CONCURSO DE MONOGRAFÍAS
UMA 2023

Inversas Generalizadas y Ecuaciones de Rangos

POR

MARÍA LUZ LLANES

Estudiante de Licenciatura en Matemática

Agosto de 2023

Dedicado a mis seres queridos: Mamá y familia incondicional.

Índice general

Prefacio

Este manuscrito es presentado como parte del concurso de monografías 2023 dirigido a estudiantes de grado de alguna universidad argentina, en el marco de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina.

Introducción

El concepto de operadores psudoinvertibles aparece por primera vez en trabajos del matemático Fredholm [12] quien formuló una pseudoinversa para un operador integral lineal que no es invertible en el sentido ordinario. Un año después, Hilbert [15] discutió inversas generalizadas de operadores diferenciales. En este sentido, se puede decir que los operadores diferenciales y/o integrales pseudoinvertibles fueron predecesores de las inversas generalizadas matriciales cuya existencia fue notada por Moore [19] en el año 1920. Moore introdujo una extensión de la inversa ordinaria de un operador lineal acotado sobre un espacio de dimensión infinita. En particular, en el caso matricial, estableció la existencia de una única inversa para cada matriz compleja rectangular y la denominó *recíproca general*. Su definición se basaba en los proyectores ortogonales sobre los espacios columnas de la matriz y el de su traspuesta conjugada, haciendo hincapié en lo geométrico y/o funcional. Sin embargo, dicha inversa no consiguió gran notoriedad en la comunidad científica de ese momento, quizás debido a la engorrosa notación usada por Moore.

En 1955, Penrose [20] presentó un nuevo concepto de inversa generalizada para matrices rectangulares desde un punto de vista más bien algebraico que geométrico, en el sentido de que su definición venía dada por cuatro ecuaciones matriciales, conocidas en la actualidad como *ecuaciones de Penrose*. Posteriormente, se probó que esta definición era equivalente a la dada por Moore [1, 5]. A partir de allí, en honor a Moore y Penrose, esta inversa generalizada es comúnmente llamada *inversa de Moore-Penrose*. A través de los años, la inversa de Moore-Penrose fue ampliamente estudiada. Una de las principales razones de ello fue su utilidad en aplicaciones para tratar diversos problemas, en particular, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que constituye una de las aplicaciones básicas pero a la vez más importante de este tipo de inversas generalizadas. Sin embargo, la aplicación de mayor repercusión de la inversa de Moore-Penrose fue establecida por el propio Penrose al resolver el problema de los mínimos cuadrados. Más precisamente, Penrose probó que esta inversa permite encontrar la única solución en mínimos cuadrados de norma mínima de un sistema lineal arbitrario.

En 1958, Drazin [10] introdujo una nueva inversa generalizada en el contexto de anillos abstractos y, en particular, para matrices cuadradas, que llamó la atención de la comunidad matemática por sus interesantes propiedades espectrales. Por ejemplo, preserva la propiedad que posee la inversa ordinaria de una matriz en relación con los autovalores de la misma, en el sentido que si λ es un autovalor de A (no singular) entonces λ^{-1} es un autovalor de A^{-1}. Cuando el índice de la matriz es 1, la *inversa de Drazin* es llamada *inversa de grupo*. Sin embargo, una tal inversa posee mejores propiedades y es utilizada en muchas aplicaciones interesantes, y es por eso que se la considera como una entidad separada. Por mencionar alguna de ellas citamos el trabajo de C.D. Meyer titulado *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains*, (véase la cita [1282] de [1]) donde hizo una importante contribución a la teoría de las inversas generalizadas mostrando la aplicación de la inversa de grupo a las cadenas de Markov.

A partir de las inversas de Moore-Penrose, de Drazin y de grupo, surgieron diferentes inversas generalizadas, ya sea debilitando y/o combinando de diferentes maneras las ecuaciones algebraicas que definen a cada una de ellas. En particular, se puede mencionar las $\{1\}$-inversas (inversas interiores) y las $\{2\}$-inversas (inversas exteriores), las cuales siempre existen y son infinitas, salvo que la matriz sea no singular ó nula, respectivamente. Un estudio detallado de este tipo de inversas generalizadas puede verse en los clásicos libros: Rao-Mitra [21], Greville-Ben Israel [1] y Campbell-Meyer [5].

Diversas e interesantes propiedades y aplicaciones fueron desarrolladas a partir de todas estas inversas generalizadas. Más específicamente, la inversa de Moore-Penrose juega un papel determinante en la resolución aproximada de sistemas de ecuaciones lineales por el método de mínimos cuadrados y en el análisis de problemas de control óptimo, las $\{1\}$-inversas generalizadas permiten encontrar todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y una representación parametrizada de las mismas. La inversa de grupo se aplica, entre otras cosas, para encontrar el estado estacionario en la teoría de cadenas de Markov [5, 16], así como las inversas de Drazin permiten resolver ecuaciones diferenciales (y en diferencias) matriciales cuyos coeficientes sean matrices singulares. Todas estas inversas generalizadas son casos especiales de la $\{2\}$-inversa cuyos espacio columna y espacio nulo son prescritos [6, 25, 26].

Muchos de los resultados obetenidos han encontrado su aplicación en áreas de la matemática tales como métodos de optimización utilizando mínimos cuadrados, ecuaciones diferenciales (y en diferencias), cadenas de Markov, teoría de perturbación, métodos iterativos, etc. (veáse [1,4,5]). Más aún, las inversas generalizadas son de gran utilidad en problemas de otras disciplinas, como por ejemplo, se mencionan algunas de las más recientes: Equilibrio de ecuaciones Químicas [22], Robótica [9], teoría de Códigos [28], Sistemas Lineales de Control [16].

Dentro de toda esta gran área de estudio, el problema particular que se pretende abordar en esta monografía es el uso de inversas generalizadas en la resolución de ecuaciones de rangos. Se puede decir que este problema surge a partir del siguiente hecho poco conocido en los primeros cursos de Álgebra Lineal:

Si A es una matriz no singular de tamaño $n \times n$, se puede caracterizar la inversa de A como la única matriz X que satisface la ecuación de rangos

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A).$$

Cuando A es singular o rectangular, la ecuación de rangos anterior puede extenderse de la siguiente manera:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A), \tag{1}$$

donde B y C son ciertas matrices cuadradas que involucran alguna inversa generalizada de A.

En 1993, Fiedler y Markham [11] analizaron la ecuación de rangos (1) para el caso en que A es una matriz rectangular, $B = AA^\dagger$ y $C = A^\dagger A$, donde $A^\dagger$ simboliza la inversa de Moore-Penrose de A. En 1996, Wei [24] hizo un análisis similar usando la inversa de Drazin en lugar de la inversa de Moore-Penrose.

Un problema recíproco de la ecuación de rangos (1) fue tratado en 1999 por Groß [13]. Este autor, básicamente estudió qué propiedades deben tener las matrices B y C para que X resulte la inversa de Moore-Penrose de A. En la misma dirección, en el año 2003, Thome y Wei [23] analizaron (1) cuando X es la inversa de grupo de A. Más tarde, en el año 2005, Cvetković-Ilić [8] generalizó dicho trabajo para el caso de la inversa de Drazin.

El objetivo principal de esta monografía es estudiar en profundidad el problema concerniente a ecuaciones matriciales de rangos dado en (1), donde en las soluciones de las mismas intervienen inversas generalizadas matriciales.

Esta monografía está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se introducen algunas notaciones y definiciones clásicas del Análisis Matricial y con ello, algunos resultados que involucran el espacio columna y el espacio nulo de una matriz. Además, se mencionan algunas descomposiciones matriciales que permiten obtener distintas representaciones canónicas de las inversas generalizadas que se tratan en esta monografía. Finalmente, se estudia el *problema de ecuaciones de rangos* que involucra la inversa de una matriz no singular . Concretamente, se realiza una prueba detallada con técnicas modernas de la caracterización poco conocida de la inversa (ordinaria) de una matriz no singular, mediante ecuaciones de rangos.

En el Capítulo 2 se presentan las definiciones de las inversas generalizadas clásicas, a saber, la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin y la inversa de grupo. Se mencionan resultados de existencia, unicidad y caracterización de dichas inversas como así también sus propiedades más relevantes.

En el Capítulo 3 se establece una primera extensión del problema de ecuaciones de rangos de la inversa ordinaria para el caso de matrices singulares o rectangulares. La resolución de dicho problema conduce a una nueva caracterización de la inversa de Moore-Perose mediante ecuaciones de rangos. También se analiza el problema recíproco de la ecuación (1) planteado por Groß [13]. La herramienta principal en este capítulo es la Descomposición en Valores Singulares.

En el Capítulo 4 se establece una segunda extensión del problema de ecuaciones de rangos para el caso de matrices cuadradas singulares. Esta vez se utiliza la inversa de Drazin de una matriz cuadrada. Además, se estudia el problema recíproco de Groß en el que se intenta obtener bajo qué condiciones de las matrices B y C se tiene que la inversa de Drazin es solución de (1). La herramienta principal en este capítulo es la Descomposición Core-Nilpotente.

