asegura que

$$\frac{ln(x)}{ln(p)} = log_p(x) \quad \rightarrow \Big[\frac{ln(x)}{ln(p)}\Big] = \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : p^m \leq x\} = |\{m \in \mathbb{N} : p^m \leq x\}|$$

donde $[a]$ es la parte entera de a.

$$\Rightarrow \psi(x) = \sum_{p \leq x}\Big[\frac{ln(x)}{ln(p)}\Big]ln(p)$$

Esta función será indispensable para relacionar el teorema con la función zeta. Tendremos en cuenta los dos siguientes resultados técnicos, cuya demostración no daremos.

4.1 Lema:

Si $c > 0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a^s}{s(s+1)}ds = \begin{cases} 0, & si\ 0 < a \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{a} & si\ \ a > 1 \end{cases}$$

donde $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) = c\}$.

4.2 Proposición:

Si $s = \sigma + it$ con $\sigma \geq 1$, $|t| \geq 1$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante A tal que:
i) $|1/\zeta(s)| \leq A|t|^\varepsilon$ y
ii) $|\zeta'(s)| \leq A|t|^\varepsilon$

4.3 Teorema:

Si $\psi(x) \sim x$, entonces $\pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$.

Demostración: Notemos que será suficiente probar que

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \pi(x)\frac{ln(x)}{x} \quad \text{y} \quad \limsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{ln(x)}{x} \leq 1 \tag{13}$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x}[\frac{ln(x)}{ln(p)}]ln(p) \leq \sum_{p\leq x}\frac{ln(x)}{ln(p)}ln(p) = \pi(x)ln(x)$$

Como nos interesan valores de x grandes, podemos dividir por x sin alterar la desigualdad y obtenemos:

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)ln(x)}{x}$$

Por hipótesis, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$, entonces

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)ln(x)}{x} \geq 1$$

Con lo que queda probada la primer desigualdad de (13). Para probar la otra desigualdad, consideremos $0 < \alpha < 1$. Entonces,

$$\psi(x) \geq \sum_{p\leq x} ln(p) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} ln(p) \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha))ln(x^\alpha) = \alpha((\pi(x) - \pi(x^\alpha))ln(x))$$

$$\to \psi(x) \geq \alpha\pi(x)ln(x) - \alpha\pi(x^\alpha)ln(x) \quad \to \psi(x) + \alpha\pi(x^\alpha)ln(x) \geq \alpha\pi(x)ln(x)$$

Ahora bien, $\forall\ \ y > 0$ vale que $y \geq \pi(y)$. En particular $x^\alpha \geq \pi(x^\alpha)$, entonces

$$\psi(x) + \alpha x^\alpha ln(x) \geq \alpha\pi(x)ln(x) \quad \to \psi(x) \geq \alpha\pi(x)ln(x) - \alpha x^\alpha ln(x)$$

dividiendo por x,

$$\frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{\alpha\pi(x)ln(x)}{x} - \frac{\alpha x^\alpha ln(x)}{x} \quad \to \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{\alpha\pi(x)ln(x)}{x} - \frac{\alpha ln(x)}{x^{1-\alpha}}$$

Luego,

$$1 \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\alpha\pi(x)ln(x)}{x} - \frac{\alpha ln(x)}{x^{1-\alpha}} \overset{1-\alpha>0}{=} \limsup_{x\to\infty} \frac{\alpha\pi(x)ln(x)}{x}$$

Como esta desigualdad vale $\forall \ \ 0 < \alpha < 1$, tomando el supremo sobre los α, tenemos

$$\limsup_{x\to\infty} \pi(x)\frac{ln(x)}{x} \leq 1$$

Que es la otra desigualdad de (13) que teníamos que demostrar.

□

Definamos ahora a partir de ψ una nueva función

$$\varphi(x) = \int_1^x \psi(u)du$$

4.4 Teorema:

Si $\varphi(x) \sim \frac{x^2}{2}$, entonces $\psi(x) \sim x$.