Se finaliza este manuscrito con una breve sección de Conclusiones de los temas abordados.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

En este capítulo se presentan algunas notaciones clásicas del Análisis Matricial y con ello, algunos resultados que involucran el espacio columna y el espacio nulo de una matriz. Además, se mencionan algunas descomposiciones matriciales que permiten obtener distintas representaciones canónicas de las inversas generalizadas que se tratan en esta monografía.

1.1. Notaciones y resultados clásicos de matrices

Como es usual, se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$ al conjunto de matrices complejas de tamaño $m \times n$. Para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, los símbolos A^*, A^{-1}, $\mathrm{rg}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$ denotan la traspuesta conjugada, la inversa (cuando $m = n$), el rango, el espacio nulo y el espacio columna de A, respectivamente.

El símbolo I_n indica la matriz identidad de tamaño $n\times n$. Además se hace uso del símbolo 0 para representar una matriz nula de tamaño adecuado. Con $S^{\perp}$ se denota al subespacio ortogonal del subconjunto $S \subseteq \mathbb{C}^n$ con respecto al producto escalar (canónico) de $\mathbb{C}^n$ definido por $\langle x, y\rangle = x^*y$, para $x, y \in \mathbb{C}^n$, donde x^* significa tomar traspuesta conjugada en el vector x. La ortogonalidad de los subespacios S_1 y S_2 se denota por $S_1 \perp S_2$. El símbolo $\oplus$ representa la suma directa de dos subespacios de un mismo espacio vectorial y cuando estos subespacios son ortogonales se indica con $\oplus^{\perp}$ (suma directa ortogonal).

Se denota por P_S al proyector ortogonal sobre S (paralelamente a $S^\perp$) y se recuerda que, como $\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp$, se puede definir a P_S como el único operador lineal de $\mathbb{C}^n$ tal que para $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

$$P_S(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad z \in S, \\ 0 & \text{si} \quad z \in S^\perp. \end{cases}$$

En algunos casos se hará abuso de lenguaje utilizando la misma letra para representar tanto una aplicación lineal $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ como a la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ que la representa con respecto a sus bases canónicas.

A continuación, se recuerdan las definiciones de dos de los cuatro subespacios fundamentales asociados a una matriz, a saber, el espacio columna y el espacio nulo. Todo ello con el fin de mostrar algunas de sus propiedades más relevantes.

Definición 1.1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio columna (o imagen) de A al conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, \quad x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Definición 1.1.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama espacio nulo de A al conjunto

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

Es bien conocido que los subespacios anteriores pueden expresarse en función de sus subespacios complementarios (véase por ejemplo [18])

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp \qquad \text{y} \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp.$$

Más aún, un resultado clásico de Análisis Matricial, conocido como el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, afirma que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus^\perp \mathcal{N}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{C}^m = \mathcal{N}(A^*) \oplus^\perp \mathcal{R}(A).$$

En el siguiente teorema se muestran algunas de las principales características de estos subespacios.

Teorema 1.1.3. $[1, 5, 18]$ Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*)$ y $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*A)$.

(b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*A)$ y $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(AA^*)$.

(c) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(AA^*) = \mathrm{rg}(A^*A)$.

A continuación se establecen (sin pruebas) más propiedades de los espacios columna y nulo de una matriz, las cuales se utilizan con frecuencia es esta monografía.

Teorema 1.1.4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Si $n = p$ entonces $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

(b) Si $m = p$ entonces, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ si y sólo si existe una matriz $C \in \mathbb{C}^{q\times n}$ tal que $A = BC$.

(c) Si $n = q$ entonces, $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ si y sólo si existe una matriz $D \in \mathbb{C}^{p\times m}$ tal que $B = DA$.

(d) Si $n = p$ entonces $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$.

(e) Si $n = p$ entonces, $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$ si y sólo si $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

(f) Si $n = p$ entonces, $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$ si y sólo si $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.

(g) Si $n = p$ entonces $A\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(AB)$.

Las matrices cuadradas tienen una característica especial que las distingue y en cierto modo permite clasificarlas. Es conocida como *índice matricial*. Es de particular interés en esta monofrafía recordar su definición y algunas de sus propiedades pues el índice de una matriz juega un rol determinante en la teoría de inversas generalizadas matriciales.

Definición 1.1.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se define el índice de A, denotado por $\mathrm{Ind}(A) = k$, como el menor entero no negativo k que satisface

$$\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}).$$

Observación 1.1.6. Aplicando el apartado (e) del Teorema 1.1.4, es inmediato notar que el índice de una matriz se puede definir de manera equivalente usando una condición más débil como la igualdad de rangos $\mathrm{rg}(A^k) = \mathrm{rg}(A^{k+1})$.

Observación 1.1.7. Toda matriz no singular tiene índice 0 y por convención la matriz nula tiene índice 1.

Proposición 1.1.8. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{Ind}(A) = k$. Entonces, para cada entero $l \geq k$ se satisface

$$\mathcal{N}(A^l) = \mathcal{N}(A^k) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(A^l) = \mathcal{R}(A^k).$$

Una de las propiedades más importantes del índice de una matriz es que permite descomponer el espacio lineal $\mathbb{C}^n$ como suma directa de dos subespacios ortogonales particulares, a saber, los espacios columna y nulo de A^k.

Proposición 1.1.9. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, $\mathrm{Ind}(A) = k$ si y sólo si k es el menor entero no negativo tal que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k). \tag{1.1}$$

Demostración. Si $k = 0$, la equivalencia es obvia y su prueba es omitida. Se considera entonces el caso $\mathrm{Ind}(A) = k \geq 1$.
Sea $\mathrm{Ind}(A) = k$. Es claro que el subespacio $\mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)$ es un subconjunto de $\mathbb{C}^n$. Además, $\mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$. En efecto, sea $z \in \mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k)$. Entonces $z = A^k x$ para algún $x \in \mathbb{C}^n$ y además $A^k z = 0$. Luego,

$$0 = A^k z = A^k(A^k x) = A^{2k}x.$$

lo que implica que $x \in \mathcal{N}(A^{2k})$. Como $\mathrm{Ind}(A) = k$, de la Proposición 1.1.8 resulta que, $x \in \mathcal{N}(A^{2k}) = \mathcal{N}(A^k)$ es decir, $z = A^k x = 0$.
Finalmente, aplicando la *fórmula de Grassman* y el *teorema de la dimensión*, se tiene

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)) &= \dim(\mathcal{R}(A^k)) + \dim(\mathcal{N}(A^k)) - \dim(\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k)) \\
&= \dim(\mathcal{R}(A^k)) + \dim(\mathcal{N}(A^k)) \\
&= n,
\end{aligned}$$

de donde el subespacio $\mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)$ debe coincidir con $\mathbb{C}^n$, es decir, $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) + \mathcal{N}(A^k)$. Además, como se probó que $\mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$, se sigue inmediatamente que $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$.

Recíprocamente, sea k el menor entero no negativo para el cual se satisface $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$. Por definición de suma directa de subespacios se tiene que $\mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$. Además es claro que $\mathrm{rg}(A^{k+1}) \leq \mathrm{rg}(A^k)$. Para probar la otra desigualdad se razona por el absurdo. Suponga que $\mathrm{rg}(A^{k+1}) < \mathrm{rg}(A^k)$. Por lo tanto, existe $x \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$A^{k+1}x = 0 \quad \text{y} \quad A^k x \neq 0.$$

Sea $y = A^k x$ el cual claramente vive en $\mathcal{R}(A^k)$. Por lo tanto,

$$A^k y = A^{2k} x = A^{k-1}(A^{(k+1)}x) = 0,$$

de donde $y \in \mathcal{N}(A^k)$. En consecuencia, $y \in \mathcal{N}(A^k) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$, lo cual es una contradicción pues $y \neq 0$. □

1.2. Matrices particionadas

En esta sección se tratan las operaciones elementales generalizadas y algunas propiedades especiales. Además se mencionan tres descomposiciones matriciales clásicas que serán de utilidad a lo largo de los capítulos subsiguientes. Por último, se muestran propiedades relevantes de matrices particionadas que involucran el rango y la inversa (ordinaria) de una matriz.

1.2.1. Operaciones elementales generalizadas

En esta subsección se recuerdan las operaciones elementales por bloques entre matrices particionadas que dan lugar a las operaciones elementales generalizadas.

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ puede ser particionada en matrices de menor tamaño trazando líneas horizontales entre dos filas y líneas verticales entre dos columnas. Las submatrices que quedan formadas se suelen llamar bloques. Para descomponer una matriz dada se debe cumplir que los bloques que conformen un fila deben tener la misma cantidad de filas y los bloques que conformen una columna deben tener el mismo número de columnas.

En esta monografía se consideran, en general, matrices particionadas del tipo 2×2. En efecto, sean A y B dos matrices complejas del mismo tamaño particionadas de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

donde cada bloque A_{ij} tiene el mismo tamaño que B_{ij}.
En este caso, las principales operaciones pueden realizarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}, \\ \lambda A &= \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ A^* &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por último, si cada producto de bloques $A_{ij}B_{jk}$ está bien definido, se tiene

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Se sabe que para resolver un sistema de ecuaciones lineales se puede aplicar el método de eliminación de Gauss, en el cual se realizan operaciones elementales por filas (columnas), a saber, intercambiar dos filas (columnas) entre sí, multiplicar una fila (columna) por un escalar no nulo o sumar a una fila (columna), otra previamente multiplicada por un escalar.

Dichas operaciones elementales pueden ser generalizadas a matrices particionadas de la siguiente manera:

I. Intercambiar dos filas (columnas) en bloques.

II. Premultiplicar (postmultiplicar) una fila (columna) en bloques por una matriz no singular de tamaño adecuado.

III. Sumar a una fila (columna) en bloques otra fila (columna) en bloques previamente premultiplicada (postmultiplicada) por una matriz de tamaño adecuado.

En base a las operaciones elementales en bloques mencionadas anteriormente, se pueden definir *matrices elementales generalizadas* como aquellas matrices que pueden ser obtenidas aplicando a la *matriz identidad*, algunas de las *operaciones elementales generalizadas* de tipo I, II y/o III descriptas anteriormente. Por ejemplo, las matrices de tipo 2×2 dadas por

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

son matrices elementales generalizadas de tipo I y III, respectivamente.

Teorema 1.2.1. Sea G una matriz elemental generalizada de tipo 2×2, obtenida realizando una operación elemental de filas (resp. columnas) sobre la matriz identidad $I_{m+n} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$. Si esa misma operación elemental de filas (resp. columnas) se realiza sobre una matriz M, la matriz resultante viene dada por el producto GM (resp. MG).

Demostración. Considere la matriz M particionada de acuerdo a los bloques de I, es decir

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

donde $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Si se aplica a M una operación elemental generalizada de tipo III por filas, resulta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C + EA & D + EB \end{bmatrix},$$

donde $E \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Note que la matriz anterior puede reescribirse como sigue

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C + EA & D + EB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ E & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

donde queda claro que $G = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ E & I_n \end{bmatrix}$.
Un argumento similar puede aplicarse para las operaciones elementales generalizadas de tipo I y II. □

El teorema anterior permite realizar operaciones elementales sucesivas por filas (columnas) sobre matrices de tipo 2×2. Por ejemplo, si se supone que el bloque A es no singular, entonces, la matriz M puede ser modificada mediante las siguientes operaciones elementales

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Dicho procedimiento puede escribirse en forma de ecuación como

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

La técnica de manipular matrices en bloques mediante operaciones elementales y las correspondientes matrices elementales generalizadas, son de gran utilidad en la presente memoria.

Es natural preguntarse si las matrices elementales generalizadas que pre y post multiplican a la matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ en (1.2) son no singulares. El siguiente lema garantiza que las matrices que se obtienen de aplicarle a la matriz identidad las operaciones elemetales generalizadas son no singulares y sus inversas pueden calcularse fácilmente. La demostración de este lema sigue directamente de la definición de inversa ordinaria y ligeros cáculos de matrices en bloques.

Lema 1.2.2. [2] Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces las matrices $\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$ son no singulares y sus inversas vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}.$$

Además, si $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son no singulares, entonces

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Descomposiciones matriciales

Las descomposiciones matriciales permiten representar una matriz de manera más sencilla (formas canónicas) y de este modo obtener más información acerca de sus principales propiedades. En esta sección se presentan sin demostración algunas descomposiciones matriciales clásicas que son usadas en los capítulos subsiguientes.

Teorema 1.2.3. (Forma Normal de Rango) [2,18]. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ con $r = \mathrm{rg}(A)$. Entonces existen dos matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tales que

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Teorema 1.2.4. (Descomposición en Valores Singulares) [2, 18]. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $r = \mathrm{rg}(A)$. Entonces existen dos matrices unitarias $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y una matriz diagonal $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$, donde los elementos de su diagonal principal son los valores singulares de A tales que

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

Teorema 1.2.5. (Descomposición Core-Nilpotente) [2,18]. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\mathrm{Ind}(A) = k$ y $t = \mathrm{rg}(A^k)$. Entonces existen dos matrices no singulares $C \in \mathbb{C}^{t\times t}$, $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz nilpotente $N \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$ de índice k tales que

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}.$$

1.2.3. Rango e inversas de matrices particionadas

En esta subsección se presentan algunos resultados fundamentales acerca del rango de una matriz particionada. Además, con el propósito de familiarizar al lector con las técnicas empleadas a lo largo de esta monografía, se presentan también algunas de sus demostraciones.

Se comienza con un lema que establece algunas propiedades acerca del rango de la suma y el producto de matrices. Antes se recuerda un resultado bien conocido del rango de una matriz diagonal en bloques:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B), \tag{1.3}$$

donde A y B son matrices complejas arbitrarias.

Lema 1.2.6. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Si $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices no singulares entonces $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A)$.

(b) Si $m = p$ y $n = q$ entonces $\mathrm{rg}(A + B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

(c) Si $n = p$ entonces $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.

Demostración. Por una cuestión de completitud y de ilustrar la técnica de operar con matrices en bloques del tipo 2×2, se prueba solamente el último inciso.
Si se aplican operaciones elementales generalizadas por bloques a la matriz $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$, se llega la siguiente identidad

$$\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

De (1.3) es claro que

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} -AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(AB) + n. \tag{1.5}$$

Por otro lado, de los incisos (a) y (b) se desprende

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\right) \\
&\leq \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\
&\leq \mathrm{rg}(B) + n, \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

donde la última cota es por definición de rango matricial.
Luego, de (1.5) y (1.6) se deduce que $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B)$.
En consecuencia, una aplicación del apartado (c) del Teorema 1.1.3 implica

$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\left((AB)^*\right) = \mathrm{rg}\left(B^*A^*\right) \leq \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A).$$

Por lo tanto, $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{mín}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$. □

Notar que el apartado (c) del Lema 1.2.6 establece una cota superior para el rango del producto de dos matrices. El siguiente teorema muestra una cota inferior, conocida como *desigualdad de Sylvester*. Su demostración clásica hace uso de la *fórmula de Grassman* $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$, donde V_1 y V_2 son dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V de dimensión finita (véase [18]).

A continuación se presenta una prueba más simple usando descomposiciones adecuadas de las matrices.

Teorema 1.2.7. (**Desigualdad de Sylvester**) Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$. Entonces,

$$\mathrm{rg}(AB) \geq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - n.$$

Demostración. Sea $r := \mathrm{rg}(B)$. Por el Teorema 1.2.3, la matriz B puede descomponerse de la siguiente manera

$$B = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $Q \in \mathbb{C}^{p\times p}$ son no singulares. Si se particiona la matriz AP de acuerdo al tamaño de los bloques de B se tiene

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}, A_2 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}, A_3 \in \mathbb{C}^{(r-r)\times r}$ y $A_4 \in \mathbb{C}^{(m-r)\times(n-r)}$.
Luego, cáclulos sencillos conducen a

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Por otro lado, del apartado (a) del Lema 1.2.6 se tiene

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

Además, aplicando el inciso (b) del Lema 1.2.6 se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} &= \operatorname{rg} \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \right) \\ &\leq \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} + \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{bmatrix} \\ &\leq \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} + n - r. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) &\leq \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} + n \\ &= \operatorname{rg}(AB) + n, \end{aligned}$$

de donde sigue inmediatamente el resultado. □

Se finaliza esta sección con tres resultados importantes acerca del rango de una matriz particionada del tipo 2×2. Los mismos permiten calcular el rango de una matriz particionada cuando uno de los bloques diagonales es no singular.

Proposición 1.2.8. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$ y $D \in \mathbb{C}^{l\times m}$, con A no singular. Entonces

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + \operatorname{rg}(D - CA^{-1}B). \tag{1.7}$$

Demostración. Como A es no singular, mediante cálculos sencillos se puede verificar la siguiente identidad

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, el Lema 1.2.2 y el inciso (a) del Lema 1.2.6 implican

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{bmatrix}.$$

Además, de la no singularidad de A también se sabe que $\operatorname{rg}(A) = n$. Así, de la propiedad de rangos dada en (1.3) se obtiene (1.7). $\square$

Una ligera modificación del resultado anterior puede enunciarse como sigue.

Proposición 1.2.9. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{C}^{l\times m}$ y $D \in \mathbb{C}^{l\times l}$, con D no singular. Entonces

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = l + \operatorname{rg}(A - BD^{-1}C).$$

Una consecuencia inmediata de las dos proposiciones anteriores puede resumirse en el siguiente hecho.

Corolario 1.2.10. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{bmatrix} = n + \operatorname{rg}(I_m - BA) = m + \operatorname{rg}(I_n - AB).$$

1.2.4. Una caracterización de la inversa ordinaria

En esta subsección se prueba una caracterización de la inversa ordinaria de una matriz cuadrada mediante una ecuación de rangos. A pesar de que es un hecho conocido para investigadores que trabajan en Análisis Matricial, a continuación se realiza una prueba detallada de dicha caracterización usando la técnica de operaciones elementales generalizadas para matrices en bloques.