Demostración: Consideremos $a < 1 < b$; como $\psi(x)$ es una función creciente, tenemos

$$\frac{1}{(1-a)x}\int_{ax}^{x} \psi(u)du \leq \frac{1}{(1-a)x}\int_{ax}^{x} \psi(x)du = \psi(x) \tag{14}$$

y

$$\frac{1}{x(b-1)}\int_{x}^{bx} \psi(u)du \geq \frac{1}{x(b-1)}\int_{x}^{bx} \psi(x)du = \psi(x)$$

Integrando esta última ecuación,

$$\psi(x) \leq \frac{1}{(b-1)x}(\varphi(bx) - \varphi(x))$$

Dividiendo por x (lo cual no altera la desigualdad ya que nos interesan x grandes),

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{(b-1)x^2}(\varphi(bx) - \varphi(x)) \quad \Rightarrow \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{(b-1)}\Big[\frac{\varphi(bx)}{(bx)^2}b^2 - \frac{\varphi(x)}{x^2}\Big]$$

Tomando límite superior, y usando que $\frac{\varphi(x)}{x^2} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{b+1}{2}$$

Como esto vale para cualquier $b > 1$ tomando ínfimo sobre b, llegamos a

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$$

Usando ahora (14), de forma totalmente análoga, se prueba que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1$$

Lo cual concluye la demostración.

□

4.5 Lema

Si $Re(s) > 1$, entonces $ln(\zeta(s)) = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m}$

Demostración:
Usando la representación de $\zeta(s)$ como producto de Euler,

$$ln(\zeta(s)) = \sum_{p\in P} ln\Big(\frac{1}{1-p^{-s}}\Big) = -\sum_{p\in P} ln(1-p^{-s})$$

Recordemos que la serie de Taylor de $ln(1+x)$ cuando $|1+x| < 1$ es

$$ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Así,

$$ln(\zeta(s)) = -\sum_{p\in P}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(-p^s)^n}{n} = \sum_{p\in P}\sum_{n\geq 0}\frac{p^{-ns}}{n} = \sum_{n,p}\frac{p^{-ns}}{n}$$

$\square$

Como consecuencia directa, derivando ambos miembros, tenemos

$$\frac{\zeta(s)'}{\zeta(s)} = -\sum_{p,n} ln(p)p^{-ns} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{15}$$

donde $\Lambda(n) = \begin{cases} ln(p) & \text{si } n = p^m \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$

4.6 Proposición:

Si $c > 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)ds$ con γ la curva $Re(s) = c$

Demostración:
Observemos primero que

$$\psi(u) = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)f_n(u)$$

donde $f_n(u) = \begin{cases} 1 & si \quad n\leq u \\ 0 & cc \end{cases}$ y que $\psi(x) = 0$ si $x \in [0,1]$
Entonces

$$\varphi(x) = \int_1^x \psi(u)du = \int_0^x \psi(u)du = \int_0^x \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)f_n(u)du =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\int_0^x \Lambda(n)f_n(u)du = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)\int_n^x du = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)(x-n)$$

$$\rightarrow \quad \varphi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)(x-n) \tag{16}$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds \overset{(15)}{=} \frac{x}{2\pi i}\int_{\gamma}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s(s+1)}ds =$$

$$= x\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{2\pi i}\int_{\gamma}(\frac{x}{n})^s\frac{1}{s(s+1)}ds \overset{4.1}{=} x\sum_{n\leq x}\Lambda(n)(1-\frac{n}{x}) \overset{(16)}{=} \varphi(x)$$

$\square$.

4.7 Teorema:

$$\varphi(x) \sim \tfrac{x^2}{2}$$

Demostración:
Fijemos un $c > 1$, por ejemplo $c = 2$ y supongamos por el momento que x está fijo, $x \geq 2$. Definamos

$$F(s) = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big) \tag{17}$$

y consideremos la curva $\gamma(T)$ como en la figura 2, donde T se elegirá luego.