Teorema 1.2.11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, A es no singular si y sólo si la siguiente ecuación de rangos admite solución (en X)

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A). \tag{1.8}$$

Demostración. Se prueba en primer lugar la condición necesaria. Considere la matriz en bloques

$$\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}.$$

Como A no singular, de la Proposición, 1.2.8 se sigue

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = n + \mathrm{rg}(X - A^{-1}). \tag{1.9}$$

Como, $\mathrm{rg}(A) = n$. Así, de (1.9) se deduce que la ecuación de rangos dada en (1.8) admite solución si y sólo si $\mathrm{rg}(X - A^{-1}) = 0$. Ahora, claramente la matriz $X = A^{-1}$ es una solución de (1.8).

Para probar la implicación recíproca se supone que existe una solución $\tilde{X}$ de la ecuación de rangos (1.8). Si se pre y pos multiplica la matriz $\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & \tilde{X} \end{bmatrix}$ por matrices elementales generalizadas convenientes, resulta

$$\begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & \tilde{X} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -\tilde{X} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n - A\tilde{X} \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Por el inciso (a) del Lema 1.2.6 se obtiene

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & \tilde{X} \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & I_n - A\tilde{X} \\ I_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & I_n - A\tilde{X} \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(I_n) + \mathrm{rg}(I_n - A\tilde{X}) = n + \mathrm{rg}(I_n - A\tilde{X}). \tag{1.11}$$

Luego, por (1.10) y (1.11), se llega a

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & \tilde{X} \end{bmatrix} = n + \operatorname{rg}(I_n - A\tilde{X}). \tag{1.12}$$

Por hipótesis, se sabe que $\tilde{X}$ satisface (1.8). En consecuencia, de (1.12) se tiene

$$\operatorname{rg}(A) = n + \operatorname{rg}(I_n - A\tilde{X}). \tag{1.13}$$

Finalmente, como A es de tamaño $n \times n$, la igualdad (1.13) implica la desigualdad

$$n \leq n + \operatorname{rg}(I_n - A\tilde{X}) = \operatorname{rg}(A) \leq n,$$

de donde $\operatorname{rg}(I_n - A\tilde{X}) = 0$. Es decir, $A\tilde{X} = I_n$. Como A es una matriz cuadrada y admite una inversa a derecha, es bien conocido que A debe ser no singular. □

Una variante del resultado anterior fue probada en el año 1962 por Brand [3]. Su demostración es básica y no se hace uso de matrices en bloques. Sin embargo, con el uso de la Proposición 1.2.8 puede obtenerse una demostración más simplificada y compacta.

Teorema 1.2.12. Sea $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular. Entonces, la matriz M tiene rango n si y sólo si $D = CA^{-1}B$.

Demostración. Puesto que A es no singular, la Proposición 1.2.8 implica

$$\operatorname{rg}(M) = n + \operatorname{rg}(D - CA^{-1}B).$$

Ahora, la conclusión es trivial. □

Capítulo 2

Inversas Generalizadas Clásicas

En este capítulo se presentan las definiciones de las inversas generalizadas clásicas, a saber, la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin y la inversa de grupo. Se mencionan resultados de existencia, unicidad y caracterización de dichas inversas como así también sus propiedades más relevantes.

2.1. Inversas Interiores y Exteriores

La utilidad de la inversa (ordinaria) de una matriz (cuadrada) para resolver problemas prácticos es indiscutible, pero no siempre se puede asegurar que la matriz involucrada en el problema que se quiere resolver tenga inversa.

Por ejemplo, para una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales escrito matricialmente de la forma

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^m. \tag{2.1}$$

Si $m = n$ y A es no singular, es bien conocido que es posible resolver el sistema y en este caso la única solución viene dada por $x = A^{-1}b$.

En cambio, si $m \neq n$ entonces el sistema puede admitir infinitas (si $b \in \mathcal{R}(A)$ y $m < n$) o bien ninguna solución (si $b \notin \mathcal{R}(A)$).

Por otro lado, si A es una matriz singular o rectangular, la idea es poder encontrar una matriz X de tal manera que la solución del sistema $Ax = b$ sea del tipo $x = Xb$.

Se sabe que la inversa A^{-1} de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface la igualdad

$$AX = XA = I_n. \tag{2.2}$$

Más aún, es bien conocido que la matriz A resulta no singular si existe una matriz X que cumpla al menos una de las condiciones en (2.2). En consecuencia, si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m \neq n$ solamente se puede esperar la existencia de una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que cumpla $AX = I_m$ o bien $XA = I_n$.

Esta limitación motiva las primeras extensiones de la inversa ordinaria de una matriz, conocidas como inversas laterales.

Definición 2.1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama *inversa a derecha* de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $AX = I_m$.

Definición 2.1.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se llama *inversa a izquierda* de A a cualquier matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que $XA = I_n$.

Ejemplo 2.1.3. Consiere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 21 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $BA = I_2$. Por lo tando, la matriz B es una inversa a izquerda de A, la cual a su vez es una inversa a derecha de B.

Los diferentes tipos de matrices inversas generalizadas aparecen cuando se quiere extender el concepto de inversa ordinaria al caso de matrices rectangulares o bien a matrices cuadradas singulares. En este sentido, las inversas laterales de una matriz rectangular constituyen un primer tipo de extensión de la inversa ordinaria.

Las inversas laterales no siempre existen, y en caso de existir, puede haber un número infinito de ellas. Un resultado bien conocido en la literatura caracteriza la existencia de las inversas laterales de una matriz dada, si se utiliza el rango de la misma. Más precisamente, una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ admite inversa a derecha (resp., a izquierda) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = m$ (resp., $\mathrm{rg}(A) = n$).

El hecho de que estas inversas laterales no siempre existan, permite introducir nuevos conceptos de inversas generalizadas.

Por ejemplo, si en la Definición 2.1.1 se multiplica a derecha por la matriz A se obtiene la siguiente condición más relajada $AXA = A$

Observe que mientras que $AX = I_m$ indica que AX se comporta como la identidad en todo el espacio $\mathbb{C}^m$, la ecuación $AXA = A$ indica que AX se comporta como la identidad solamente en $\mathcal{R}(A)$.

Definición 2.1.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface

$$(1)\ AXA = A,$$

se llama una inversa interior o $\{1\}$-inversa de A.

Ejemplo 2.1.5. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se propone una matriz genérica $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ que satisface la igualdad $AXA = A$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ligeros cálculos conducen a

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & 1 & -d \end{bmatrix},$$

donde $a, d \in \mathbb{C}$.

Por lo tanto, la matriz A tiene infinitas $\{1\}$-inversas.

Con un razonamiento análogo, si se multiplica a izquierda por la matriz X en ambos miembros de la ecuación dada en la Definición 2.1.1, se obtiene otro tipo de inversas generalizadas.

Definición 2.1.6. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface

$$(2)\ XAX = X,$$

se llama una inversa exterior o $\{2\}$-inversa de A.

El conjunto de todas las $\{1\}$-inversas de una matriz A se denota por $A\{1\}$, mientras que el conjunto de todas las $\{2\}$-inversas de una matriz A se denota como $A\{2\}$. Las matrices que verifiquen simultáneamente las Definiciones 2.1.4 y 2.1.6 se llaman $\{1,2\}$-inversas de A y el conjunto de todas las $\{1,2\}$-inversas de una matriz A se denota por $A\{1,2\}$.

Es bien conocido que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ siempre admite una inversa interior y una inversa exterior. Más aún, toda matriz compleja admite infinitas inversas interiores y exteriores, salvo los casos en que A sea una matriz no singular o bien la matriz nula.

En la siguiente proposición se ilustra una conexión entre estos tipos de inversas generalizadas.

Proposición 2.1.7. $[1, 27]$ Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

a) Si $X \in A\{2\}$ entonces $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(XA)$ y $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(AX)$.

b) Si $X \in A\{1\}$ entonces $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(AX)$ y $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(XA)$.

c) Si $X \in A\{1\}$ entonces $X \in A\{1,2\}$ si y sólo si $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(A)$.

d) Si $X \in A\{2\}$ entonces $X \in A\{1,2\}$ si y sólo si $\mathrm{rg}(X) = \mathrm{rg}(A)$.

2.2. La inversa de Moore-Penrose

En esta sección se enuncia un resultado que asegura la existencia y unicidad de la inversa de Moore-Penrose.
Se observa que, a partir de las definiciones 2.1.1 y 2.1.2, es evidente que las matrices XA y AX son hermíticas, es decir, coinciden con su traspuesta conjugada. A partir de las definiciones 2.1.4 y 2.1.6 surge el siguiente resultado.

Definición 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la *inversa de Moore-Penrose* de A si satisface

$$(1)\ AXA = A, \quad (2)\ XAX = X, \quad (3)\ (AX)^* = AX, \quad (4)\ (XA)^* = XA.$$

Si existe una tal matriz X y es única, es denotada por $A^\dagger$.

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la inversa Moore-Penrose de una matriz compleja arbitraria. Su demostración más conocida hace uso de la Descomposición en Valores Singulares (véase Teorema 1.2.4) para asegurar la existencia. Mientras que la unicidad se puede probar algebraicamente.

Teorema 2.2.2. [1,27] Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose siempre existe y es única.

A continuación, se establecen algunas de las principales propiedades de la inversa de Moore- Penrose.

Teorema 2.2.3. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades

(a) $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$.

(b) $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\lambda^\dagger = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$

(c) $(A^*)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^*$.

(d) $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$.

(e) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^* (AA^*)^\dagger$.

(f) $A^* = A^*AA^\dagger = A^\dagger AA^*$.

(g) Si $\mathrm{rg}(A) = n$ entonces $A^\dagger A = I_n$. Si $\mathrm{rg}(A) = m$ entonces $AA^\dagger = I_m$.

(h) $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$, donde U y V son matrices unitarias.

Demostración. Los incisos (a)-(g) siguen de la Definición 2.2.1. Mientras que la prueba del inciso (h) es una consecuencia del Teorema 1.2.4. □

La inversa de Moore-Penrose puede ser usada para calcular proyectores ortogonales. En efecto, la matriz $AA^\dagger$ es idempotente y hermítica, y por lo tanto resulta ser un proyector ortogonal. Más aún, como $AA^\dagger A = A$ y por el inciso (a) del Teorema 1.1.4 se sigue que

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\dagger A) \subseteq \mathcal{R}(AA^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Por lo tanto, $AA^\dagger$ es un proyector ortogonal sobre el espacio columna de A. Por simplicidad se denota por $P_A := AA^\dagger$. Similarmente se puede definir la matriz $Q_A := P_{A^*} = A^\dagger A$, que representa el proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A^*)$. Mediante los proyectores ortogonales P_A y Q_A se pueden obtener explicitamente las matrices C y D, mencionadas en el Teorema 1.1.4.

Proposición 2.2.4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{m\times q}$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones

(a) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ si y sólo si $P_BA = A$.

(b) $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ si y sólo si $BQ_A = B$.

Demostración. (a) Si se reescribe $P_BA = A$ como $BB^\dagger A = A$, por el Teorema 1.1.4 se tiene que $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$. Resíprocamente, si $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ entonces, por el Teorema 1.1.4, existe una matriz C talque $A = BC$. Si se pre multiplica a ambos miembros por $P_B = BB^\dagger$ se tiene que $P_BA = A$.
(b) Basta usar el hecho que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$ y el apartado (a) teniendo en cuenta que $Q_A = P_{A^*}$. □

El siguiente resultado muestra una representación de la inversa de Moore-Penrose de acuerdo a la descomposición dada en el Teorema 1.2.4.

Teorema 2.2.5. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ escrita como en el Teorema 1.2.4. Entonces la inversa de Moore-Penrose de A viene dada por

$$A^{\dagger} = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

Demostración. El caso en que A es la matriz nula es trivial. Sea $A \neq 0$. Por el Teorema 1.2.4 se sabe que A admite una descomposición en valores singulares del tipo

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*.$$

donde $\Sigma \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular con $r = \mathrm{rg}(A)$.
Se define entonces la siguiente matriz

$$X := V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*.$$

A continuación, se verifica que la matriz X dada anteriormente satisface las ecuaciones de la Definición 2.2.1.

$$\begin{aligned} AXA &= U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \\ &= U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AX)^* &= \left(U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \right)^* \\ &= U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = AX, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(XA)^* &= \left(V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \right)^* \\
&= V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = XA.
\end{aligned}
$$

Ahora, el Teorema 2.2.2 asegura que la inversa de Moore-Penrose es única, y por lo tanto se deduce que $X = A^\dagger$. □

Se finaliza esta sección con un ejemplo que muestra el cálculo de la inversa de Moore-Penrose, a partir del Teorema 2.2.5.

Ejemplo 2.2.6. Considere la matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.
$$

Se puede ver que $\operatorname{rg}(A) = 2$.
Ahora se calcula la descomposición en valores singulares de A y se obtiene

$$
U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Se calcula la matriz inversa de Σ y se obtiene

$$
\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Finalmente, por el Teorema 2.2.5, la inversa Moore-Penrose de A resulta

$$
\begin{aligned}
A^\dagger &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2r\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

2.3. La inversa de Drazin

En esta sección se presenta otra de las inversas generalizadas clásicas denominada inversa de Drazin. A diferencia de la inversa de Moore-Penrose, este nueva inversa se limita a matrices cuadradas. Aunque vale la pena mencionar que su definición fue dada en un contexto mucho más general para elementos en anillos y semigrupos.

Para definir la inversa de Drazin se utiliza el concepto de índice de una matriz (cuadrada). Note que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular, si se multiplica a izquierda a $AX = I_n$ por A^k se obtiene que $A^{k+1}X = A^k$. Sin embargo, esta última propiedad puede verificarse aún para el caso en que A sea una matriz singular y da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.3.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $\operatorname{Ind}(A) = k$. Se dice que una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la *inversa de Drazin* de A si satisface

$$XAX = X, \quad AX = XA, \quad A^{k+1}X = A^k. \tag{2.4}$$

Es bien conocido que la inversa de Drazin de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siempre existe y es única. Como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. [1,27] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\operatorname{Ind}(A) = k$. Entonces la inversa de Drazin de A existe y es única. La misma se denota A^D.

Para finalizar el capítulo se enuncian principales propiedades que satisface la inversa de Drazin, cuyas demostraciones pueden consultarse en [1, 27].

Proposición 2.3.3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\operatorname{Ind}(A) = k$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades.

a) $(A^*)^D = (A^D)^*$.

b) $(A^m)^D = (A^D)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

c) $AA^D = A^m(A^D)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

d) $(A^D)^D = A$ si y sólo si $\operatorname{Ind}(A) \leq 1$.

e) $\operatorname{Ind}(A^D) \leq 1$ y $(A^D)^{\#} = A^2 A^D$.

f) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$.

El siguiente resultado muestra la representación mediante la descomposición dada en el Teorema 1.2.5 de la inversa generalizada de Drazin para una matriz dada.

Teorema 2.3.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ind}(A) = k$. Si A se representa de acuerdo a la descomposición dada en el Teorema 1.2.5 entonces

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Se finaliza la sección con un ejemplo que ilustra el cálculo de la inversa de Drazin. Para ello se hace uso del Lema 1.2.5 y del Teorema 2.3.4.

Ejemplo 2.3.5. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se observa que $\operatorname{Ind}(A) = 2$, pues $\operatorname{rg}(A^2) = \operatorname{rg}(A^3)$.
Se puede ver que el conjunto

$$B_1 = \{b_1 = (-1, 2, 1, 0)^t, b_2 = (-6, 8, -6, 4)^t\},$$

es una base de $\mathcal{R}(A^2)$.
Por otro lado, el conjunto

$$B_1 = \{b_3 = (1, 0, 0, 0)^t, b_4 = (0, 1, 0, 0)^t\},$$

es una base de $\mathcal{N}(A^2)$.
Además, se puede ver que $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ es una base de $\mathbb{C}^4$.

En consecuencia, $\mathbb{C}^4 = \mathcal{R}(A^2) \oplus \mathcal{N}(A^2)$.
Ahora, considere la matriz

$$P = [b_1, b_2, b_3, b_4] = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

no singular.
Si se calcula la matriz inversa de P, se tiene

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Por el Teorema 1.2.5, la descomposición Core-Nilpotente de A es

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde

$$C = \left[[Ab_1]_{B_1} \, [Ab_2]_{B_1} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

es no singular y su inversa viene dada por $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
Además, la matriz

$$N = \left[[Ab_3]_{B_2} \, [Ab_4]_{B_2} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es nilpotente con índice de nilpotencia 2.

Finalmente, por el Teorema 2.3.4 se tiene

$$\begin{aligned} A^D &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.4. La inversa de grupo

La inversa de grupo surge como un caso particular de la inversa de Drazin. No obstante, la inversa de grupo es utilizada en muchas aplicaciones interesantes y es por eso que se la considera como una entidad separada. Por mencionar alguna de ellas, se cita el trabajo de Meyer titulado *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains* [18], donde hizo una importante contribución a la teoría de las inversas generalizadas mostrando la aplicación de la inversa de grupo a las cadenas de Markov.

Si A es una matriz no singular, es claro que $AA^{-1} = A^{-1}A$. Conjuntamente con las definiciones de $\{1\}$-inversa y $\{2\}$-inversa, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es *inversa de grupo* de A si satisface

$$AXA = A, \qquad XAX = X, \qquad AX = XA. \tag{2.5}$$

La inversa de grupo $A^{\#}$ de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a diferencia de la inversa Moore-Penrose, no siempre existe. El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para la existencia.

Teorema 2.4.2. [1,18] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) Existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface (2.5).

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

(c) $\text{Ind}(A) \leq 1$.

Por lo tanto, la inversa de grupo de una matriz A de índice a lo sumo 1 siempre existe. Más aún, es única tal como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.4.3. [1,27] Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singular. Entonces, A tiene inversa de grupo si y sólo si $\text{Ind}(A) = 1$. Cuando la inversa de grupo existe, la misma es única.