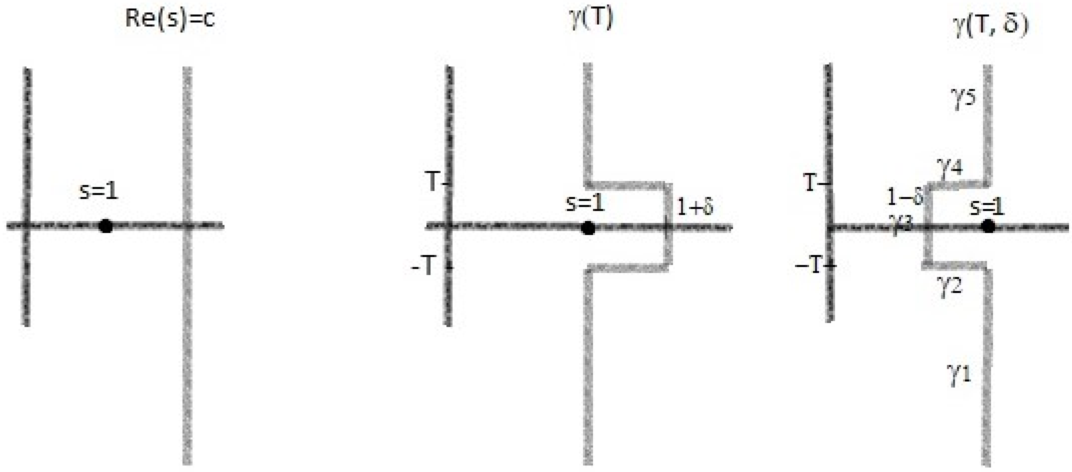

Figure 2: Caminos considerados

Por el conocido Teorema de Cauchy, cuyas hipótesis son satisfechas por $F(s)$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}F(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} \quad \text{con } \gamma \text{ la recta } Re(s) = c \tag{18}$$

Consideremos ahora $\Gamma(T, \delta)$ como en la figura 2.
Para T fijo, elijamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que la función $\zeta(s)$ no tenga ceros en la región

$$\{s = \sigma + it : 1 - \delta \leq \sigma \leq 1 \text{ y } |t| \leq T\}$$

Esta elección es posible dado que ζ no se anula sobre la recta $Re(s) = 1$ (hecho que se comentará más adelante).
De la ecuación (10) y algunos cálculos, se ve que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tiene un polo en $s = 1$, que resulta de orden 1. Por lo tanto $F(s) = \left(\frac{1}{s-1} + H(s)\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$, con H una función holomorfa en $s = 1$. Así, F tiene un polo de orden 1 en $s = 1$ y podemos calcular el residuo como
$\lim_{s\to 1} F(s)(s-1) = \frac{x^2}{2}$
Luego, por el teorema de los residuos,

$$\int_{\gamma(T)^- \cup \gamma(T,\delta)} F(s)ds = \frac{x^2}{2}$$

Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(t)} F(s)ds = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)ds \tag{19}$$

Escribamos $\gamma(T,\delta) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$ como en la figura y fijemos $\varepsilon > 0$
Comencemos estudiando la integral en γ_1:
Si $s = \sigma + it \in \gamma_1$, $\sigma = 1$ y entonces $|x^{1+s}| = x^{1+\sigma} = x^2$.
Por la proposición 4.2 sabemos que $|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}| \leq A|t|^{\frac{1}{2}}$ para cierta constante A.
Luego

$$\Big|\int_{\gamma_1} F(s)ds\Big| \leq Cx^2\int_T^{\infty} |t|^{-\frac{3}{2}}dt < \frac{\varepsilon x^2}{2} \tag{20}$$

ya que, como $\int_1^{\infty} |t|^{-\frac{3}{2}}dt$ es convergente, podemos tomar $T > 0$ suficientemente grande que nos asegure la cota en cuestión.
Análogamente, conseguimos la misma cota para γ_5. Pasemos entonces a γ_3:
Aquí, si $s = \sigma + it \in \gamma_3$, $\sigma = 1 - \delta$ y $-T \leq t \leq T$. Entonces