Se observa que si A es no singular entonces, a partir de la Definición 2.4.1 y de la unicidad de la inversa de grupo, resulta que $A^{-1} = A^{\#}$. A continuación, se enuncian sin demostración, algunas de las principales propiedades que satisface la inversa de grupo. Las demostraciones pueden consultarse en [1, 18, 27].

Proposición 2.4.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $(A^{\#})^{\#} = A$.

(b) $(A^{\#})^{*} = (A^{*})^{\#}$.

(c) $(A^{m})^{\#} = (A^{\#})^{m}$, $m \in \mathbb{N}$.

(d) $A^{\#} = A(A^3)^{\dagger}A$.

(e) $\mathcal{R}(A^{\#}) = \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A^{\#}) = \mathcal{N}(A)$.

Para finalizar el capítulo se presenta un ejemplo de cómo se obtiene la inversa de grupo de una matriz dada A de $\text{Ind}(A) = 1$ a partir del inciso (d) de la Propiedad 2.4.4.

Ejemplo 2.4.5. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$. Así, $\mathrm{Ind}(A) = 1$ y por lo tanto existe la inversa de grupo de A. Cálculos sencillos muestran que

$$A^3 = \begin{bmatrix} 32 & -33 & -5 \\ -31 & 34 & 55 \\ 1 & -21 & -34 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (A^3)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{1000} & \frac{-33}{1000} & \frac{-11}{200} \\ \frac{999}{1000} & \frac{1033}{1000} & \frac{11}{200} \\ \frac{-617}{1000} & \frac{-639}{1000} & \frac{-13}{200} \end{bmatrix}.$$

Ahora, por el inciso (d) de la Proposición 2.4.4 se obtiene

$$\begin{aligned} A^\# &= A(A^3)^\dagger A \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1000} & \frac{-33}{1000} & \frac{-11}{200} \\ \frac{999}{1000} & \frac{1033}{1000} & \frac{11}{200} \\ \frac{-617}{1000} & \frac{-639}{1000} & \frac{-13}{200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} & \frac{-1}{2} \\ \frac{9}{10} & \frac{13}{10} & \frac{1}{2} \\ \frac{-7}{10} & \frac{-9}{10} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

La inversa de Moore-Penrose mediante ecuaciones de rangos

En este capítulo se estudia el problema de la ecuación de rangos dada en (1) mediante la inversa de Moore-Penrose. De esta manera, se establece una primera extensión del problema de ecuaciones de rangos de la inversa ordinaria. También se analiza un problema recíproco planteado por el matemático alemán Groß que permite una mayor comprensión de este tipo de ecuaciones matriciales y su conexión con las inversas generalizadas.

3.1. Una caracterización de la inversa de Moore-Penrose

En esta sección se estudia una generalización del Teorema 1.2.11. Más concretamente, se pretende generalizar el siguiente hecho

$$A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ es no singular} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & I_n \\ I_n & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A).$$

Una manera de hacerlo es considerar en el problema previo matrices singulares y/o rectangulares y utilizar la inversa de Moore-Penrose para obtener un resultado análogo.

Considere el siguiente problema:

Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, encontrar una matriz $Z \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que resuelva la ecuación de rangos dada por

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & P_A \\ Q_A & Z \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A). \tag{3.1}$$

Este problema fue estudiado por Fiedler y Markham [11] en el año 1993. A continuación se presenta una demostración detallada de este hecho.

Teorema 3.1.1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $\operatorname{rg}(A) = r$. Entonces existe una única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface

$$AX = 0, \quad X^* = X, \quad X^2 = X, \quad \operatorname{rg}(X) = n - r, \tag{3.2}$$

y existe una única matriz $Y \in \mathbb{C}^{m\times m}$ que satisface

$$YA = 0, \quad Y^* = Y, \quad Y^2 = Y, \quad \operatorname{rg}(Y) = m - r. \tag{3.3}$$

En este caso,

$$X = I_n - Q_A \quad \text{y} \quad Y = I_m - P_A. \tag{3.4}$$

Más aún, existe una única matriz $Z \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & I_m - Y \\ I_n - X & Z \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A). \tag{3.5}$$

Demostración. En primer lugar se analiza la existencia de una solución del sistema (3.2). Para ello considere la matriz de orden n definida por $X := I_n - Q_A$. Para verificar que una tal matriz X satisface el sistema matricial (3.2), se considera una descomposición de la matriz A de acuerdo al Teorema 1.2.4, es decir,

$$A = U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{3.6}$$

donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias, y $\Sigma \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular. Así, del Teorema 2.2.5 se obtiene

$$A^\dagger = V\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.7}$$

En consecuencia, de (3.6) y (3.7), ligeros cálculos conducen a

$$X = I_n - Q_A = V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} V^* - V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* = V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} V^*. \tag{3.8}$$

Es claro que X satisface (3.2).

Para mostrar la unicidad, se supone que existe otra matriz $\widetilde{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface (3.2). Ahora considere una partición de la forma

$$\widetilde{X} = V \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} V^*, \quad \text{con} \quad E \in \mathbb{C}^{r\times r} \quad \text{y} \quad H \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}.$$

De la primera ecuación en (3.2) se tiene

$$A\widetilde{X} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = 0,$$

de donde $E = 0$ y $F = 0$, pues Σ es no singular.

En consecuencia, de la segunda ecuación en (3.2) se deduce que $G = 0$. Ahora, la tercera y cuarta condición en (3.2) implican $H^2 = H$ y $\mathrm{rg}(H) = n - r$, respectivamente. Así, como $H \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$, resulta no singular. Es decir, $H = I_{n-r}$. Luego, se obtiene

$$\widetilde{X} = V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} V^*,$$

de donde $X = \widetilde{X}$ debido a (3.8).

La existencia y unicidad del sistema matricial (3.3) se prueba de manera análoga.

Ahora, si se usan las expresiones de X e Y dadas en (3.4), la ecuación de rangos dada en (3.5) puede reeescribirse como

$$\mathrm{rg} \begin{bmatrix} A & AA^\dagger \\ A^\dagger A & Z \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A). \tag{3.9}$$

Mediante operaciones elementales generalizadas, es fácil ver que la matriz en bloques en el lado izquierdo de (3.9) es equivalente a la matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & Z - A^\dagger \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación (3.9) se satisface si y sólo si $\mathrm{rg}(Z - A^\dagger) = 0$, de donde $Z = A^\dagger$. □

3.2. Un problema recíproco

En 1999, Groß [13] estudió un problema recíproco de la ecuación de rangos (**??**) analizada por Fiedler y Markham. Más precisamente, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, Groß consideró la siguiente ecuación (en X) de rangos:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A), \tag{3.10}$$

donde B y C son matrices cuadradas de tamaños adecuados.

En esta sección se establecen condiciones necesarias y suficientes sobre las matrices B y C, cuando se asume que la inversa de Moore-Penrose de A es una solución de (3.10).

Se comienza con dos lemas auxiliares. El primero de los lemas muestra la relación del rango de una matriz parcionada con los rangos de sus bloques. El segundo es un interesante y clásico resultado de Análisis Matricial que relaciona el espacio columna con el espacio nulo de dos matrices cuyo producto es la matriz nula.

Lema 3.2.1. [17] Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Entonces,

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(L) + \operatorname{rg}(M) + \operatorname{rg}(W),$$

donde $L = C\,(I_n - Q_A)$, $M = (I_m - P_A)\,B$ y $W = (I_n - P_L)\left(X - CA^\dagger B\right)(I_m - Q_M)$.

Lema 3.2.2. [1, 5] Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$. Entonces $AB = 0$ si y sólo si $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Los lemas previos permiten encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación de rangos (3.10) admita solución.

Teorema 3.2.3. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, la ecuación de rangos dada en (3.10) admite una solución (en X) si y sólo si se cumplen las condiciones $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$. En este caso, la solución viene dada por $X = CA^\dagger B$.

Demostración. En primer lugar, se prueba la condición suficiente. En efecto, aplicando el apartado (a) de la Proposición 2.2.4 se obtiene

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow P_A B = B \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow CQ_A = C.$$

Así,

$$(I_m - P_A)B = 0 \quad \text{y} \quad C(I_n - Q_A) = 0.$$

Si se usan estas igualdades en el Lema 3.2.1 se obtiene

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(X - CA^\dagger B),$$

de donde claramente la matriz $X := CA^\dagger B$ es una solución de (3.10).
Por otro lado, para probar la condición necesaria, supóngase que existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface (3.10). Entonces, por el Lema 3.2.1, se sigue que $\operatorname{rg}(L) + \operatorname{rg}(M) + \operatorname{rg}(W) = 0$, lo cual implica que $\operatorname{rg}(L) = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(W) = 0$, y por lo tanto $L = 0$, $M = 0$ y $W = 0$.
Así, como $L := C(I_n - Q_A)$ se tiene que $C(I_n - Q_A) = 0$, que a su vez, por el Lema 3.2.2, es equivalente a $\mathcal{R}(I_n - Q_A) \subseteq \mathcal{N}(C)$. En consecuencia, como $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(I_n - Q_A)$, se obtiene $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(C)$. Más aún, como $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$ y $\mathcal{N}(C) = \mathcal{R}(C^*)^\perp$, de la última inlusión se obtiene $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.
Similarmente, de la igualdad $M := (I_m - P_A)\, B = 0$ se consigue $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$.
Finalmente, resta probar que $X = CA^\dagger B$. En efecto, como $L = 0$ y $M = 0$ se tiene que $P_L = 0$ y $Q_M = 0$. Así, $W := (I_n - P_L)\left(X - CA^\dagger B\right)(I_m - Q_M) = X - CA^\dagger B$, de donde se concluye el resultado pues $W = 0$. □

Del Teorema 3.2.3 se puede deducir inmediatamente que $X = A^\dagger$ es la única solución a la ecuación de rangos

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & AA^\dagger \\ A^\dagger A & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A).$$

Sin embargo, es fácil ver que las matrices B y C no necesariamente están determinadas de tal forma, es decir, $B = AA^\dagger$ y $C = A^\dagger A$. Por ejemplo, si $m = n$, se puede tomar $A = I_m$, B no singular y $C = B^{-1}$. Esta cuestión motiva el siguiente resultado, que de alguna manera clarifica la relación entre las matrices A, B y C cuando $X = A^\dagger$ es la solución de la ecuación de rangos (3.10). La herramienta principal es la Descomposición en Valores Singulares de la matriz.

Teorema 3.2.4. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $r = \mathrm{rg}(A)$ y escrita de acuerdo al Teorema 1.2.4. Entonces, $X = A^\dagger$ es la solución de (3.10) si y sólo si

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad C = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1}K^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{3.11}$$

para alguna matriz no singular $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Suponga que $X = A^\dagger$ es una solución de (3.10). Por el Teorema 3.2.3 se sabe que

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*). \tag{3.12}$$

De acuerdo al inciso (b) del Teorema 1.1.4, existen matrices F y G tales que $B = AG$ y $C = FA$. Así, como $AA^\dagger A = A$ se sigue

$$A^\dagger = X = CA^\dagger B = FAG = CG = FB. \tag{3.13}$$

De (3.12), (3.13) y la clásica propiedad del espacio columna de la inversa de Moore-Penrose se sigue

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\left((A^\dagger)^*\right) \subseteq \mathcal{R}(B^*) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{R}(C).$$

En consecuencia, se obtienen respectivamente las siguientes igualdades

$$\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{R}(A), \tag{3.14}$$

$$\mathcal{R}(C^*) = \mathcal{R}(C) = \mathcal{R}(A^*). \tag{3.15}$$

De acuerdo al Teorema 1.2.4, la matriz A puede escribirse como

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{3.16}$$

donde $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias, y $\Sigma \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es una matriz diagonal definida positiva.
Ahora, considere la matriz

$$G = V \begin{bmatrix} K & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} U^*, \tag{3.17}$$

con $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$.
Así, de las particiones (3.16) y (3.17) en la igualdad $B = AG$ se consigue

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.18}$$

Ahora, usando (3.14) se tiene que $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(B)$ lo cual implica $B^* = BT$ para alguna matriz T. Particionando T de la forma

$$T = U \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} U^*, \tag{3.19}$$

de $B^* = BT$ se sigue que $\Sigma G_2 = 0$.
Note que (3.14) también implica que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$. Usando el hecho que $\Sigma G_2 = 0$ en (3.18) y la forma de A en (3.16), se deduce que K es no singular.
Similarmente, si se considera la partición

$$F^* = U \begin{bmatrix} F_1^* & F_2^* \\ F_3^* & F_4^* \end{bmatrix} V^*, \tag{3.20}$$

de $C = FA$ y las descomposiciones (3.16) y (3.20) se obtiene

$$C^* = V \begin{bmatrix} \Sigma F_1^* & \Sigma F_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*. \tag{3.21}$$

En consecuencia, de (3.15) se deduce $\Sigma F_2^* = 0$ y la no singularidad de $F_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$.
A partir de los cálculos realizados y el hecho que $\Sigma = \Sigma^*$, las expresiones en (3.18) y (3.21) se pueden escribir de la forma

$$B = U \begin{bmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad \text{y} \quad C = V \begin{bmatrix} F_1\Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*, \tag{3.22}$$

para cierta matriz no singular K de tamaño $r \times r$.
Por otro lado, de (3.16) y el Teorema 2.2.5 se obtiene

$$A^{\dagger} = V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{*}. \tag{3.23}$$

Así, de la igualdad $A^{\dagger} = CA^{\dagger}B$ y (3.22) se sigue

$$\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

de donde $F_1\Sigma = \Sigma^{-1}K^{-1}$.
Así, de (3.22) y (3.24) se consigue (3.11).
$\Leftarrow$) Si A se escribe de la forma (3.16), entonces las matrices B y C dadas en (3.11) satisfacen las condiciones $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$. Luego, el Teorema 3.2.3 asegura que $X = CA^{\dagger}B$ es una solución de (3.10). Más aún, $X = CA^{\dagger}B = A^{\dagger}$. $\square$

Capítulo 4

La inversa de Drazin mediante ecuaciones de rangos

En este capítulo se presenta una extensión alternativa al problema de caracterizar la inversa ordinaria mediate ecuaciones de rangos. Más precisamente, se estudia un problema de ecuaciones de rango que tiene como solución la inversa de Drazin. Además, usando la Descomposición Core-Nilpotente de una matriz se analiza el problema recíproco planteado por Groß.

4.1. Una caracterización de la inversa de Drazin

En el capítulo anterior se analizó el problema de hallar las matrices X que cumplen la ecuación de rangos

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A), \tag{4.1}$$

donde A es una matriz compleja arbitraria, $B = P_A$ y $C = Q_A$.

Considere ahora el siguiente problema:

Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, encontrar una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que resuelva la ecuación de rangos dada por

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & AA^D \\ A^DA & X \end{bmatrix} = \operatorname{rg}(A). \tag{4.2}$$

Este problema fue estudiado por Wei [24] en el año 1996.

Se comienza con un lema auxiliar.

Lema 4.1.1. [24] Sea M una matriz compleja de tamaño $2n \times 2n$ particionada como

$$M = \begin{bmatrix} A & AQ \\ PA & B \end{bmatrix},$$

para ciertas matrices A, P, Q y B de tamaños adecuados. Entonces

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B - PAQ).$$

Demostración. Por el Lema 3.2.1 se tiene

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(L) + \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}(W), \tag{4.3}$$

donde
$L = PA\,(I_n - Q_A)$, $M = (I_n - P_A)\,AQ$ y $W = (I_n - P_L)\,(B - PAQ)\,(I_n - Q_M)$. Como $AQ_A = A$ y $P_A A = A$ es claro que $L = 0$ y $M = 0$. Así, $W = B - PAQ$. De (4.3) se concluye el resultado. $\square$

El siguiente resultado establece una interesante caracterización de la inversa de Drazin como solución de una ecuación de rangos.

Teorema 4.1.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{Ind}(A) = k$ y $t = \mathrm{rg}(A^k)$. Entonces existe una única matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface

$$A^k X = 0, \quad XA^k = 0, \quad X^2 = X, \quad \mathrm{rg}(X) = n - t, \tag{4.4}$$

y una única matriz $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & I_n - X \\ I_n - X & Y \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A). \tag{4.5}$$

Más aún, la matriz Y es la inversa de Drazin A^D de A y además

$$X = I_n - A^D A = I_n - AA^D. \tag{4.6}$$

Demostración. Por el Teorema 1.2.5, existen dos matrices no singulares $C \in \mathbb{C}^{t\times t}$, $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz nilpotente $N \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$ de índice k tales que

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Como $N^k = 0$, sencillos cálculos conducen a

$$A^k = P \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{4.7}$$

Por otro lado, como $AA^D = A^D A$, de (4.1) y el Teorema 2.3.4 se obtiene

$$X = I_n - AA^D = I_n - A^D A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-t} \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{4.8}$$

de donde no es difícil comprobar que la matriz X verifica las cuatro condiciones dadas en (4.4).

Para probar la unicidad, se considera una matriz $\widetilde{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface (4.4) y se la particiona de la siguiente manera

$$\widetilde{X} = P \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{4.9}$$

donde $E \in \mathbb{C}^{t\times t}$.

De (4.7) y la primera ecuación en (4.4) se obtiene

$$\begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = 0,$$

de donde se deduce $E = 0$ y $F = 0$ pues C es no singular.

Similarmente, la segunda ecuación en (4.4) implica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

de donde se determina $G = 0$.

Por lo tanto, de (4.9) se consigue

$$\widetilde{X} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{4.10}$$

Para determinar H se usa que $\widetilde{X}$ es idempotente y $\mathrm{rg}(\widetilde{X}) = n - t$. En efecto, se obtiene $H^2 = H$ y $\mathrm{rg}(H) = n - t$. Como $H \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$ resulta no singular y, por lo tanto, $H = I_{n-t}$. Así, de (4.8) y (4.10) se concluye que $X = \widetilde{X}$.
Finalmente, como la única solución de (4.4) viene dada por (4.6), la ecuación de rangos dada en (4.5) se reduce a encontar una matriz Y tal que

$$\begin{bmatrix} A & AA^D \\ A^D A & Y \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A).$$

En consecuencia, una aplicación del Lema 4.1.1 en la igualdad anterior conduce a $X - A^D A A^D = 0$, de donde $X = A^D$. □

4.2. Un problema recíproco

El problema de ecuaciones de rango estudiado en la sección anterior también puede ser analizado desde el punto de vista de Groß [13], en el que se pregunta la relación existente entre los bloques de la ecuación de rangos

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \mathrm{rg}(A), \tag{4.11}$$

de tal modo que $X = A^D$ sea una solución de la misma.