$$\Big|\int_{\gamma_3} F(s)ds\Big| \leq Ax^{2-\delta}\int_{-T}^{T} \frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{|s(s+1)|}ds = C_T x^{2-\delta} \tag{21}$$

donde hemos usado que $\int_{-T}^{T} \frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{|s(s+1)|}ds = C'_T$ ya que es convergente.
Finalmente, situándonos en γ_2, si $s = \sigma + it$, $t = T$ y $1 - \delta \leq \sigma \leq 1$. Entonces $|s(s+1)|$ está acotado, y

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_2} F(s)ds\Big| &\leq A'\int_{\gamma_2} |T|^{\frac{1}{2}}x^{1+\sigma}ds \leq A\int_{1-\delta}^{1} x^{1+\sigma}d\sigma = \\ &= A\int_{1-\delta}^{1} e^{((1+\sigma)ln(x)}d\sigma = Ax\Big[\frac{e^{\sigma ln(x)}}{ln(x)}\Big]_{1-\delta}^{1} = A\frac{x}{ln(x)}(x - x^{1-\delta}) = \\ &= A\frac{x^2}{ln(x)}(1 - x^{-\delta}) \leq A\frac{x^2}{ln(x)}\end{aligned} \tag{22}$$

Del mismo modo, conseguimos la misma cota para la integral sobre γ_4.
Por las ecuaciones (19) a (22), tenemos:

$$\Big|\varphi(x) - \frac{x^2}{2}\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)ds\Big| \leq \varepsilon x^2 + Ax^{2-\delta}C_T + \frac{2Ax^2}{ln(x)}$$

donde todas las constantes probablemente se hayan modificado en el proceso, detalle que salteamos. Dividiendo ambas expresiones por $\frac{x^2}{2}$,

$$\Big|\frac{2\varphi(x)}{x^2} - 1\Big| \leq 2\varepsilon + 2C_T x^{-\delta} + 2C'_T \frac{1}{ln(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Así, $\varphi(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

$\square$.

Además, con esto queda probado el Teorema de los Números Primos, haciendo uso extensivo de nuestra función ζ.

5 Ceros de la función zeta

Observemos que evaluando la función zeta en los enteros pares negativos mediante la ecuación funcional (11) demostrada en la sección anterior, tenemos:

$$\text{Si } n \in \mathbb{N} \longrightarrow \zeta(-2n) = 2^{-2n}\pi^{-2n-1} sen(-n\pi)\Gamma(1+2n)\zeta(1+2n) = 0$$

Así, la función zeta tiene ceros denominados "triviales" en cada entero par negativo.
Además, tenemos la siguiente:

5.1 Proposición:

Si $s \in dom(\zeta) \setminus 2\mathbb{Z}^-$ es tal que $\zeta(s) = 0$ entonces $0 \leq Re(s) \leq 1$.

Demostración: Sea $s \in dom(\zeta) \setminus 2\mathbb{Z}^-$.
Por un lado, si $Re(s) > 1$, tenemos la representación en serie original, de la cual se desprende que $\zeta(s) \neq 0$.
Supongamos entonces que $Re(s) < 0$ y que $\zeta(s) = 0$; entonces podemos usar la ecuación funcional (11) y tendremos que

$$\zeta(s) = 0 \longleftrightarrow 2^s\pi^{s-1} sen(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0 \longleftrightarrow \Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$$

Como $Re(1-s) > 1$, tenemos $\zeta(1-s) \neq 0$, con lo cual debe ser $\Gamma(1-s) = 0$, pero esto es absurdo, pues, en tanto $1-s$ no es entero, vale la fórmula

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{sen(\pi s)} \neq 0 \longrightarrow \Gamma(1-s) \neq 0$$

$\square$

Más aún, si s es un cero de la función ζ, se tiene que $0 < Re(s) < 1$.
El hecho de que $Re(s) \neq 1$ fue demostrado en forma independiente por Hadamard y de la Valée Poussin en 1896; no es nada trivial, y resulta equivalente al Teorema de los números primos. De hecho, si repasamos la demostración dada en la sección anterior, probamos que $Re(s) \neq 1$ implica el teorema.
Por otra parte, si $Re(s) = 0$ y $s \neq 0$, tenemos que $Re(1-s) = 1$ y $1-s \neq 1$,

con lo cual la fórmula de reflexión muestra que $\zeta(s) \neq 0$. Para el caso particular de $s = 0$, usando la representación integral (10), vemos que $\zeta(0) \neq 0$.
En vistas de todo esto, cabe preguntarse si ζ posee algún cero no trivial. En este sentido, la respuesta es afirmativa; más aún, Hardy demostró en 1914 que existen infinitos ceros no triviales. Los primeros quince fueron calculados por J. P. Gram en su publicación *Note sur les zeros de la fonction zeta(s) de Riemann*, y a la fecha se conocen más de 10^{13} ceros en la franja $0 < Re(s) < 1$. A modo de ejemplo, la siguiente es una lista de algunos de ellos aproximados al noveno decimal:

$\bullet(1/2) + 14,134725142$ i
$\bullet(1/2) + 21,022039639$ i
$\bullet(1/2) + 25,010857580$ i
$\bullet(1/2) + 30,424876126$ i
$\bullet(1/2) + 32,935061588$ i
$\bullet(1/2) + 37,586178159$ i
$\bullet(1/2) + 40,918719012$ i
$\bullet(1/2) + 43,327073281$ i
$\bullet(1/2) + 48,005150881$ i
$\bullet(1/2) + 49,773832478$ i

(para una lista de los primeros cien mil ceros, aproximados al noveno decimal, visitar la página web *http://www.dtc.umn.edu/~ odlyzko/zeta_ tables/zeros1*).
Es necesario hacer la salvedad de que los ceros llamados "triviales" no lo son en el sentido estricto de la palabra. Para poder hallarlos explícitamente hemos hecho uso intesivo de las propiedades únicas de la función zeta; no obstante son evidentes en comparación con los ceros situados en la franja $0 < Re(s) < 1$.
No es casual que en esta lista todos los ceros tengan parte real $\frac{1}{2}$, pues todos los calculados a la fecha comparten esta particularidad. Llegamos así al objetivo central del trabajo.
Riemann, en su tesis doctoral *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* conjeturó:

5.2 Hipótesis de Riemann

Todos los ceros no triviales de la función ζ son de la forma $\frac{1}{2} + it$, con t un número real.

Por otra parte, Riemann demostró que

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} ln(p) = x - \sum_{\rho:\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

Observemos que está ecuación vincula los números primos directamente con los ceros de la función ζ.
Cuando Hadamard y de la Valée Poussin probaron el teorema de los números primos, mostraron que

$$\pi(x) = Li(x) + O(xe^{-\alpha\sqrt{ln(x)}})$$

para cierta constante $\alpha > 0$, siendo $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{lnt}dt$
Aquí, el error está directamente relacionado con la ubicación de los ceros de la

función ζ en la franja $0 < Re(s) < 1$. Conforme aumenta el entendimiento de la región libre de ceros de ζ, es posible mejorar la cota del orden de este error. Más aún, von Koch demostró en 1901 que la Hipótesis de Riemann es equivalente al refinamiento del teorema de los números primos, dado por:

$$\left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{lnt}\right| \leq C\sqrt{x}lnx$$

para cierta constante C.
La Hipótesis de Riemann fue incluida en la lista de los 23 problemas del siglo que enunció Hilbert en París en el año 1900. Su importancia, como ya se ha visto, radica en que, de ser verdadera, nos brindaría información muy valiosa acerca de la distribución de los números primos, que han sido desde siempre motivo de estudio para matemáticos y matemáticas.
En tanto la hipótesis fue verificada para los primeros 10^{13} ceros, la comunidad matemática, en términos generales, apuesta por su veracidad. Pero sabemos que en esta ciencia, hasta que no tengan demostración, las conjeturas no califican a la condición de teoremas.