El siguiente resultado fue obtenido por Cvetković-Ilić [8] y permite dar una respuesta a la cuestión anterior. Antes, es útil establecer (sin demostración) dos lemas auxiiares.

Lema 4.2.1. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ si y sólo si CA^-B es invariante bajo cualquier elección de $A^- \in A\{1\}$. En particular, $CA^\dagger B = CA^-B$ para cualesquiera $A^- \in A\{1\}$.

Lema 4.2.2. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ escrita de acuerdo a la descomposición core-nilpotente establecida en el Teorema 1.2.5. Entonces, toda inversa interior A^- de A viene dada por

$$A^- = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & N^- \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde $N^- \in N\{1\}$.

Teorema 4.2.3. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{Ind}(A) = k$, $\mathrm{rg}(A^k) = r$ y $B, C, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Considere A escrita en una descomposición core-nilpotente

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P, \tag{4.12}$$

donde $M \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son no singulares y $N \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$ es nilpotente. Entonces, $X = A^D$ es una solución de (4.11) si y sólo si existen matrices $F_1, G_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $F_2, G_2 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$, $F_3, G_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ y $F_4, G_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}$, tales que

$$B = P^{-1}\begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P \quad \text{y} \quad C = P^{-1}\begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} P, \tag{4.13}$$

y

$$\begin{aligned} F_1MG_1 + F_2NG_3 &= M^{-1}, \\ F_1MG_2 + F_2NG_4 &= 0, \\ F_3MG_1 + F_4NG_3 &= 0, \\ F_3MG_2 + F_4NG_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $X = A^D$ una solución de (4.11). Por el Teorema 3.2.3 se tiene que $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$. En consecuencia, existen matrices G y F tales que $B = AG$ y $C = FA$.
En consecuencia, si se consideran las particiones

$$G = P^{-1}\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} P \quad \text{y} \quad F = P^{-1}\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} P, \tag{4.15}$$

de (4.12) y (4.15) es inmediato obtener

$$B = P^{-1}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} P = P^{-1}\begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P, \tag{4.16}$$

$$C = P^{-1}\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P = P^{-1}\begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} P. \tag{4.17}$$

Además, del Lema 4.2.2 también se obtiene

$$A^{-} = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-} \end{bmatrix} P. \tag{4.18}$$

Ahora, del Lema 4.2.1 también se conoce que $A^D = CA^{-}B$. Así, de (4.16), (4.17) y (4.18) se consigue

$$\begin{aligned} A^D &= P^{-1} \begin{bmatrix} F_1M & F_2N \\ F_3M & F_4N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MG_1 & MG_2 \\ NG_3 & NG_4 \end{bmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} F_1MG_1 + F_2NG_3 & F_1MG_2 + F_2NG_4 \\ F_3MG_1 + F_4NG_3 & F_3MG_2 + F_4NG_4 \end{bmatrix} P. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Por otro lado, a partir del Teorema 2.3.4 se sabe

$$A^D = P^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P. \tag{4.20}$$

Finalmente, (4.19) y (4.20) implican (4.14).

$\Leftarrow$) Sean B y C matrices de la forma (4.13). Es inmediato ver que cumplen $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$. Así, el Teorema 3.2.3 asegura que $X = CA^{-}B$ es una solución de (4.11). Así, las cuatro condiciones en (4.14) conducen a $CA^{-}B = A^D$, es decir $X = A^D$ es una solución de (4.11). $\square$

Conclusiones

En los últimos años diferentes autores han abordado problemas matriciales tanto desde el punto de vista teórico como aplicado en procesos de diferente naturaleza: estadística, física, biologíca, economíca, electrónica, etc. La Teoría de Inversas Generalizadas constituye un área importante dentro de las Matemáticas. Más especialmente dentro del Análisis Matricial y son la base de muchas aplicaciones tanto en Ciencias Básicas como de índole Aplicada.

Aunque esta teoría fue objeto de estudio durante un largo periodo de tiempo empezando a finales de los años 50 de la mano de las inversas de Moore-Penrose y de Drazin, es de destacar el impulso e interés de la comunidad científica en la última década. Sin embargo, aunque muchos de los problemas y preguntas en este campo de estudio ya fueron resueltos, algunos solo se han resuelto parcialmente o permanecen abiertos hasta el día de hoy.

Esta monografía me permitió iniciarme en esta área de las matemáticas y en particular en la investigación científica. Los temas abordados me permitieron desarrollar la habilidad de integrar los conocimientos y habilidades adquiridos en las asignaturas cursadas a lo largo de la licenciatura. En especial, la lectura de trabajos de investigación (en general en inglés) me permitieron agudizar el espíritu crítico, cuestionar las hipótesis, aprender las técnias empleadas en las demostraciones y al mismo tiempo valorar los resultados obtenidos por los diferentes autores.

Para desarrollar esta monografía fue necesario buescar e indagar en la gran bibliografía disponible sobre el tema y los nuevos resultados que aparecen día a día en la literatura especializada.

También fue de gran utilidad el el manejo de entornos computacionales que me ayudaron a realizar los ejemplos ilustrados en este manuscrito.

Se espera que los aportes que surjan como resultado de esta monografía permitan profundizar en el conocimiento de las inversas generalizadas de matrices y su conexión con las ecuaciones de rango, como así también la relación existente entre ellas y sus posibles generalizaciones a escenarios más generales como el álgebra de operadores lineales acotados y la teoría anillos abstractos.

Bibliografía

[1] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Second Ed. Springer-Verlag, New York (2003).

[2] D. Bernstein, *Matrix Mathematics: Teory, Facts and Formulas*, Princeton University Press, New Jersey (2009).

[3] L. Brand, *The solution of linear algebraic equations*, Mathematical Gazzete, 357 (46) 203-207 (1962).

[4] S.L. Campbell, *Recent Applications of Generalized Inverses*, Pitman, London (1982).

[5] S.L. Campbell, C.D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear transformations*, SIAM, Philadelphia (2009).

[6] Y. Chen, X. Chen, *Representation and approximation of the outer inverse of a matrix*, Linear Algebra Appl. 308 85-107 (2000).

[7] R.E. Cline, T.N.E. Greville, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl. 29 53-62 (1980).

[8] D. Cvetković-Ilić, *On a problem of N. Thome and Y. Wei*, Appl. Math. Comput. 166 (1) 233-236 (2005).

[9] K.L. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento, *A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics*. Int. J. Rob.Res. 12 1-19 (1993).

[10] M.P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65 506-514 (1958).

[11] M. Fiedler, T.L. Markham, *A Characterization of the Moore-Penrose Inverse*, Linear Algebra Appl. 179 129-133 (1993).

[12] I. Fredholm, *Sur une classe déquations fonctionnelles*, Acta Math. 27 365-390 (1903).

[13] J. Groß, *Solution to a rank equation*, Linear Algebra Appl. 289 127-130 (1999).

[14] R.E. Hartwig, K. Spindelböck, *Matrices for which* A^* *and* A^+ *commute*, Linear Multilinear Algebra, 14 241-256 (1984).

[15] D. Hilbert, *Grundzüuge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Götingen Nachrichten, 49-51 (1904).

[16] S. J. Kirkland, M. Neumann, *Group Inverses of M-Matrices and Their Applications*, Chapman and Hall/CRC, London (2013).

[17] G. Marsaglia, G. Styan, *Equalities and inequalities for ranks of matrices*, Linear Multilinear Algebra, 2 269-292 (1974).

[18] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia (2000).

[19] E.H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Am. Math. Soc., 26 394-395 (1920).

[20] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 466-473 (1955).

[21] C.R. Rao, S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and Its Application*, John Wiley & Sons, New York 1971.

[22] F. Soleimani, P.S. Stanimirović, *Some Matrix Iterations for Computing Generalized Inverses and Balancing Chemical Equations*, Algorithms, 8 982-998 (2015).

[23] N. Thome, Y. Wei *Generalized inverses and a block-rank equation*, Appl. Math. Comput., 141 471-476 (2003).

[24] Y. Wei, *A characterization and representation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 17 (4) 744-747 (1996).

[25] Y. Wei, *A characterization and representation of the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and its applications*, Linear Algebra Appl., 280 87-96 (1998).

[26] Y. Wei, H. Wu, *The representation and approximation for the generalized inverse $A^{(2)}_{T,S}$*, Appl. Math. Comput., 13 263-276 (2003).

[27] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, New York (2018).

[28] G.Z. Xiao, B.Z. Shen, C.K. Wu, C.S.Wong, *Some spectral techniques in coding theory*, Discrete Math., 87 181-186 (1991).