6 Enfoque moderno

La hipótesis de Riemann ya tiene casi 160 años y aún no ha sido demostrada ni refutada. Actualmente uno de los enfoques más populares para el estudio de la misma es la teoría de las ”L-funciones”.
Si bien es complejo dar una defineión formal del concepto de las L-funciones, todas comparten la siguiente propiedad

6.1

Toda L-función L puede escribirse como una serie de Dirichlet, es decir:

$$L(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n^{-s}$$

donde la sucesión $\{a_n\}$ está contenida en algún cuerpo de números, y es tal que su crecimiento está acotado por el de algún polinomio.

Esta condición garantiza la convergencia de la serie en el semiplano

$$\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > c\}$$

para algún $c > 0$, de modo que la función L resulta holomorfa allí.
De entre todas las funciones L, son especialmente interesantes las que cumplen con las siguientes propiedades:
• Producto de Euler: si siempre que n y m son coprimos, $a_n a_m = a_{nm}$, y si p es primo, $r \geq 1$ entonces los a_{p^r} satisfacen una relación de recurrencia adecuada, entonces la función puede escribirse como

$$L(s) = \prod_{p\in P} \frac{1}{F_p(p^{-s})}$$

donde las funciones F_p son polinomios a coeficientes complejos, con término independiente igual a 1.

• Continuación analítica: la función L admite una extensión meromorfa a todo el plano complejo.
• Cumple con alguna ecuación funcional adecuada.
• Hipótesis de Riemann: Los ceros de la función L en su versión extendida al plano, salvo por "ceros triviales", se concentran en una línea crítica.
Observemos que existe al menos una función que cumple con todas estas propiedades: la función ζ.
Así, el estudio de la hipótesis se generaliza al de una familia más grande de funciones, con la esperanza de que, gracias a esta abstracción, sea posible desarrollar nuevas herramientas que permitan resolver el problema.

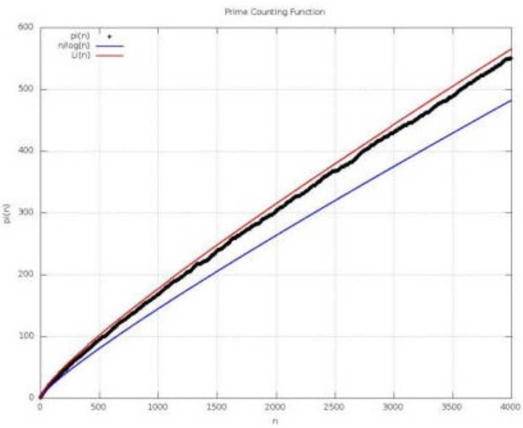

Figure 3: Comparación entre $\pi(n)$ (en negro), $Li(n)$ (en rojo) y $\frac{n}{log(n)}$ (en azul).

7 Bibliografía

1. Riemann, B. (1859), Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie. In Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig (1892), Reprinted by Dover, New York (1953).

2. Titchmarsh, E. C. (1986). The Theory of the Riemann Zeta Function (2nd ed.). New York: Oxford University Press.

3. Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2003). Complex Analysis (Vol. II, Princeton Lectures in Analysis). New Jersey: Princeton University Press.

4. Conway, J. B.(1978), Functions of one complex variable. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin.

5. Cartan, H. (1995), Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables. Diver Publications, Inc., New York.

6. [MrYouMath] . (2014) . Riemann Zeta Function [Video File]. Retrieved from www.youtube.com/playlist?list=PL32446FDD4DA932C9.

7. Odlyzko, A. (n.d.). [The first 100,000 zeros of the Riemann zeta function, accurate to within $3 * 10^{-9}$]. Unpublished raw data.

8. Bruin, P. (2012, October 30). What is... an L- Function? Zürich.